Université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique

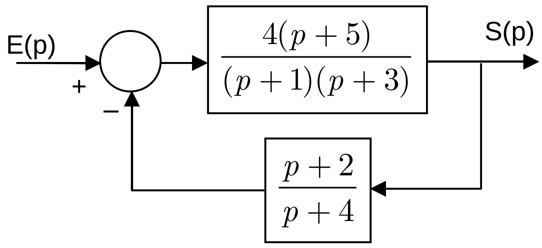
Enoncés TD n° 5
Stabilité des Systèmes Asservis Linéaires
(*Critère Algébrique*)

3ème Année Licence
1ème Année Master
« Automatisme Industriel »

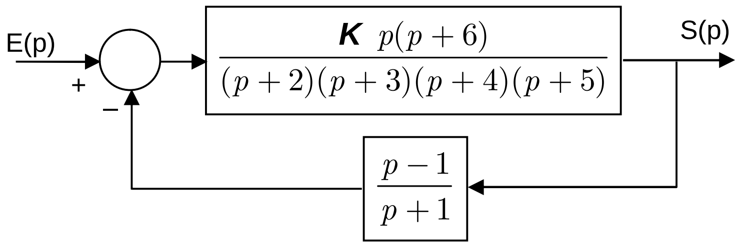
Exercice n°1

En utilisant le critère algébrique de Routh-Hurwitz, déterminez la stabilité en boucle fermée des systèmes asservis suivants :

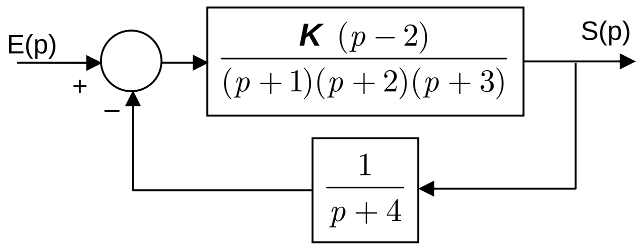
a)



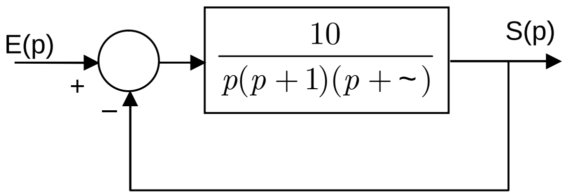
b, c) : Faire l'étude pour K=10 et K=100



d) : Faire l'étude en fonction de K>0



e) : Faire l'étude en fonction de α



Exercice n°1

Etude de la stabilité en boucle fermée des systèmes asservis, en utilisant le critère algébrique de Routh-Hurwitz :

1-a) 1+ FTBO(p) = 0 $\Rightarrow$ $p^3 + 12p^2 + 47p + 52 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) vérifié : Tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe et non nuls $\Rightarrow$ tableau de Routh.
- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : 1ère colonne de même signe $\Rightarrow$ ***Système stable***.

p^3 :	1	47
p^2 :	12	**52**
p^1 :	42.67	
p^0 :	**52**	

1-b) Cas du gain K=10

1+ FTBO(p) = 0 $\Rightarrow$ $p^5 + 15p^4 + 95p^3 + 275p^2 + 214p + 120 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) vérifié : Tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe et non nuls $\Rightarrow$ tableau de Routh.
- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : 1ère colonne de même signe $\Rightarrow$ ***Système stable***.

p^5 :	1	95	214
p^4 :	15	275	**120**
p^3 :	76.7	206	
p^2 :	234.7	**120**	
p^1 :	166.8		
p^0 :	**120**		

1-c) Cas du gain K=100

1+ FTBO(p) = 0 $\Rightarrow$ $p^5 + 15p^4 + 185p^3 + 725p^2 - 326p + 120 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) non vérifié : Les coefficients de l'équation caractéristique sont de signes différents $\Rightarrow$ ***Système instable***.
- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : permet de déterminer le nombre de pôles instables de la FTBF : 2 changements de signe sur la 1ère colonne, donc ***2 pôles instables***.

p^5 :	1	185	–326
p^4 :	15	725	**120**
p^3 :	136.7	–334	
p^2 :	761.7	**120**	
p^1 :	–355.5		
p^0 :	**120**		

Si nous comparons les 2 exercices précédents, ils ne différent que par la valeur du gain K.

- Pour le cas du gain K=10, le système est stable.
- Pour le cas du gain K=100, le système est instable.

$\Rightarrow$ **L'augmentation du gain a un effet déstabilisant sur le système en boucle fermée.**

1-d) 1+ FTBO(p) = 0 $\Rightarrow\ p^4 + 10p^3 + 35p^2 + (50+K)p + (24-2K) = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) : Tous les coefficients de l'équation caractéristique doivent être de même signe et non nuls.

$$\Rightarrow \begin{cases}(50+K) > 0\\(24-2K) > 0\end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases}K > -50\\K < 12\end{cases} \qquad \Rightarrow 0 < K < 12$$

- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh)

p^4 :	1	35	24–2K
p^3 :	10	50+K	
p^2 :	$\dfrac{300-K}{10}$	24–2K	
p^1 :	$\dfrac{\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K)-10(24-2K)}{\left(\frac{300-K}{10}\right)}$		
p^0 :	24–2K		

Pour que le système soit stable, il faudrait que les termes de la 1[ère] colonne soient de même signe :

$$\Rightarrow \begin{cases}(300-K) > 0\\ \dfrac{\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K)-10(24-2K)}{\left(\frac{300-K}{10}\right)} > 0\\ 0 < K < 12 \text{ (condition précédente)}\end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases}\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K)-10(24-2K) > 0\\ 0 < K < 12\end{cases}$$

Or :

$$\left(\frac{300-K}{10}\right)(50+K)-10(24-2K) > 0 \qquad \Rightarrow K^2 - 450K - 12600 < 0$$

$$2 \text{ racines : } \begin{cases}-26.4\\476.4\end{cases} \quad \Rightarrow \quad -26.4 < K < 476.4$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases}-26.4 < K < 476.4\\0 < K < 12\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad 0 < K < 12$$

Le système sera stable à condition que : $0 < K < 12$

1-e) 1+ FTBO(p) = 0 $\Rightarrow \; p^3 + (1+\alpha)p^2 + \alpha p + 10 = 0$

- Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) : Tous les coefficients de l'équation caractéristique doivent être de même signe et non nuls.

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+\alpha) > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \alpha > -1 \\ \alpha > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha > 0$$

- Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh)

p^3 :	1	α
p^2 :	$1+\alpha$	10
p^1 :	$\dfrac{\alpha(1+\alpha)-10}{1+\alpha}$	
p^0 :	10	

Pour que le système soit stable, il faudrait que les termes de la 1ère colonne soient de même signe :

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\ \alpha > 0 \\ \dfrac{\alpha(1+\alpha)-10}{1+\alpha} > 0 \\ \alpha > 0 \text{ (condition précédente)} \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} \alpha(1+\alpha) - 10 > 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$$

Or :

$$\alpha(1+\alpha) - 10 > 0 \qquad \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 10 > 0 \qquad \Rightarrow \alpha < -3.7 \quad \text{ou} \quad \alpha > 2.7$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha < -3.7 \quad \text{ou} \quad \alpha > 2.7 \\ \alpha > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha > 2.7$$

Le système sera stable à condition que : $\alpha > 2.7$

Cela veut dire que pour que le système soit stable, il faudrait, non seulement, que le pôle p = – α de la FTBO se trouve dans le demi plan gauche du plan complexe, mais qu'il ait, également, une valeur inférieure à –2.7.