Université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique

Enoncés TD n° 1
Rappels sur les Transformées de Laplace

3[ème] Année Licence
1[ème] Année Master
« Automatisme Industriel »

Exercice n°1

Calculez les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :

a) $f(t) = e^{-at}$

b) $f(t) = \cos(\omega t)$

c) $f(t) = t^n \quad n \geq 1$

d) $f(t) = t^5 e^{2t}$

e) $f(t) = 3(1 - e^{-4t})$

f) $f(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

g) $f(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

h) $f(t) = e^{-0.5t} u(t-2)$

i) $f(t) = \dfrac{t^2}{2}$

j) $f(t) = \sin(2t + \dfrac{\pi}{4})$

k) $f(t) = e^{-0.5t}\sin(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)$

l) $f(t) = t.e^{-at}.\delta(t-1)$

m) $f(t) = t.u(t-2) + \sin(2\pi t - \dfrac{\pi}{4}).u(t-3)$

avec : $u(t)$: échelon unitaire
$\delta(t)$: impulsion de Dirac

Exercice n°2

Calculez les transformées inverses de Laplace des fonctions suivantes :

a) $F(p) = \dfrac{2}{p(p+1)(p-2)}$

b) $F(p) = \dfrac{p(p+2)}{p^2 + 2p + 2}$

c) $F(p) = \dfrac{2p^2 + 7p + 8}{p^2 + 3p + 2}$

d) $F(p) = \dfrac{5p + 16}{(p+2)^2 (p+5)}$

e) $F(p) = \dfrac{2(p+2)}{p^2 - 2p + 2}$

f) $F(p) = \dfrac{5(p+2)}{p^2 (p+1)(p+3)}$

Exercice n°3

Résolution d'équations différentielles en utilisant les transformées de Laplace :

a) $\ddot{y}(t) + 3y(t) = \sin(t) \qquad avec \quad y(0) = 1;\ \dot{y}(0) = 2$

b) $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 20y(t) = 4 \qquad avec \quad y(0) = -2;\ \dot{y}(0) = 0$

c) $\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\dfrac{dy(t)}{dt} = 0 \qquad avec \quad y(0) = 3;\ \dot{y}(0) = -2;\ \ddot{y}(0) = 7$

Exercice n°4

En utilisant les théorèmes des valeurs initiale et finale, calculez $s(t \to 0^+)$ et $s(t \to \infty)$ pour les fonctions suivantes :

a) $S(p) = \dfrac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p}$

b) $S(p) = \dfrac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p}$

Exercice n°1

Calcul des transformées de Laplace directes :

1.a) $\boxed{f(t) = e^{-at}}$

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \; f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}e^{-at}dt = \int_0^\infty e^{-(p+a)t}dt = \left[\frac{e^{-(p+a)t}}{-(p+a)}\right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{1}{p+a}$$

1.b) $\boxed{f(t) = \cos(\omega t)}$ sachant que : $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

1ère méthode (d'après les tables de transformées de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} + \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\}\right]$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right]$$ car : $\mathcal{L}\{ e^{-at}\} = \dfrac{1}{p+a}$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

2ème méthode (à partir de la définition de la transformée de Laplace) :

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \; f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt} \; \cos(\omega t)dt$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-pt} \; e^{jwt}dt + \int_0^\infty e^{-pt} \; e^{-jwt}dt\right] = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-(p-jw)t}dt + \int_0^\infty e^{-(p+jw)t}dt\right]$$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right]$$ car : $\mathcal{L}\{ e^{-at}\} = \dfrac{1}{p+a}$

$$\Rightarrow \; F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

1.c) $\boxed{f(t) = t^n \quad n \geq 1}$

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} \; f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt} \; t^n dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec : u = t^n dv = e^{-pt}dt

du = n. t^{n-1}.dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{ t^n \} = \underbrace{-\frac{1}{p}\left[t^n e^{-pt}\right]_0^{\infty}}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t^n\ vers\ \infty). \\ Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to 0}} + \frac{n}{p}\int_0^{\infty} e^{-pt}\ t^{n-1}dt = \frac{n}{p}\ \mathcal{L}\{ t^{n-1} \}$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{ t^n \} = \frac{n}{p}\ \mathcal{L}\{ t^{n-1} \} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\ \mathcal{L}\{ t^{n-2} \} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{n-2}{p}\ \mathcal{L}\{ t^{n-3} \} = \ldots..$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{ t^n \} = \frac{n}{p}\frac{n-1}{p}\frac{n-2}{p}\ldots\ldots\frac{n-(n-1)}{p}\ \mathcal{L}\{ t^{n-n} \} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{p^n}\ \mathcal{L}\{ 1 \}$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{ t^n \} = \frac{n!}{p^n}\frac{1}{p}$$ car : $\mathcal{L}\{ 1 \} = \mathcal{L}\{ u(t) \} = \frac{1}{p}$ $u(t)$: échelon unitaire

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{ t^n \} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

1.d) $\boxed{f(t) = t^5 e^{2t}}$ sachant que : $\mathcal{L}\{ e^{-at}.\ g(t)\} = G(p+a)$

et : $\mathcal{L}\{ t^5 \} = \frac{5!}{p^6}$ (voir exercice 1.c)

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t) \} = \frac{5!}{(p-2)^6}$$

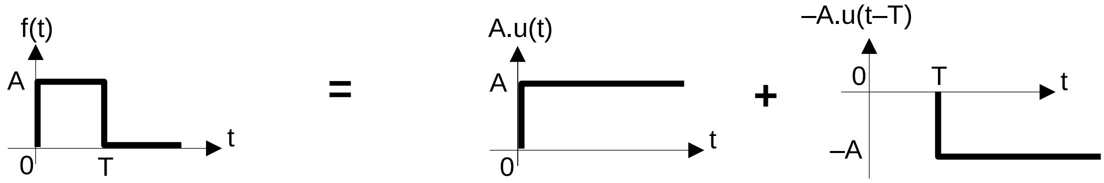
1.e) $\boxed{f(t) = 3(1-e^{-4t})}$

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t) \} = 3\left[\mathcal{L}\{ 1 \} - \mathcal{L}\{ e^{-4t} \}\right] = 3\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{12}{p(p+4)}$$

1.f) $\boxed{f(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}}$

$f(t)$ est, en fait, la somme algébrique de 2 échelons unitaires : le premier partant de t=0, le second partant de t=T, mais de signe négatif.



$$\Rightarrow f(t) = A\left[u(t) - u(t-T)\right]$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\{ f(t) \} = A\left[\mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t-T)\}\right]$$

$$\Rightarrow F(p) = A\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-Tp}\right]$$ car : $\mathcal{L}\{ g(t-T)\} = e^{-Tp}\ G(p)$ (pour t ≥ T)

$\Rightarrow \; F(p) = A\,\dfrac{1-e^{-Tp}}{p}$

1.g) $\boxed{f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}}$

Soit : $g(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(t) = e^{-\alpha t} \,.\, g(t)$

Or : $\mathcal{L}\{\, g(t)\} = G(p) = A\,\dfrac{1-e^{-Tp}}{p}$ (voir exercice 1.f)

$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t)\,\} = \mathcal{L}\{\, e^{-\alpha t} \,.\, g(t)\,\} = G(p+\alpha)$

$\Rightarrow \; F(p) = A\,\dfrac{1-e^{-T(p+\alpha)}}{p+\alpha}$

1.h) $\boxed{f(t) = e^{-0.5t}u(t-2)}$

$\mathcal{L}\{\, u(t-2)\,\} = \dfrac{e^{-2p}}{p}$ car : $\mathcal{L}\{\, g(t-T)\} = e^{-Tp}\,G(p)$ (pour t ≥ T)

$\Rightarrow \; F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t)\} = \dfrac{e^{-2(p+0.5)}}{p+0.5}$ car : $\mathcal{L}\{\, e^{-at} \,.\, g(t)\} = G(p+a)$

1.i) $\boxed{f(t) = \dfrac{t^2}{2}}$

<u>1ère méthode (d'après les tables de transformées de Laplace) :</u>

$F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t)\,\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2!}{p^{2+1}}\right] = \dfrac{1}{p^3}$ car : $\mathcal{L}\{\, t^n\,\} = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$ (voir exercice 1.c)

<u>2ème méthode (à partir de la définition de la transformée de Laplace) :</u>

$$F(p) = \mathcal{L}\{\, f(t)\,\} = \int_0^\infty e^{-pt}\, f(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}\,\frac{t^2}{2}dt$$

En utilisant l'intégration par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec : u = $\dfrac{t^2}{2}$ dv = e^{-pt}dt

du = t .dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow \; F(p) = \underbrace{-\frac{1}{2p}\left[t^2e^{-pt}\right]_0^\infty}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t^2\ vers\ \infty). \\ Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to 0}} + \frac{1}{p}\int_0^\infty te^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty te^{-pt}\,dt$$

En intégrant, de nouveau, par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

Avec : u = t dv = e^{-pt} dt

du = dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{p}\left[\underbrace{-\frac{1}{p}\left[te^{-pt}\right]_0^{\infty}}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t\ vers\ \infty). \\ Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to 0}} + \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-pt}\ dt\right] = \frac{1}{p^2}\int_0^{\infty} e^{-pt}\ dt = \frac{1}{p^3}\left[-e^{-pt}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{p^3}$$

1.j) $\boxed{\text{f(t)} = \sin(2t + \frac{\pi}{4})}$

<u>Rappel :</u>

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j.\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j.\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\omega t) = \dfrac{1}{2j}\left[e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right] \\ \cos(\omega t) = \dfrac{1}{2}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right] \end{cases}$$

Or : $\begin{cases} \mathcal{L}\{e^{j\omega t}\} = \dfrac{1}{p - j\omega} \\ \mathcal{L}\{e^{-j\omega t}\} = \dfrac{1}{p + j\omega} \end{cases}$ car : $\mathcal{L}\{\ e^{-at}\} = \dfrac{1}{p+a}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{1}{2j}\left[\dfrac{1}{p - j\omega} - \dfrac{1}{p + j\omega}\right] \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{p - j\omega} + \dfrac{1}{p + j\omega}\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \dfrac{p}{p^2 + \omega^2} \end{cases}$$

$$f(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{4}) = \sin(2t).\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4}).\cos(2t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sin(2t) + \cos(2t)]$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \mathcal{L}\{\text{f(t)}\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{L}\{\sin(2t)\} + \mathcal{L}\{\cos(2t)\}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2}{p^2+4} + \frac{p}{p^2+4}\right]$$

$$\Rightarrow\ F(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p+2}{p^2+4}$$

1.k) $\boxed{\text{f(t)} = e^{-0.5t}\sin(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)}$

On a : $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{e^{-0.5t}\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(p+0.5)^2+\omega^2} \qquad \text{car :} \quad \mathcal{L}\{e^{-at}.\ g(t)\} = G(p+a)$$

Et : $\cos(\omega t+\varphi) = \cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t+\varphi)\} = \cos(\varphi)\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} - \sin(\varphi)\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t+\varphi)\} = \cos(\varphi)\frac{p}{p^2+\omega^2} - \sin(\varphi)\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{p.\cos(\varphi)-\omega.\sin(\varphi)}{p^2+\omega^2}$$

Donc : $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{\omega}{(p+0.5)^2+\omega^2} + \dfrac{p.\cos(\varphi)-\omega.\sin(\varphi)}{p^2+\omega^2}$

1.l) $\boxed{\text{f(t)} = t.e^{-at}.\delta(t-1)}$ $\delta(t)$: impulsion de Dirac

$\mathcal{L}\{\ \delta(t)\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{\ \delta(t-1)\} = e^{-p.1}.1 = e^{-p}$ car : $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\ G(p)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ e^{-at}.\delta(t-1)\} = e^{-(p+a)}$ car : $\mathcal{L}\{\ e^{-at}.\ g(t)\} = G(p+a)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ t.e^{-at}.\delta(t-1)\} = e^{-(p+a)}$ car : $\mathcal{L}\{\ t.g(t)\} = -\dfrac{d}{dp}[G(p)]$

1.m) $\boxed{\text{f(t)} = t.u(t-2) + \sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3)}$ $u(t)$: échelon unitaire

Soit : $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ Avec : $f_1(t) = t.u(t-2)$ et $f_2(t) = \sin(2\pi t - \dfrac{\pi}{4}).u(t-3)$

$\mathcal{L}\{\ f(t)\} = \mathcal{L}\{\ f_1(t)\} + \mathcal{L}\{\ f_2(t)\}$

- Calculons en premier lieu : $\mathcal{L}\{\ f_1(t)\} = \mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\}$
  - <u>1ère méthode :</u> *utilisation de la propriété* $\mathcal{L}\{\ t.g(t)\} = -\dfrac{d}{dp}[G(p)]$

$\mathcal{L}\{\ u(t)\} = \dfrac{1}{p}$

$\mathcal{L}\{\ u(t-2)\} = \dfrac{1}{p}e^{-2p}$ car : $\mathcal{L}\{\ g(t-T)\} = e^{-Tp}\ G(p)$

$\mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = -\dfrac{(-2.e^{-2p}).p - 1.e^{-2p}}{p^2}$ car : $\mathcal{L}\{\ t.g(t)\} = -\dfrac{d}{dp}[G(p)]$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \dfrac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$

  - <u>2ème méthode :</u> *utilisation de la propriété* $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\ G(p)$

$\mathcal{L}\{\ t.u(t-2)\} = \mathcal{L}\{\ (t-2+2).u(t-2)\}$

$= \mathcal{L}\{\ (t-2).u(t-2)\} + 2\ .\ \mathcal{L}\{\ u(t-2)\}$

Or : $\mathcal{L}\{\ u(t)\} = \dfrac{1}{p} \Rightarrow \mathcal{L}\{\ u(t-2)\} = \dfrac{1}{p}e^{-2p}$ car : $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\ G(p)$

Et : $\mathcal{L}\{\, t\,\} = \mathcal{L}\{\, t.u(t)\} = \dfrac{1}{p^2}$ (fonction rampe)

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t-2\} = \mathcal{L}\{(t-2).u(t-2)\} = \frac{1}{p^2}e^{-2p}$$

Donc : $\mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \dfrac{1}{p^2}e^{-2p} + 2\dfrac{1}{p}e^{-2p}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

- <u>*3ème méthode :*</u> *utilisation de la définition de la transformée de Laplace*

$$\mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \int_0^\infty t.u(t-2).e^{-pt}dt$$

$$= \underbrace{\int_0^2 t.u(t-2).e^{-pt}dt}_{=0,\ car\ u(t-2)=0} + \underbrace{\int_2^\infty t.u(t-2).e^{-pt}dt}_{u(t-2)=1} = \int_2^\infty t.e^{-pt}dt$$

En intégrant par partie, on aura : $(uv)' = u'v + uv' \Rightarrow \int uv' = uv - \int u'v$

u = t dv = e^{-pt} dt

du = dt v = $\dfrac{e^{-pt}}{-p}$

$$\mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \underbrace{-\frac{1}{p}\left[te^{-pt}\right]_2^\infty}_{\substack{Tend\ vers\ 0,\ lorsque\ t\to\infty \\ (e^{-pt}\ tend\ plus\ vite\ vers\ 0 \\ que\ ne\ tend\ t\ vers\ \infty). \\ Différent\ de\ 0,\ lorsque\ t\to 2}} + \frac{1}{p}\int_2^\infty e^{-pt}\ dt = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p}\int_2^\infty e^{-pt}\ dt$$

$$\mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{1}{p^2}\left[-e^{-pt}\right]_2^\infty = \frac{2e^{-2p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\, t.u(t-2)\} = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}$$

- Calculons en second lieu : $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \mathcal{L}\{\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t-3)\}$

$$\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) = \left[\sin(2\pi t).\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4}).\cos(2\pi t)\right].u(t)$$

$$\sin(2\pi t - \frac{\pi}{4}).u(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin(2\pi t) - \cos(2\pi t)\right].u(t)$$

Or : $\begin{cases} \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \mathcal{L}\{\sin(\omega t).u(t)\} = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \mathcal{L}\{\cos(\omega t).u(t)\} = \dfrac{p}{p^2+\omega^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(2\pi t-\frac{\pi}{4}).u(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\mathcal{L}\{\sin(2\pi t).u(t)\}-\mathcal{L}\{\cos(2\pi t).u(t)\}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(2\pi t-\frac{\pi}{4}).u(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{2\pi}{p^2+4\pi^2}-\frac{p}{p^2+4\pi^2}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(2\pi t-\frac{\pi}{4}).u(t)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi-p}{p^2+4\pi^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{\sin(2\pi t-\frac{\pi}{4}).u(t-3)\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi-p}{p^2+4\pi^2}e^{-3p}$$ car : $\mathcal{L}\{g(t-T)\} = e^{-Tp}\,G(p)$

- Finalement : $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \mathcal{L}\{f_2(t)\}$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{(1+2p)e^{-2p}}{p^2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi-p}{p^2+4\pi^2}e^{-3p}$$

$$\Rightarrow F(p) = e^{-2p}\left[\frac{(1+2p)}{p^2}+\frac{e^{-p}}{\sqrt{2}}\frac{2\pi-p}{p^2+4\pi^2}\right]$$

Exercice n°2

Calcul des transformées inverses de Laplace :

2.a) $\boxed{F(p) = \dfrac{2}{p(p+1)(p-2)}}$

3 pôles réels (0 ; –1 ; 2) $\Rightarrow$ $F(p) = 2\left[\dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{p-2}\right]$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim\limits_{p\to 0}\left[\cancel{p}.\dfrac{1}{\cancel{p}(p+1)(p-2)}\right] = -\dfrac{1}{2} \\ B = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\dfrac{1}{p\cancel{(p+1)}(p-2)}\right] = \dfrac{1}{3} \\ C = \lim\limits_{p\to 2}\left[\cancel{(p-2)}.\dfrac{1}{p(p+1)\cancel{(p-2)}}\right] = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(p) = 2\left[\frac{-1/2}{p} + \frac{1/3}{p+1} + \frac{1/6}{p-2}\right]$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t}\right] \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = -1 + \frac{1}{3}\left(2e^{-t} + e^{2t}\right) \qquad t \geq 0$$

2.b) $\boxed{F(p) = \dfrac{p(p+2)}{p^2+2p+2}}$

Degré du numérateur ≥ Degré du dénominateur (n=m=2) $\Rightarrow$ Avant le développement en fractions partielles, il faut réécrire $F(p)$ en opérant une division euclidienne du numérateur par le dénominateur.

$$\frac{p^2+2p}{p^2+2p+2} = \frac{p^2+2p+2-2}{p^2+2p+2} = 1 - 2\underbrace{\frac{1}{p^2+2p+2}}_{F_1(p)}$$

$$F(p) = \frac{p^2+2p}{p^2+2p+2} = \frac{p^2+2p+2-2}{p^2+2p+2} = 1 - 2\underbrace{\frac{1}{p^2+2p+2}}_{F_1(p)}$$

$F(p) = 1 - 2.F_1(p) \quad \Rightarrow \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{1\} - 2.\mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\}$

$F_1(p)$ a 2 pôles complexes conjugués (–1 ± j)

$$\Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{p^2+2p+2} = \frac{1}{(p+1+j)(p+1-j)} = \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

or $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ et $\mathcal{L}\left\{e^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$

$$\Rightarrow f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = e^{-t}\sin(t) \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \delta(t) - 2e^{-t}\sin(t) \qquad t \geq 0$$

2.c) $\boxed{F(p) = \dfrac{2p^2+7p+8}{p^2+3p+2}}$

Degré du numérateur ≥ Degré du dénominateur (n=m=2) ⇒ division euclidienne

$$2p^2+7p+8 = 2\left(p^2+3p+2\right)+(p+4)$$

$$F(p) = 2+\frac{p+4}{p^2+3p+2} = 2+\underbrace{\frac{p+4}{(p+1)(p+2)}}_{F_1(p)}$$

$F_1(p)$ a 2 pôles réels (–1 ; –2) ⇒ $F_1(p)=\dfrac{A}{(p+1)}+\dfrac{B}{(p+2)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\dfrac{(p+4)}{\cancel{(p+1)}\,(p+2)}\right]=3 \\ B = \lim\limits_{p\to -2}\left[\cancel{(p+2)}.\dfrac{(p+4)}{(p+1)\cancel{(p+2)}}\right]=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F(p)=2+\frac{3}{(p+1)}-\frac{2}{(p+2)}$$

$$\Rightarrow \quad f(t)= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2\delta(t)+3e^{-t}-2e^{-2t} \quad t\ge 0$$

2.d) $\boxed{F(p) = \dfrac{5p+16}{(p+2)^2\,(p+5)}}$

1 pôle double (–2) et 1 pôle réel (–5) ⇒ $F(p)=\dfrac{A}{(p+2)^2}+\dfrac{B}{(p+2)}+\dfrac{C}{(p+5)}$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{p\to -2}\left[\dfrac{1}{0!}\left\{\cancel{(p+2)^2}.\dfrac{5p+16}{\cancel{(p+2)^2}\,(p+5)}\right\}\right]=2 \\ B = \lim\limits_{p\to -2}\left[\dfrac{1}{1!}\left\{\dfrac{d}{dp}\left(\cancel{(p+2)^2}.\dfrac{5p+16}{\cancel{(p+2)^2}\,(p+5)}\right)\right\}\right] = \lim\limits_{p\to -2}\left[\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{5p+16}{(p+5)}\right)\right] = \lim\limits_{p\to -2}\left[\dfrac{9}{(p+5)^2}\right]=1 \\ C = \lim\limits_{p\to -5}\left[\cancel{(p+5)}.\dfrac{5p+16}{(p+2)^2\,\cancel{(p+5)}}\right]=-1 \end{cases}$$

$$F(p) = 2\frac{1}{(p+2)^2}+\frac{1}{(p+2)}-\frac{1}{(p+5)}$$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{p^2}\right\}=t \;\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p+2)^2}\right\}=te^{-2t}$ car : $\mathcal{L}^{-1}\{G(p+a)\} = e^{-at}.\,g(t)$

$$\Rightarrow f(t)= \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2te^{-2t}+e^{-2t}-e^{-5t} \qquad t\ge 0$$

$$\Rightarrow f(t)= (2t+1)e^{-2t}-e^{-5t} \qquad t\ge 0$$

2.e) $\boxed{F(p) = \dfrac{2(p+2)}{p^2-2p+2}}$

$F(p)$ a 2 pôles complexes conjugués : (1 ± j)

$\Rightarrow \quad F(p) = \dfrac{2(p+2)}{(p-1+j)(p-1-j)} = 2\dfrac{p+2}{(p-1)^2+1^2} = 2\left[\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1^2} + 3\dfrac{1}{(p-1)^2+1^2}\right]$

or $\begin{cases} \mathcal{L}\left\{e^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \dfrac{\omega}{\left(p+a\right)^2+\omega^2} \\ \mathcal{L}\left\{e^{-at}\cos(\omega t)\right\} = \dfrac{p+a}{\left(p+a\right)^2+\omega^2} \end{cases}$

$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = 2\left[e^t\cos(t) + 3e^t\sin(t)\right] \qquad t \geq 0$

$\Rightarrow f(t) = 2e^t\left[\cos(t) + 3\sin(t)\right] \quad t \geq 0$

2.f) $\boxed{F(p) = \dfrac{5(p+2)}{p^2(p+1)(p+3)}}$

1 pôle double (0) et 2 pôles réels (–1 ; –3) $\qquad \Rightarrow F(p) = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{(p+1)} + \dfrac{D}{(p+3)}$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{p\to 0}\left[\dfrac{1}{0!}\left\{\cancel{p^2}.\dfrac{5(p+2)}{\cancel{p^2}(p+1)(p+3)}\right\}\right] = {}^{10}\!/_{3} \\ B = \lim\limits_{p\to 0}\left[\dfrac{1}{1!}\left\{\dfrac{d}{dp}\left(\cancel{p^2}.\dfrac{5(p+2)}{\cancel{p^2}(p+1)(p+3)}\right)\right\}\right] = \lim\limits_{p\to 0}\left[5\,\dfrac{(p+1)(p+3)-2(p+2)^2}{\left\{(p+1)(p+3)\right\}^2}\right] = -{}^{25}\!/_{9} \\ C = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\dfrac{5(p+2)}{p^2\cancel{(p+1)}(p+3)}\right] = {}^{5}\!/_{2} \\ D = \lim\limits_{p\to -3}\left[\cancel{(p+3)}.\dfrac{5(p+2)}{p^2(p+1)\cancel{(p+3)}}\right] = {}^{5}\!/_{18} \end{cases}$$

$F(p) = \dfrac{{}^{10}\!/_{3}}{p^2} - \dfrac{{}^{25}\!/_{9}}{p} + \dfrac{{}^{5}\!/_{2}}{(p+1)} + \dfrac{{}^{5}\!/_{18}}{(p+3)}$

$\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} \quad = \dfrac{10}{3}t - \dfrac{25}{9}u(t) + \dfrac{5}{2}e^{-t} + \dfrac{5}{18}e^{-3t} \quad t \geq 0$

$\Rightarrow f(t) = \dfrac{10}{3}t + \dfrac{5}{2}e^{-t} + \dfrac{5}{18}e^{-3t} - \dfrac{25}{9} \qquad t \geq 0$

Exercice n°3

Résolution d'équations différentielles en utilisant les transformées de Laplace :

3.a) $\boxed{\ddot{y}(t)+3y(t)=\sin(t) \qquad avec \quad y(0)=1;\ \dot{y}(0)=2}$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{p^2.Y(p)-p-2\right\}}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}=p^2.Y(p)-p.y(0)-\dot{y}(0)} + 3.\underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}\{y(t)\}} = \frac{1}{\underbrace{p^2+1}_{\mathcal{L}\{\sin(t)\}}}$$

$$\Rightarrow Y(p).\left(p^2+3\right) = p+2+\frac{1}{p^2+1} \qquad \Rightarrow Y(p)=\frac{p+2}{p^2+3}+\frac{1}{\left(p^2+3\right)\left(p^2+1\right)}$$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{p+2}{p^2+3}+\frac{1/2}{p^2+1}-\frac{1/2}{p^2+3} \qquad \Rightarrow Y(p)=\frac{p+3/2}{p^2+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1}$$

Or : $\dfrac{p+3/2}{p^2+3}=\dfrac{p}{p^2+3}+\dfrac{1}{2}\dfrac{3}{p^2+3}$

$$\Rightarrow Y(p)=\frac{p}{p^2+3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{p^2+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{p^2+1} \qquad \Rightarrow y(t)=\cos(\sqrt{3}t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\sqrt{3}t)+\frac{1}{2}\sin(t)$$

3.b) $\boxed{\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+20y(t)=4 \qquad avec \quad y(0)=-2;\ \dot{y}(0)=0}$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{p^2.Y(p)+2p-0\right\}}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}=p^2.Y(p)-p.y(0)-\dot{y}(0)} + 4.\underbrace{\left\{p.Y(p)+2\right\}}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}=p.Y(p)-y(0)} + 20.\underbrace{Y(p)}_{\mathcal{L}\{y(t)\}} = 4\ \frac{1}{\underbrace{p}_{\mathcal{L}\{u(t)\}}}$$

$$\Rightarrow Y(p).\left(p^2+4p+20\right)=\frac{4}{p}-2(p+4) \qquad \Rightarrow Y(p)=\frac{4}{p\left(p^2+4p+20\right)}-\frac{2(p+4)}{\left(p^2+4p+20\right)}$$

$$\Rightarrow Y(p)=\underbrace{\frac{4}{p\left[(p+2)^2+4^2\right]}}_{F(p)}-\frac{2(p+2)}{\left[(p+2)^2+4^2\right]}-\frac{4}{\left[(p+2)^2+4^2\right]}$$

Réécrivons d'abord $F(p)$:

$$F(p)=\frac{4}{p\left[(p+2)^2+4^2\right]}=\frac{A}{p}+\frac{(Bp+C)}{\left[(p+2)^2+4^2\right]} \qquad \begin{cases}1 \text{ pôle réel : } (0)\\ 2 \text{ pôles complexes conjugés : } (-2\pm 4\mathrm{j})\end{cases}$$

- *1ère méthode :*

$$A(p^2+4p+20)+Bp^2+Cp=4 \qquad \Rightarrow \begin{cases}A+B=0\\4A+C=0\\20A=4\end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases}A=1/5\\B=-1/5\\C=-4/5\end{cases}$$

- *2ème méthode :*

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim\limits_{p\to 0}\left[\cancel{p}.\dfrac{4}{\cancel{p}\left(p^2+4p+20\right)}\right] = 1/5 \\ \lim\limits_{p\to -2+4j}(Bp+C) = \lim\limits_{p\to -2+4j}\left[\cancel{\left(p^2+4p+20\right)}.\dfrac{4}{p\cancel{\left(p^2+4p+20\right)}}\right] = \lim\limits_{p\to -2+4j}\left[\dfrac{4}{p}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B(-2+4j)+C = \dfrac{4}{-2+4j} = \dfrac{4(-2-4j)}{(-2+4j)(-2-4j)} = \dfrac{1}{5}(-2-4j) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ 5(-2B+C) = -2 \\ 5(4jB) = -4j \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B = -1/5 \\ C = -4/5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{5p} - \frac{(p+4)}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{(p+4)}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]} - \frac{2(p+2)}{\left[(p+2)^2+4^2\right]} - \frac{4}{\left[(p+2)^2+4^2\right]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{(p+4)}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]} - \frac{10(p+2)}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]} - \frac{20}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{11(p+2)}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]} - \frac{22}{5\left[(p+2)^2+4^2\right]}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{1}{5p} - \frac{11}{5}\frac{(p+2)}{\left[(p+2)^2+4^2\right]} - \frac{11}{10}\frac{4}{\left[(p+2)^2+4^2\right]}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5} - \frac{11}{5}e^{-2t}\cos(4t) - \frac{11}{10}e^{-2t}\sin(4t)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{5} - \left(\frac{11}{5}\cos(4t) + \frac{11}{10}\sin(4t)\right)e^{-2t}$$

3.c) $\boxed{\dfrac{d^3y(t)}{dt^3} + 5\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\dfrac{dy(t)}{dt} = 0 \qquad avec \quad y(0)=3;\ \dot{y}(0)=-2;\ \ddot{y}(0)=7}$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{p^3.Y(p)-3p^2+2p-7\right\}}_{\mathcal{L}\{\dddot{y}(t)\}=p^3.Y(p)-p^2.y(0)-p.\dot{y}(0)-\ddot{y}(0)} + 5.\underbrace{\left\{p^2.Y(p)-3p+2\right\}}_{\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}=p^2.Y(p)-p.y(0)-\dot{y}(0)} + 6.\underbrace{\left\{p.Y(p)-3\right\}}_{\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}=p.Y(p)-y(0)} = 0$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{3p^2+13p+15}{p\left(p^2+5p+6\right)} = \frac{3p^2+13p+15}{p(p+2)(p+3)} \qquad \{3 \text{ pôles réels : } (0;-2;-3)$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+2)} + \frac{C}{(p+3)}$$

$$\begin{cases} A = \lim\limits_{p \to 0} \left[\cancel{p} . \dfrac{3p^2 + 13p + 15}{\cancel{p}(p+2)(p+3)} \right] = \dfrac{5}{2} \\ B = \lim\limits_{p \to -2} \left[\cancel{(p+2)} . \dfrac{3p^2 + 13p + 15}{p\,\cancel{(p+2)}\,(p+3)} \right] = -\dfrac{1}{2} \\ C = \lim\limits_{p \to -3} \left[\cancel{(p+3)} . \dfrac{3p^2 + 13p + 15}{p\,(p+2)\,\cancel{(p+3)}} \right] = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(p) = \frac{5}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)} + \frac{1}{(p+3)}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t}$$

Exercice n°4

En utilisant les théorèmes des valeurs initiale et finale, calculez les valeurs du signal de sortie $s(t \to 0^+)$ et $s(t \to \infty)$ pour les fonctions suivantes :

4.a) $\boxed{S(p) = \dfrac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p}}$

- *Calcul de* $s(0^+)$ *:*

$$\lim_{t\to 0^+} s(t) = \lim_{p\to\infty} p.S(p) = \lim_{p\to\infty} p.\frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p} = 1$$

- *Calcul de* $s(t \to \infty)$ *:*

Avant de calculer $s(t \to \infty)$, il faudrait vérifier que les conditions nécessaires à cela soient valides :

$$p.S(p) = p.\frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p} = p.\frac{p^2+2p+4}{p\,(p+1)(p+2)}$$

$p.S(p)$ a 3 pôles (0 ; –1 ; –2) placés dans le demi-plan gauche du plan complexe. Donc aucun pôle sur l'axe imaginaire (à l'exception du pôle à l'origine), et aucun pôle dans le demi-plan droit. Dans ce cas, on peut calculer $s(t \to \infty)$:

$$\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p.S(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p} = 2$$

Pour vérifier les calculs, on peut déterminer $s(t)$ à partir de $S(p)$ en utilisant la transformée inverse de Laplace, puis calculer $s(t \to 0^+)$ et $s(t \to \infty)$:

$$S(p) = \frac{p^2+2p+4}{p\,(p+1)(p+2)}$$

$S(p)$ a 3 pôles réels (0 ; –1 ; –2) $\quad\Rightarrow\quad S(p) = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+1} + \dfrac{C}{p+2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \lim\limits_{p\to 0}\left[\cancel{p}.\dfrac{p^2+2p+4}{\cancel{p}\,(p+1)(p+2)}\right] = 2 \\ B = \lim\limits_{p\to -1}\left[\cancel{(p+1)}.\dfrac{p^2+2p+4}{p\,\cancel{(p+1)}\,(p+2)}\right] = -3 \\ C = \lim\limits_{p\to -2}\left[\cancel{(p+2)}.\dfrac{p^2+2p+4}{p\,(p+1)\,\cancel{(p+2)}}\right] = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow S(p) = 2\frac{1}{p} - 3\frac{1}{p+1} + 2\frac{1}{p+2}$$

$$\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{S(p)\right\} = 2 - 3e^{-t} + 2e^{-2t} \quad t \geq 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} s(t) = 1 \\ \lim\limits_{t\to\infty} s(t) = 2 \end{cases}$$

4.b) $\boxed{S(p) = \dfrac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p}}$

- *Calcul de $s(0^+)$:*

$$\lim_{t \to 0^+} s(t) = \lim_{p \to \infty} p.S(p) = \lim_{p \to \infty} p.\frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = \infty$$

- *Calcul de $s(t \to \infty)$:*

Avant de calculer $s(t \to \infty)$, il faudrait vérifier que les conditions nécessaires à cela soient valides

$$p.S(p) = p.\frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = p.\frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p\left(p^2 + 4\right)} = p.\frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p(p + 2j)(p - 2j)}$$

Mis à part le pôle à l'origine (0), $p.S(p)$ a également 2 pôles sur l'axe imaginaire (–2j ; +2j). La condition de calcul de $s(\infty)$ n'est pas satisfaite. Dans ce cas, on ne peut pas calculer $s(t \to \infty)$.

Pour vérifier les calculs, on peut déterminer $s(t)$ à partir de $S(p)$ en utilisant la transformée inverse de Laplace, puis essayer de calculer $s(t \to 0^+)$ et $s(t \to \infty)$:

$$S(p) = \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = 1 + \frac{2p^2 + 2p + 8}{p\left(p^2 + 4\right)} = 1 + 2\frac{p^2 + p + 4}{p(p + 2j)(p - 2j)}$$

$$S(p) = 1 + 2\left[\frac{A}{p} + \frac{(Bp + C)}{[(p + 2j)(p - 2j)]}\right] \qquad \begin{cases} 1 \text{ pôle réel : } (0) \\ 2 \text{ pôles complexes conjugés : } (\pm 2\text{j}) \end{cases}$$

- *<u>1ère méthode :</u>*

$$A(p^2 + 4) + Bp^2 + Cp = p^2 + p + 4 \qquad \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ C = 1 \\ 4A = 4 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

- *<u>2ème méthode :</u>*

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \displaystyle\lim_{p \to 0}\left[\cancel{p}.\frac{p^2 + p + 4}{\cancel{p}\left(p^2 + 4\right)}\right] = 1 \\ \displaystyle\lim_{p \to 2j}(Bp + C) = \lim_{p \to 2j}\left[\cancel{\left(p^2 + 4\right)}.\frac{p^2 + p + 4}{p\cancel{\left(p^2 + 4\right)}}\right] = \frac{-4 + 2j + 4}{2j} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B(2j) + C = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ \text{B} = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(p) = 1 + 2\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2+4}\right] = 1 + \frac{2}{p} + \frac{2}{p^2+4}$$

$$\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{S(p)\right\} = \delta(t) + 2 + \sin(2t) \qquad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} s(t) = \infty + 2 + 0 = \infty \; (\grave{a} \;\; cause \;\; de \;\; l'impulsion) \\ \lim\limits_{t\to \infty} s(t) = 0 + 2 + ? = ? \qquad (\grave{a} \;\; cause \;\; du \;\; sinus \;\; qui \;\; varie \;\; continuellement) \end{cases}$$

Table des Principales Transformées de Laplace et leurs propriétés

Table des Transformées de Laplace

f (t) (t ñ 0)	F (p) = $\mathcal{L}$ { f(t) }
Impulsion unitaire $\delta(t)$	1
Echelon unitaire $u(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$t.sin(\omega t)$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t.cos(\omega t)$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$e^{-at}.sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}.cos(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

(n : entier positif)

Propriétés des Transformées de Laplace

f (t) (t ñ 0)	F (p) = $\mathcal{L}$ { f(t) }
$f(t)$	$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$
$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)$	$\lambda_1 F_1(p) + \lambda_2 F_2(p)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p) - f(0)$
$\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$p^2 F(p) - pf(0) - \dot{f}(0)$
$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n\text{-}r} . \frac{d^{(r\text{-}n\text{-}1)} f(0)}{dt^{(r\text{-}n\text{-}1)}}$
$\int_0^t \int_0^t .....\int_0^t f(t).dt^n$ (avec conditions initiales nulles)	$\frac{F(p)}{p^n}$
$f(kt)$	$\frac{1}{k}.F\left(\frac{p}{k}\right)$
$f(\frac{t}{k})$	$k.F(kp)$
$e^{-at} f(t)$	$F(p+a)$
$f(t-\tau)$ pour $(t \geq \tau)$	$e^{-p\tau}.F(p)$
$\int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau)d\tau$	$F_1(p).F_2(p)$
$t.f(t)$	$-\frac{d}{dp}F(p)$

- $f(t)$ fonction périodique de période T.
- $f_1(t)$ fonction définie sur la 1ère période de $f(t)$.

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1-e^{-pT}}$$

$$f(0^+) = \lim_{p\to\infty} \{pF(p)\} \qquad f(\infty) = \lim_{p\to 0} \{pF(p)\}$$

Si les limites existent