

Exercice n°1

Pour chacune des fonctions de Transfert en **Boucle Ouverte** suivantes :

- Tracer les diagrammes de Bode (*asymptotes pour le gain*), et calculer la pulsation de coupure ω_{co} (pulsation correspondant au gain unitaire) et la phase correspondante $\varphi(\omega_{co})$.
- Tracer, approximativement, les lieux de Nyquist et de Black (ou Black-Nichols) pour chaque fonction en vous aidant des diagrammes asymptotiques de Bode obtenus précédemment.

$$\text{a) } G(p) = \frac{K}{p}$$

$$\text{b) } G(p) = Kp$$

$$\text{c) } G(p) = \frac{4}{1 + \frac{p}{2}}$$

$$\text{d) } G(p) = \frac{8}{1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

$$\text{e) } G(p) = \frac{16}{p(1 + 4p)}$$

$$\text{f) } G(p) = \frac{0.25(4 + p)}{(0.5 + p)(0.125 + p)}$$

$$\text{g) } G(p) = \frac{100(1 + p)}{p(1 + \frac{p}{10})(1 + 100p)}$$

$$\text{h) } G(p) = \frac{K}{p^2(1 + \frac{p}{8})}$$

$$\text{i) } G(p) = \frac{8(1 + 4p)}{(1 + p)(1 + \frac{1}{8}p)(1 + \frac{1}{32}p + \frac{1}{32^2}p^2)}$$

$$\text{j) } G(p) = \frac{4}{1 - \frac{p}{2}}$$

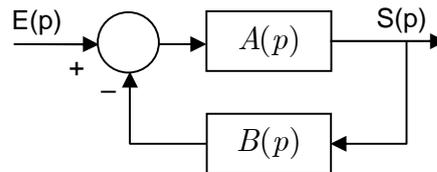
$$\text{k) } G(p) = \frac{32(2 - p)}{16 + 65p + 4p^2}$$

Exercice n°1

Traçons les diagrammes de Bode et les Lieux de Nyquist et de Black (ou Black-Nichols) pour chacune des Fonctions de Transfert suivantes, en considérant que c'est la Fonction de Transfert en **Boucle Ouverte**. Nous considérerons toujours le cas de la FTBO car, nous verrons dans le chapitre suivant, relatif à la stabilité des systèmes asservis linéaires, que la stabilité en Boucle Fermée est toujours déterminée à partir de la Boucle Ouverte.

Dans ce qui suit, $G(p)$ désigne toujours la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte :

$$G(p) = FTBO(p) = A(p).B(p)$$



a) $G(p) = \frac{K}{p}$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

Calculons le module et la phase de $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = -j \frac{K}{\omega} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{K}{\omega} & \Rightarrow \log |G(j\omega)| = \log(K) - \log(\omega) \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \left[-j \frac{K}{\omega} \right] = -\arctg\left(\frac{K/\omega}{0}\right) = -\arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

✓ Le $\log(\text{module})$ est donc une droite de pente (-1) en fonction de $\log(\omega)$.

✓ La phase est constante et égale $-\frac{\pi}{2}$.

Donc :

$$\omega_{co} = K \text{ rd/s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -\frac{\pi}{2}$$

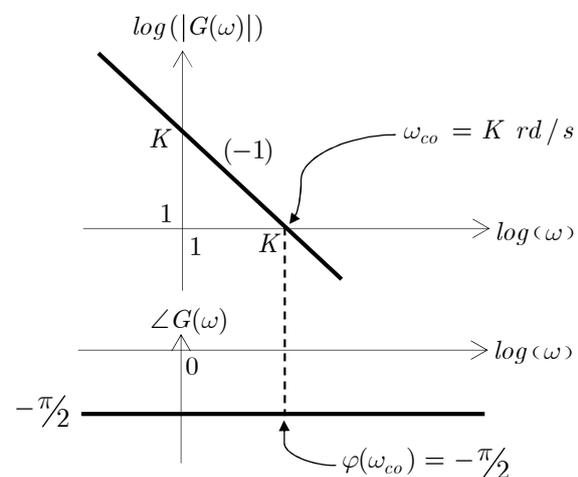
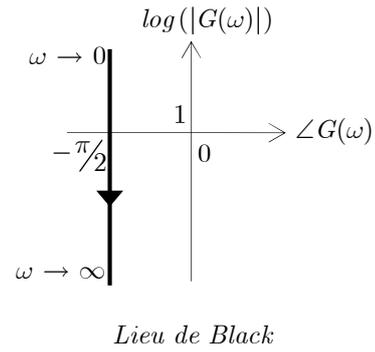
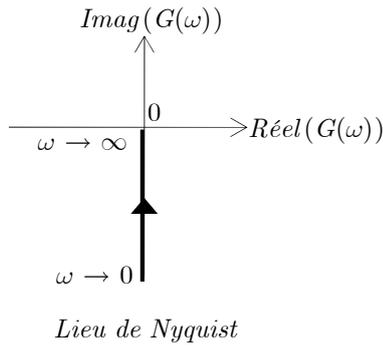


Diagramme asymptotique de Bode

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



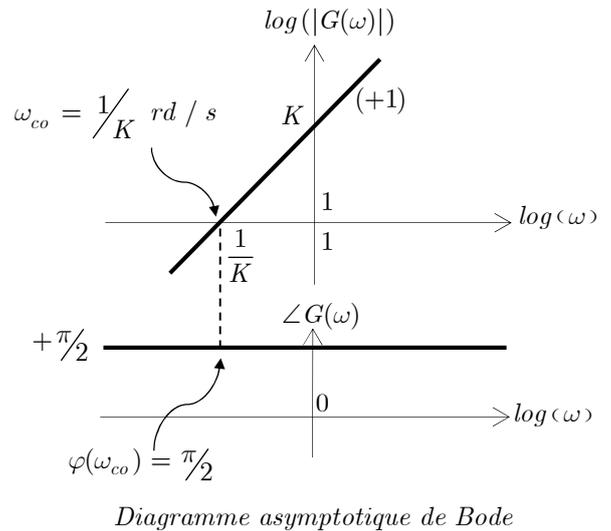
b) $G(p) = Kp$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

Calculons le module et la phase de $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = jK\omega \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = K\omega & \Rightarrow \log |G(j\omega)| = \log(K) + \log(\omega) \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \angle jK\omega = \arctg\left(\frac{K\omega}{0}\right) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- ✓ Le \log (module) est donc une droite de pente (+1) en fonction de $\log(\omega)$.
- ✓ La phase est constante et égale $\frac{\pi}{2}$.

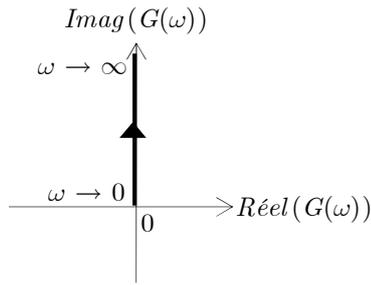


Donc :

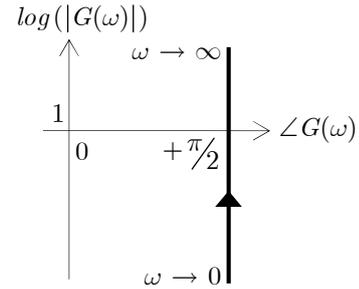
$$\omega_{co} = \frac{1}{K} \text{ rd / s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = \frac{\pi}{2}$$

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



Lieu de Nyquist



Lieu de Black

c) $G(p) = \frac{4}{1 + \frac{p}{2}}$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

Calculons le module et la phase de $G(j\omega)$: $G(p) = \frac{4}{1 + \frac{p}{2}} = \frac{K}{1 + Tp}$ avec $\begin{cases} K = 4 \\ T = \frac{1}{2} \end{cases}$

$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T) \end{cases}$ (voir polycopié de cours)

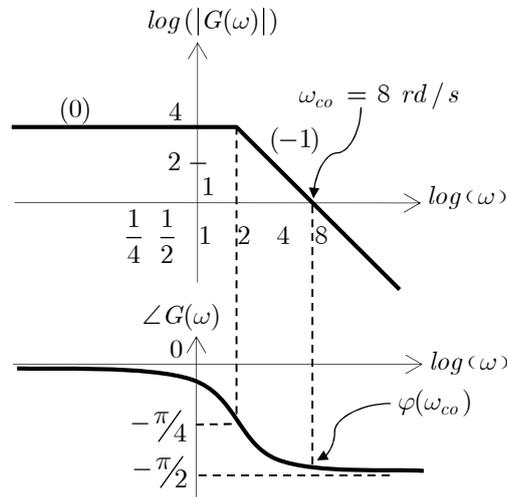


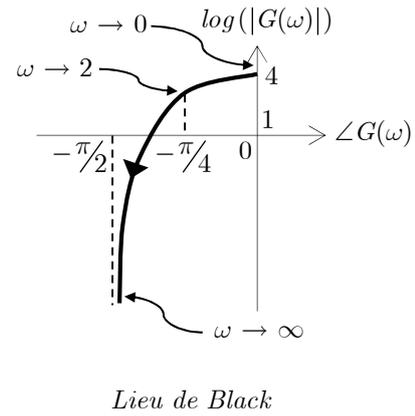
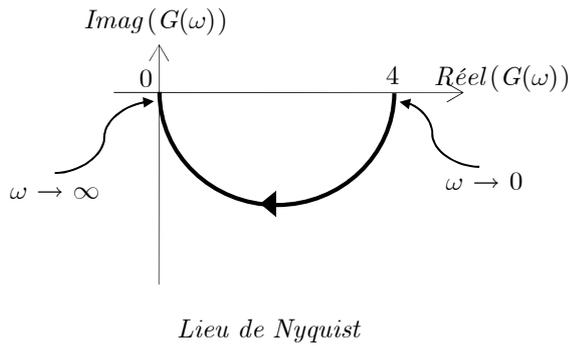
Diagramme asymptotique de Bode

D'après le diagramme :

$\omega_{co} = 8 \text{ rd/s}$

$\varphi(\omega_{co}) = -\arctg(\omega_{co}T) = -\arctg(8 \times \frac{1}{2}) \simeq -76^\circ$

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



d)
$$G(p) = \frac{8}{1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

$$G(p) = \frac{8}{1 + \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}} = \frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 8 \\ \omega_n = 2 \text{ rd/s} \\ \xi = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xi < 1$ (régime oscillatoire amorti, pôles complexes conjugués)

Calculons le module et la phase de $G(j\omega)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right]^2}} \\ |G(j\omega)| = \varphi(\omega) = -\arctg \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{voir polyco pié de cours})$$

D'après le diagramme :

$$\log(\omega_{co}) = \frac{\log(4) + \log(8)}{2} \Rightarrow \omega_{co} = 4\sqrt{2} \text{ rd/s}$$

Ou encore :

$$(\omega_{co}) \in \text{pente}(-2) \Rightarrow -2 = \frac{\log(8) - \log(1)}{\log(2) - \log(\omega_{co})} \Rightarrow \omega_{co} = 4\sqrt{2} \text{ rd/s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -\arctg \left(\frac{2\xi \frac{\omega_{co}}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_{co}}{\omega_n}\right)^2} \right) = -\arctg \left(\frac{2 \frac{1}{2} \frac{4\sqrt{2}}{2}}{1 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2} \right) \simeq \underline{-158^\circ}$$

faire attention à cette valeur

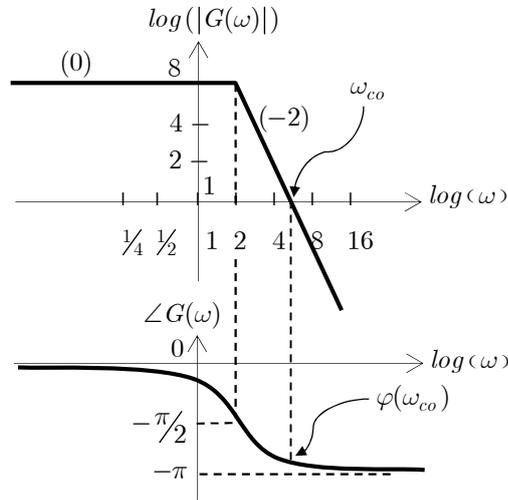
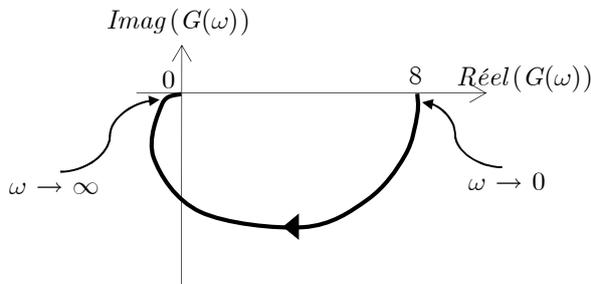
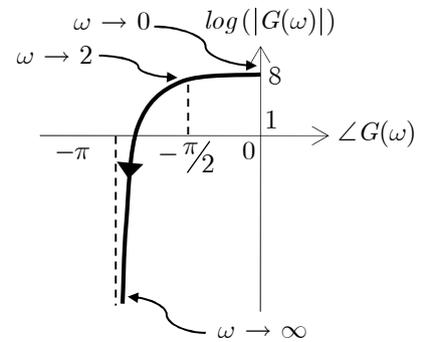


Diagramme asymptotique de Bode

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



Lieu de Nyquist



Lieu de Black

$$e) G(p) = \frac{16}{p(1+4p)}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

$$G(p) = \frac{16}{p(1+4p)} = \frac{16}{p} \frac{1}{1+4p} \Rightarrow \begin{cases} 1 \text{ intégrateur} \\ 1 \text{ système de } 1^{\text{er}} \text{ ordre} \end{cases}$$

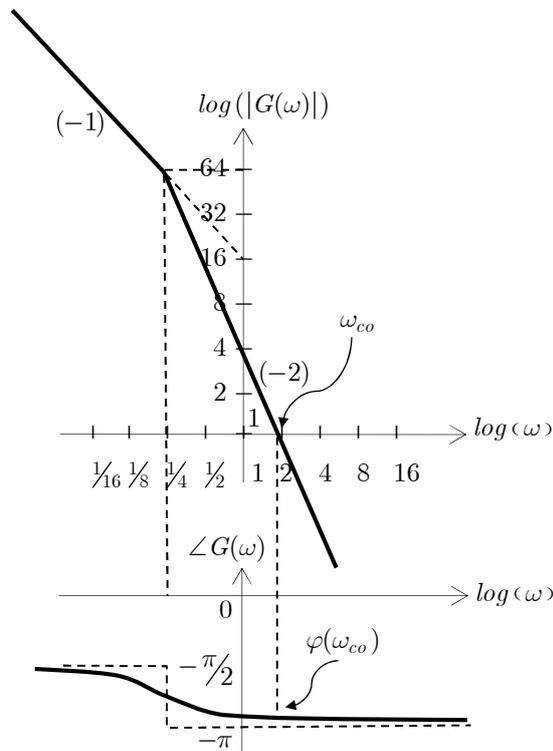


Diagramme asymptotique de Bode

D'après le diagramme :

$$\omega_{co} = 2 \text{ rd/s}$$

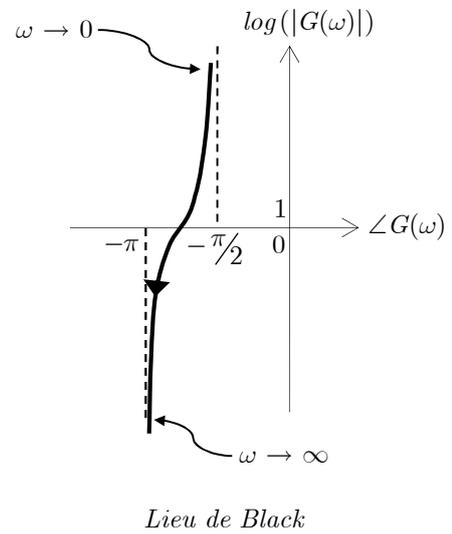
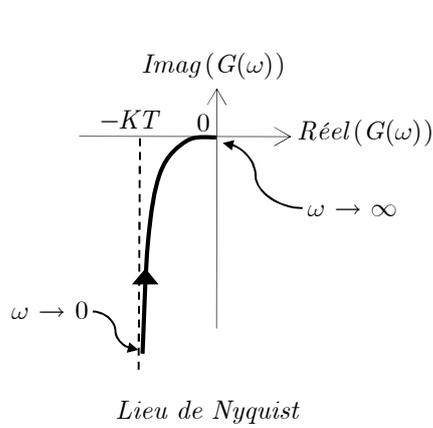
$$\varphi(\omega_{co}) = -90^\circ - \text{arctg}(\omega_{co}T) = -90^\circ - \text{arctg}(2 \times 4) \simeq -173^\circ$$

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols

$$G(p) = \frac{16}{p(1+4p)} = \frac{K}{p(1+Tp)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 16 \\ T = 4 \end{cases}$$

Le tracé du Lieu de Nyquist à partir du diagramme de Bode est, généralement, suffisant. Mais, en présence d'intégrateurs (comme pour cet exemple), il faut s'assurer du tracé du lieu au voisinage de $\omega = 0$, en calculant les parties imaginaire et réel de $G(j\omega)$ et les faire tendre vers zéro. En présence de dérivateurs, le lieu est à vérifier au voisinage de $\omega \rightarrow \infty$, en les faisant tendre vers l'infini.

$$\Rightarrow G(j\omega) = \frac{K}{1 + (\omega T)^2} \left(-T - j \frac{1}{\omega} \right) \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Réel}[G(j\omega)] = -KT \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Imag}[G(j\omega)] = -\infty \end{cases}$$



f) $G(p) = \frac{0.25(4 + p)}{(0.5 + p)(0.125 + p)}$

$$G(p) = \frac{0.25(4 + p)}{(0.5 + p)(0.125 + p)} = \frac{0.25 \times 4 \times (1 + \frac{1}{4} p)}{0.5 \times (1 + \frac{1}{0.5} p) \times 0.125 \times (1 + \frac{1}{0.125} p)} = \frac{16(1 + \frac{1}{4} p)}{(1 + 2p)(1 + 8p)}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

$$G(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} K = 16 \\ T_1 = \frac{1}{4} \text{ s} \Rightarrow \omega_1 = 4 \text{ rd/s} \\ T_2 = 2 \text{ s} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2} \text{ rd/s} \\ T_3 = 8 \text{ s} \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{8} \text{ rd/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_3 < \omega_2 < \omega_1$$

D'après le diagramme :

$$\omega_{co} = 1 \text{ rd/s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -\text{arctg}(\omega_{co} T_3) - \text{arctg}(\omega_{co} T_2) + \text{arctg}(\omega_{co} T_1)$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -\text{arctg}(1 \times 8) - \text{arctg}(1 \times 2) + \text{arctg}(1 \times \frac{1}{4}) \simeq -132^\circ$$

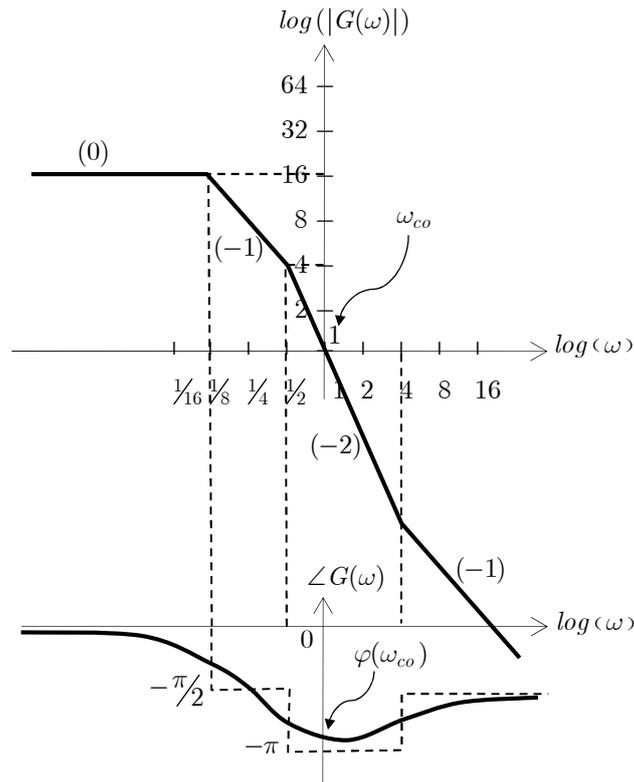
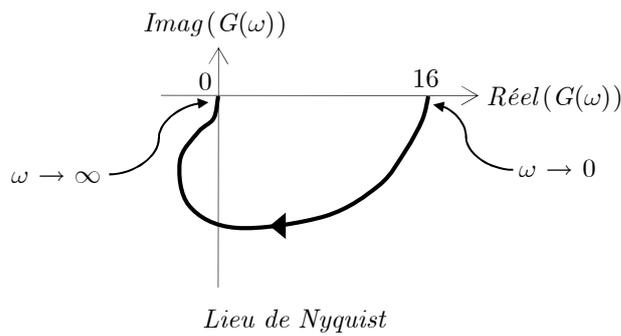
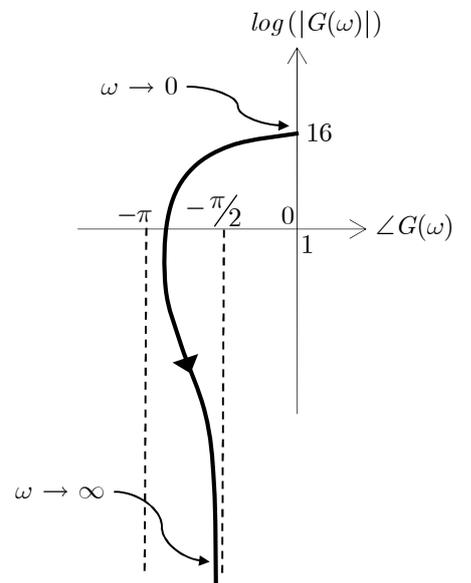


Diagramme asymptotique de Bode

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



Lieu de Nyquist



Lieu de Black

g)
$$G(p) = \frac{100(1 + p)}{p(1 + \frac{p}{10})(1 + 100p)}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

$$G(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} \text{ avec } \left. \begin{array}{l} K = 100 \\ T_1 = 1 \text{ s} \Rightarrow \omega_1 = 1 \text{ rd/s} \\ T_2 = \frac{1}{10} \text{ s} \Rightarrow \omega_2 = 10 \text{ rd/s} \\ T_3 = 100 \text{ s} \Rightarrow \omega_3 = \frac{1}{100} \text{ rd/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_3 < \omega_1 < \omega_2$$

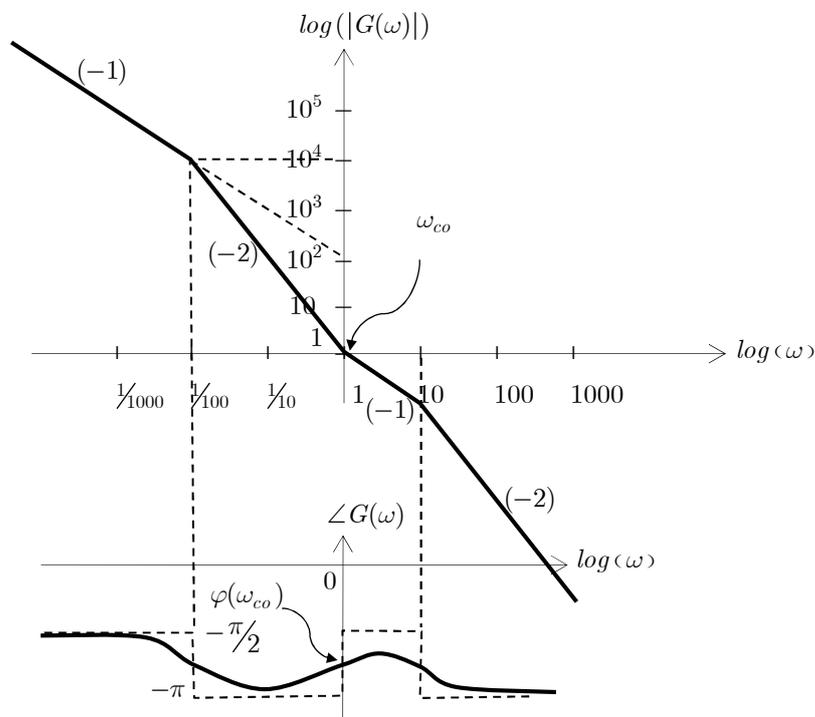


Diagramme asymptotique de Bode

D'après le diagramme :

$$\omega_{co} = 1 \text{ rd/s}$$

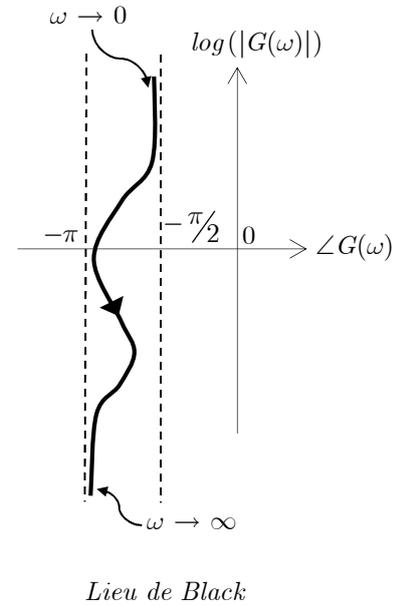
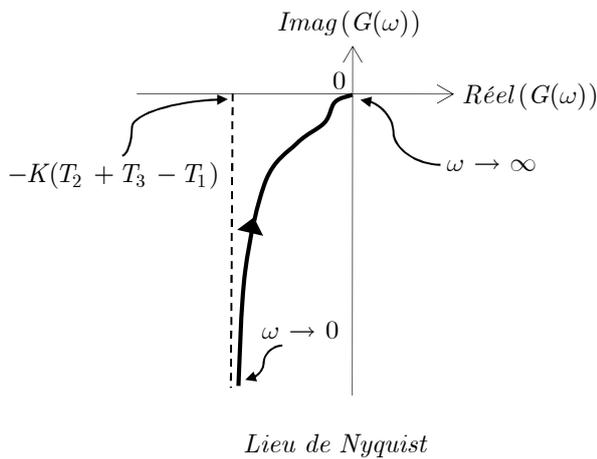
$$\varphi(\omega_{co}) = -90^\circ - \text{arctg}(\omega_{co} T_3) + \text{arctg}(\omega_{co} T_1) - \text{arctg}(\omega_{co} T_2)$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -90^\circ - \text{arctg}(1 \times 100) + \text{arctg}(1 \times 1) - \text{arctg}(1 \times \frac{1}{10}) \simeq -140^\circ$$

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols

Pour le lieu de Nyquist, il faut vérifier le tracé au voisinage de $\omega = 0$, en calculant les parties imaginaire et réel de $G(j\omega)$ et les faire tendre vers zéro.

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Réel}[G(j\omega)] = -K(T_2 + T_3 - T_1) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Imag}[G(j\omega)] = -\infty \end{cases}$$



h) $G(p) = \frac{K}{p^2(1 + \frac{p}{8})}$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

Selon la valeur de K , ω_{co} peut appartenir à la pente (-2) ou à la pente (-3) :

- ✓ Si $K = 64$, $\omega_{co} \in \{\text{pente } (-2) \text{ et à la pente } (-3)\}$.
- ✓ Si $K > 64$, $\omega_{co} \in \text{pente } (-3)$.
- ✓ Si $K < 64$, $\omega_{co} \in \text{pente } (-2)$.

Donc :

- ✓ Si $K = 64$, $\omega_{co} = 8 \text{ rd / s}$.
- ✓ Si $K > 64$,

$$(w_{co}) \in \text{pente } (-3) \Rightarrow \begin{cases} -3 = \frac{\log(y) - \log(1)}{\log(8) - \log(w_{co})} \\ -2 = \frac{\log(K) - \log(y)}{\log(1) - \log(8)} \end{cases} \Rightarrow w_{co} = 2\sqrt[3]{K} \text{ rd / s}$$

- ✓ Si $K < 64$,

$$(w_{co}) \in \text{pente } (-2) \Rightarrow -2 = \frac{\log(K) - \log(1)}{\log(1) - \log(w_{co})} \Rightarrow w_{co} = \sqrt{K} \text{ rd / s}$$

$\varphi(\omega_{co})$ ne dépend pas de K , mais dépend de la valeur de ω_{co} :

$$\varphi(\omega_{co}) = -180^\circ - \arctg\left(\omega_{co} \times \frac{1}{8}\right)$$

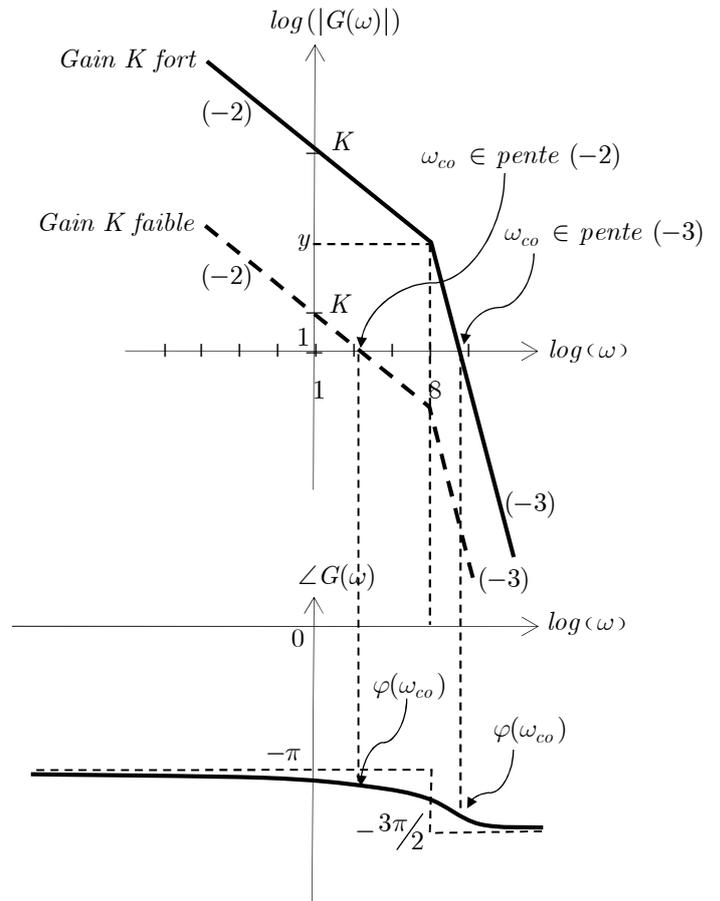
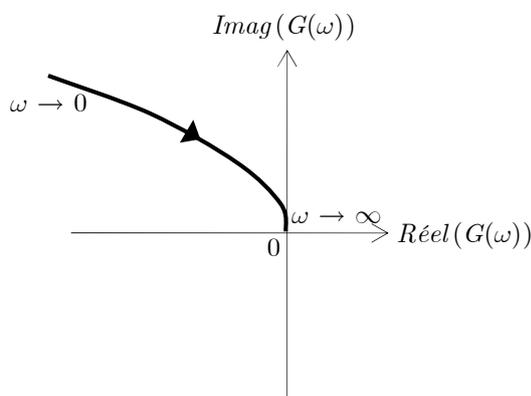


Diagramme asymptotique de Bode

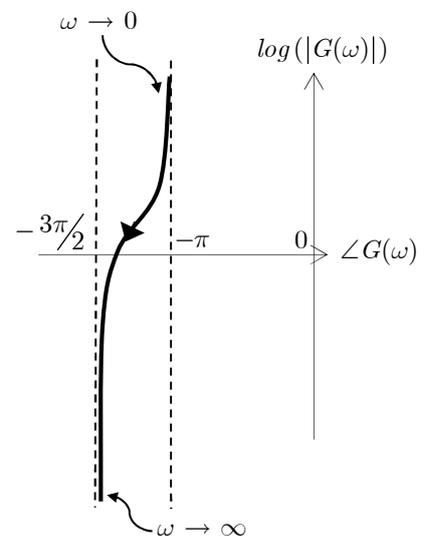
- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols

Pour le lieu de Nyquist, il faut vérifier le tracé au voisinage de $\omega = 0$, en calculant les parties imaginaire et réel de $G(j\omega)$ et les faire tendre vers zéro.

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Réal}[G(j\omega)] = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Imag}[G(j\omega)] = +\infty \end{cases}$$



Lieu de Nyquist



Lieu de Black

$$i) G(p) = \frac{8(1 + 4p)}{(1 + p)(1 + \frac{1}{8}p)(1 + \frac{1}{32}p + \frac{1}{32^2}p^2)}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{32}p + \frac{1}{32^2}p^2} = \frac{1}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2} \text{ avec } \begin{cases} \omega_n = 32 \text{ rd/s} \\ \xi = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\xi < 1$ (régime oscillatoire amorti, pôles complexes conjugués)

$$G(p) = \frac{K(1 + T_1p)}{(1 + T_2p)(1 + T_3p)\left(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n}p + \frac{1}{\omega_n^2}p^2\right)} \text{ avec } \begin{cases} K = 8 \\ T_1 = 4 \text{ s} \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{4} \text{ rd/s} \\ T_2 = 1 \text{ s} \Rightarrow \omega_2 = 1 \text{ rd/s} \\ T_3 = \frac{1}{8} \text{ s} \Rightarrow \omega_3 = 8 \text{ rd/s} \\ \xi = 0.5 \quad \omega_n = 32 \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_n$$

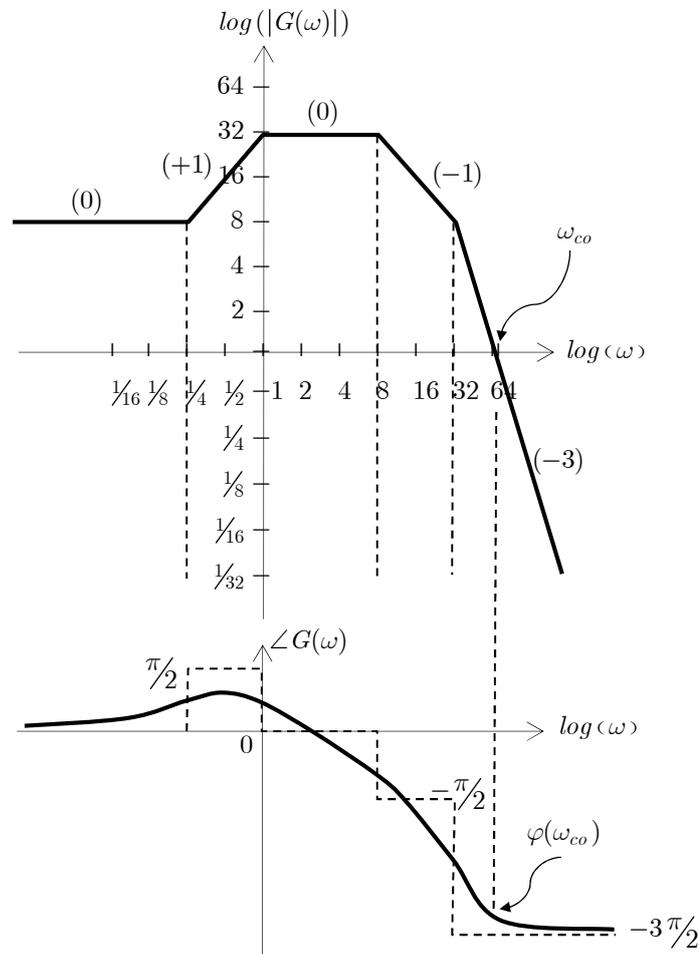


Diagramme asymptotique de Bode

D'après le diagramme :

$$w_{co} = 64 \text{ rd} / \text{s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = \text{arctg}(\omega_{co}T_1) - \text{arctg}(\omega_{co}T_2) - \text{arctg}(\omega_{co}T_3) - \text{arctg}\left(\frac{2\xi \frac{\omega_{co}}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_{co}}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

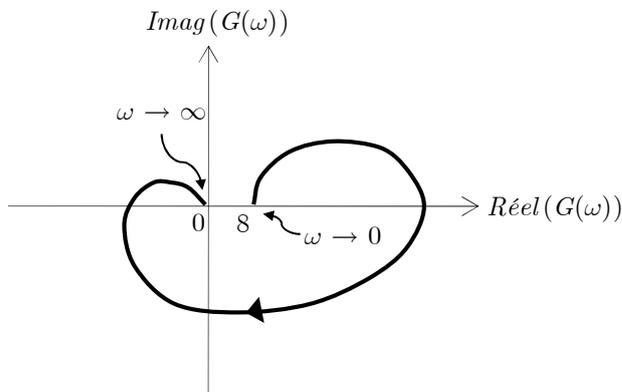
$$\varphi(\omega_{co}) = \text{arctg}(64 \times 4) - \text{arctg}(64 \times 1) - \text{arctg}\left(64 \times \frac{1}{8}\right) - \text{arctg}\left(\frac{2 \frac{1}{2} \frac{64}{32}}{1 - \left(\frac{64}{32}\right)^2}\right)$$

$$\varphi(\omega_{co}) = 89.78^\circ - 89.11^\circ - 82.87^\circ - \underline{146.31^\circ}$$

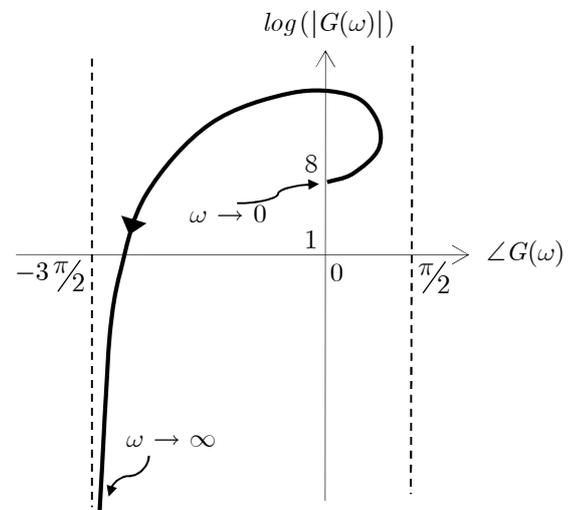
*faire attention
à cette valeur*

$$\varphi(\omega_{co}) \simeq -228.51^\circ$$

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



Lieu de Nyquist



Lieu de Black

$$j) G(p) = \frac{4}{1 - \frac{p}{2}}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

Calculons le module et la phase de $G(j\omega)$: $G(p) = \frac{4}{1 - \frac{p}{2}} = \frac{K}{1 - Tp}$ avec $\begin{cases} K = 4 \\ T = \frac{1}{2} \end{cases}$

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - j\omega T} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega T) \end{cases}$$

Car :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 - j\omega T} = \frac{K}{1 + j\omega T} \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \quad \text{avec } \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \text{ est appelé terme " déphaseur pur "}$$

$G(j\omega)$ est appelé système à déphasage non minimal

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \left| \frac{K}{1 + j\omega T} \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right| = \left| \frac{K}{1 + j\omega T} \right| \times \left| \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right| \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \left| \frac{K}{1 + j\omega T} \right| + \left| \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right| \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} \left| \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right| = 1 \\ \left| \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right| = \text{arctg}(\omega T) - \text{arctg}(-\omega T) = 2 \cdot \text{arctg}(\omega T) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \\ \angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \text{arctg}(\omega T) \end{cases}$$

D'après le diagramme :

$$\omega_{co} = 8 \text{ rd/s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = \text{arctg}(\omega_{co} T) = \text{arctg}\left(8 \times \frac{1}{2}\right) \simeq 76^\circ$$

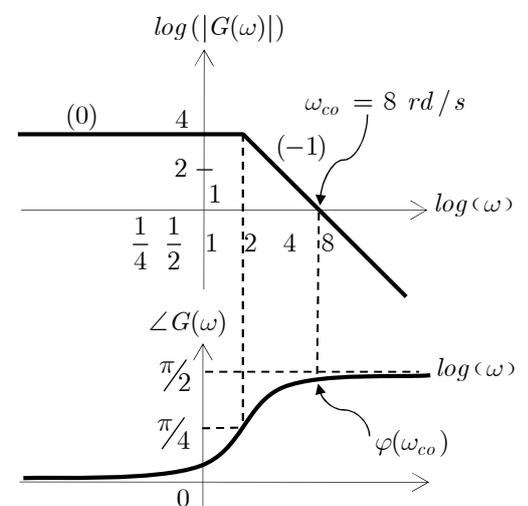
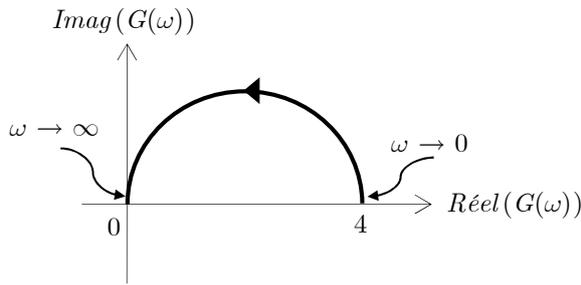
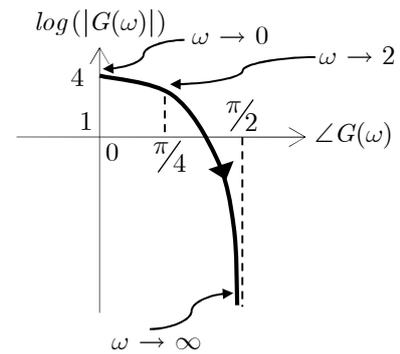


Diagramme asymptotique de Bode

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols



Lieu de Nyquist



Lieu de Black

Remarque :

Voici les caractéristiques de quelques fonctions de transfert particulières :

	Fonction de Transfert	Module	Phase
Système à déphasage minimal	$G(j\omega) = K(1 + j\omega T)$	$ G(j\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$	$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \arctg(\omega T)$
	$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}$	$ G(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$	$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T)$
Système à déphasage non minimal	$G(j\omega) = K(1 - j\omega T)$	$ G(j\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$	$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T)$
	$G(j\omega) = \frac{K}{1 - j\omega T}$	$ G(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$	$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \arctg(\omega T)$
	$G(j\omega) = K(-1 - j\omega T)$	$ G(j\omega) = K\sqrt{1 + \omega^2 T^2}$	$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = \arctg(\omega T) + \pi$
	$G(j\omega) = \frac{K}{-1 - j\omega T}$	$ G(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$	$\angle G(j\omega) = \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T) + \pi$

k) $G(p) = \frac{32(2 - p)}{16 + 65p + 4p^2}$

Tout d'abord, il faut écrire les systèmes de 1^{er} ordre sous la forme $(1 + Tp)$ et les systèmes de 2nd ordre

sous la forme $\left(1 + 2\frac{\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2\right)$:

$$G(p) = \frac{32(2-p)}{16 + 65p + 4p^2} = \frac{32 \times 2 \left(1 - \frac{p}{2}\right)}{16 \left(1 + \frac{65}{16}p + \frac{1}{4}p^2\right)} = \frac{4 \left(1 - \frac{p}{2}\right)}{1 + \frac{65}{16}p + \frac{1}{4}p^2}$$

Ensuite, il faut s'assurer de la nature des pôles du second ordre du dénominateur :

- ✓ S'agit-il d'un vrai (2nd ordre) avec 2 pôles complexes conjugués et des pentes (0, -2) ?
- ✓ Ou alors, s'agit-il de deux (1^{er} ordre) avec 2 pôles réels et des pentes (0, -1, -2) ?

Pour cela, il faut calculer ξ :

- ✓ Si ($\xi < 1$), alors on est dans le premier cas.
- ✓ Si ($\xi \geq 1$), alors on est dans le second cas.

$$\frac{1}{1 + \frac{65}{16}p + \frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_n = 2 \text{ rd/s} \\ \xi = \frac{65}{16} \end{cases}$$

$\xi > 1$ (régime apériodique, pôles réels)

Dans ce cas, le polynôme est décomposable en racines réelles :

$$\frac{1}{1 + \frac{65}{16}p + \frac{1}{4}p^2} = \frac{1}{(1+4p)\left(1 + \frac{1}{16}p\right)} \Rightarrow G(p) = \frac{4 \left(1 - \frac{p}{2}\right)}{(1+4p)\left(1 + \frac{1}{16}p\right)}$$

- Diagramme de Bode, ω_{co} , $\varphi(\omega_{co})$

$$G(p) = \frac{K(1 - T_1 p)}{(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)} \quad \text{avec} \quad \left. \begin{array}{l} K = 4 \\ T_1 = \frac{1}{2} \text{ s} \Rightarrow \omega_1 = 2 \text{ rd/s} \\ T_2 = 4 \text{ s} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{4} \text{ rd/s} \\ T_3 = \frac{1}{16} \text{ s} \Rightarrow \omega_3 = 16 \text{ rd/s} \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_2 < \omega_1 < \omega_3$$

D'après le diagramme :

$$\omega_{co} = 1 \text{ rd/s}$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -\arctg(\omega_{co} T_2) - \arctg(\omega_{co} T_1) - \arctg(\omega_{co} T_3)$$

$$\varphi(\omega_{co}) = -\arctg(1 \times 4) - \arctg\left(1 \times \frac{1}{2}\right) - \arctg\left(1 \times \frac{1}{16}\right) \simeq 106^\circ$$

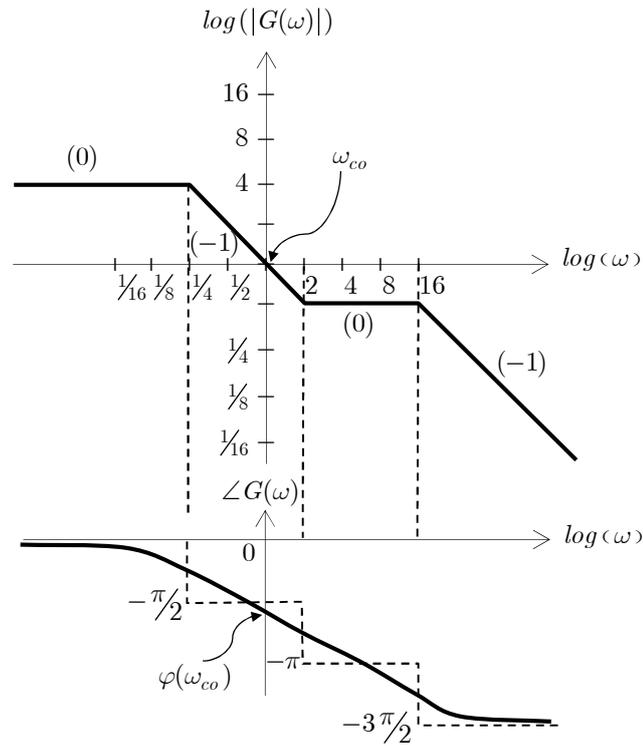


Diagramme asymptotique de Bode

- Lieu de Nyquist, lieu de Black ou Black-Nichols

