

Exercice n°1

Pour les systèmes dont les Fonctions de Transfert en Boucle Ouverte sont les suivantes, étudiez la stabilité en Boucle Fermée en utilisant :

- Le critère de Routh-Hurwitz.
- Le diagramme de Bode et le calcul de $\Delta\phi$.
- Le critère de Nyquist.

$$G1(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

$$G2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

$$G3(p) = \frac{K}{p(1 + T_1p)(1 + T_2p)}$$

$$G4(p) = \frac{K(1 + T_1p)}{p^2(1 + T_2p)(1 + T_3p)}$$

Remarque :

K, ω_n , ξ et tous les T_i sont positifs strictement.

Exercice n°1

Etude de la stabilité en Boucle Fermée de systèmes dont les Fonctions de Transfert en Boucle Ouverte sont les suivantes, en utilisant :

- Le critère de Routh-Hurwitz.
- Le diagramme de Bode et le calcul de $\Delta\phi$.
- Le critère de Nyquist.

1) $G1(p) = \frac{K}{1 + Tp}$

$p^1 :$	T
$p^0 :$	$K + 1$

a) Critère de Routh :

$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow Tp + (K + 1) = 0$
 Système stable $\forall K, T > 0$

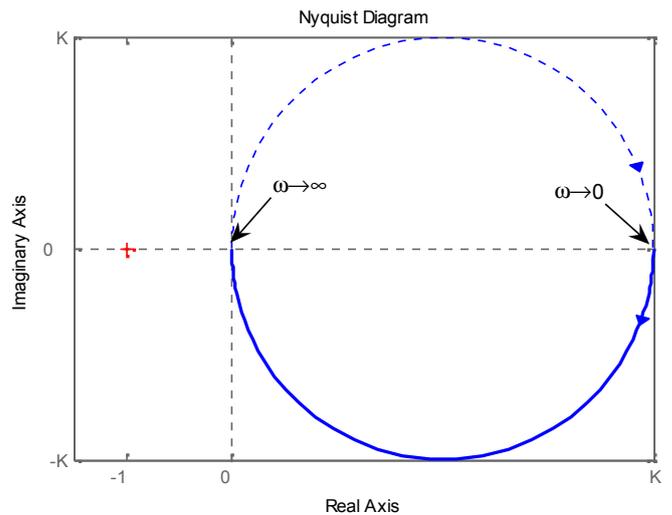
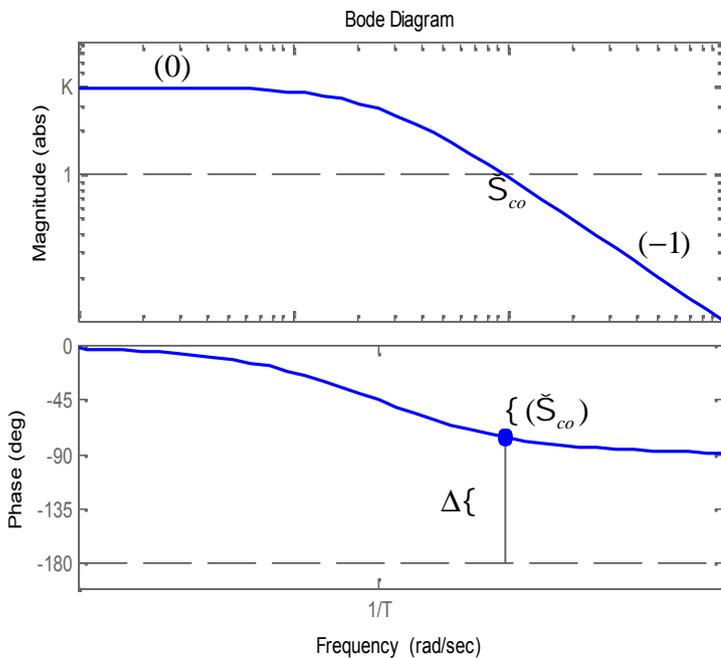
b) Diagramme de Bode :

$\Delta\phi > 90^\circ \Rightarrow$ Système Stable.

c) Lieu de Nyquist :

P : Nombre de pôles instables de la FTBO(p).
 N : Nombre de tours autour du point critique (-1,0) que fait le lieu de Nyquist, lorsqu'il est parcouru de $\omega \rightarrow -\infty$ à $\omega \rightarrow \infty$. (N est compté positivement dans le sens trigonométrique, et négativement dans le sens horaire).
 Z : nombre de pôles instables de la FTBF(p). Si Z = 0, alors le système est stable.

$P = 0 ; N = 0 \Rightarrow Z = P - N = 0 \Rightarrow$ Système Stable.



$$2) G2(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

a) Critère de Routh :

$$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\omega_n^2} p^2 + 2 \frac{\xi}{\omega_n} p + (K + 1) = 0$$

Système stable $\forall K, \xi, \omega_n > 0$

p^2 :	$\frac{1}{\omega_n^2}$	$K + 1$
p^1 :	$2 \frac{\xi}{\omega_n}$	
p^0 :	$K + 1$	

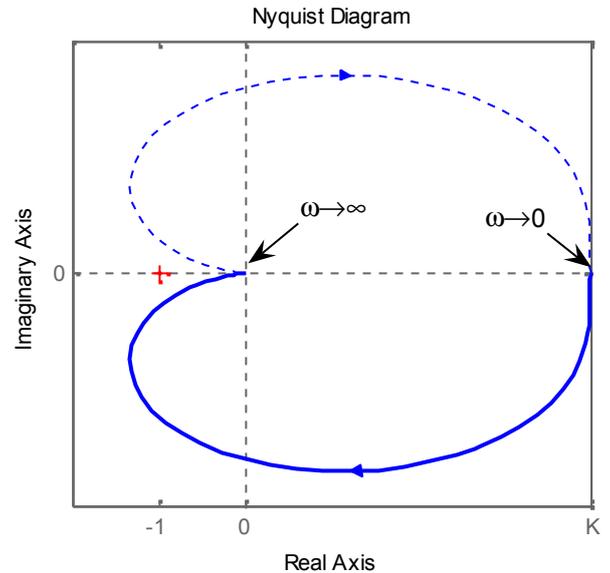
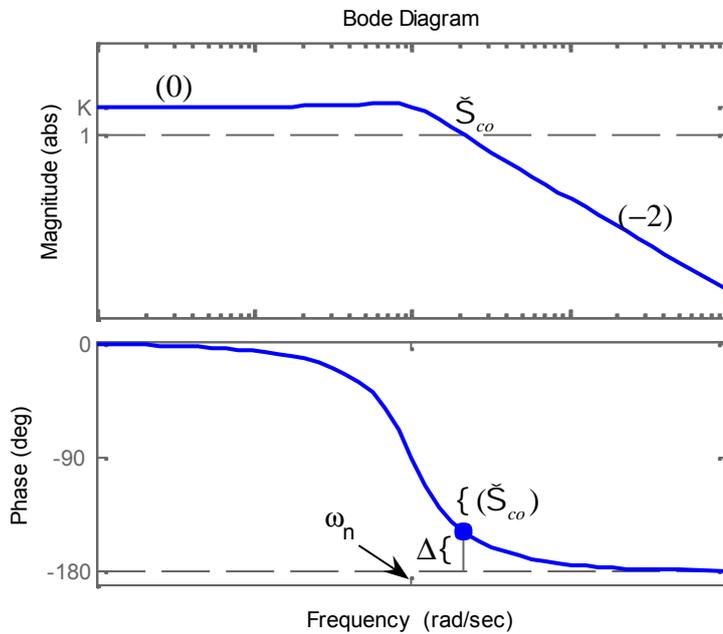
b) Diagramme de Bode :

$\Delta\phi > 0 \Rightarrow$ Système Stable.

La marge de phase est positive mais peut ne pas être suffisante si elle est inférieure à 45°.

c) Lieu de Nyquist :

$P = 0$; $N = 0 \Rightarrow Z = P - N = 0 \Rightarrow$ Système Stable.



$$3) G3(p) = \frac{K}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

a) Critère de Routh :

$$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + K = 0$$

Système stable $\forall K < K_{limite}$, avec $K_{limite} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$

p^3 :	$T_1 T_2$	1
p^2 :	$T_1 + T_2$	K
p^1 :	$\frac{T_1 + T_2 - K T_1 T_2}{T_1 + T_2}$	
p^0 :	K	

b) Diagramme de Bode :

- Si K est faible ($K \ll K_{limite}$) alors $\omega_{c0} \in$ pente (-1). La marge de phase $\Delta\phi > 0 \Rightarrow$ **Système stable.**
- Si K est grand ($K \gg K_{limite}$) alors $\omega_{c0} \in$ pente (-3). La marge de phase $\Delta\phi < 0 \Rightarrow$ **Système instable.**

- Si K est aux alentours de K_{limite} , alors $\omega_{c0} \in$ pente (-2) . ω_{c0} est proche d'une pulsation critique ω_0 pour laquelle le système est théoriquement à la limite entre la stabilité et l'instabilité (pratiquement il est instable).
 - Si $\omega_{c0} < \omega_0$, alors la marge de phase $\Delta\phi > 0$, mais très faible.
 - Si $\omega_{c0} > \omega_0$, alors la marge de phase $\Delta\phi < 0$.
- Pour calculer K_{limite} (gain limite) et ω_0 (pulsation limite), on calcule, tout d'abord, le gain et la

phase de $G(\omega)$, en remplaçant p par $j\omega$:

$$\begin{cases} |G(\omega)| = \left| \frac{K}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} \right| \\ \angle G(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega T_1) - \arctg(\omega T_2) \end{cases}$$

Pour le cas limite ($K = K_{limite}$ et $\omega = \omega_0$), on a :

$$\begin{cases} |G(\omega)| = 1 \\ \angle G(\omega) = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{limite} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \end{cases}$$

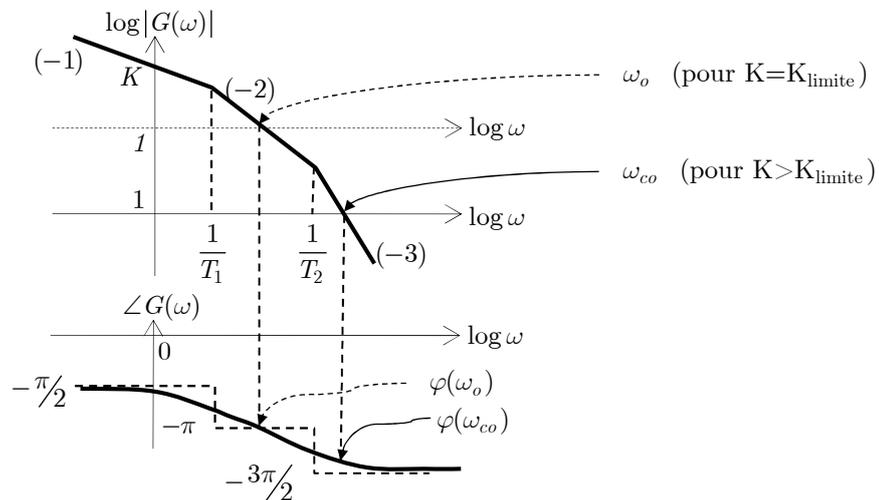


Diagramme asymptotique de Bode

c) Lieu de Nyquist :

Le lieu de Nyquist peut être tracé à partir du diagramme de Bode. Il suffit de suivre, à la fois, les variations du gain et de la phase en fonction de la pulsation ω et de les reporter sur le lieu de Nyquist. Ceci est suffisamment précis sur toute la gamme de fréquence, sauf dans le cas où la FTBO dispose d'intégrateurs (ou de dérivateurs). Dans ce cas, le lieu est légèrement différent aux alentours de $\omega \rightarrow 0$, dans le cas de présence d'intégrateurs, ou de $\omega \rightarrow \infty$ dans le cas de présence de dérivateurs.

On calcule, tout d'abord, les parties réelle et imaginaire de $G(\omega)$ puis, on calcule leur valeurs lorsqu'on fait tendre $\omega \rightarrow 0$ dans le cas de présence d'intégrateurs, ou $\omega \rightarrow \infty$, dans le cas de présence de dérivateurs. Dans notre cas, il y a un simple intégrateur. Il faut donc faire attention aux variations du lieu lorsque $\omega \rightarrow 0$.

$$\begin{cases} Re = \frac{-K(T_1 + T_2)}{[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} \\ Im = \frac{K(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega [1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} Re = -K(T_1 + T_2) \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} Im = -\infty \end{cases}$$

- Si K est faible ($K < K_{limite}$) le lieu passe par A₁. Le lieu n'entoure pas le point critique (-1,0).

Dans ce cas : P = 0 ; N = 0 \Rightarrow Z = P - N = 0 \Rightarrow **Système stable.**

- Si K est grand ($K > K_{limite}$) le lieu passe alors, par A₂. Le lieu entoure alors le point critique (-1,0).

Dans ce cas : P = 0 ; N = -2 \Rightarrow Z = P - N = 2 \Rightarrow **Système instable.**

- Si $K = K_{limite}$, alors le système est théoriquement à la limite entre la stabilité et l'instabilité (pratiquement, il est instable).

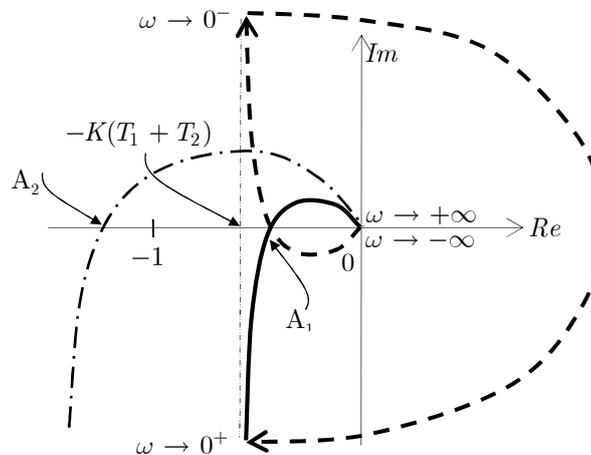
Pour calculer K_{limite} et ω_0 (pulsation limite), on calcule, tout d'abord, les parties réelle et

imaginaire de G(ω), en remplaçant p par j ω :

$$\begin{cases} Re = \frac{-K(T_1 + T_2)}{[1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} \\ Im = \frac{K(\omega^2 T_1 T_2 - 1)}{\omega [1 + (\omega T_1)^2][1 + (\omega T_2)^2]} \end{cases}$$

Pour le point critique ($K = K_{limite}$ et $\omega = \omega_0$), on a :

$$\begin{cases} Re = -1 \\ Im = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{limite} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} \end{cases}$$



Lieu de Nyquist

$$4) G^4(p) = \frac{K(1 + T_1 p)}{p^2(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)}$$

a) Critère de Routh :

$$1 + FTBO(p) = 0 \Rightarrow T_2 T_3 p^4 + (T_2 + T_3)p^3 + p^2 + K T_1 p + K = 0$$

$p^4 :$	$T_2 T_3$	1	K
$p^3 :$	$T_2 + T_3$	$K T_1$	
$p^2 :$	$\frac{T_2 + T_3 - K T_1 T_2 T_3}{T_2 + T_3}$	K	
$p^1 :$	$K \frac{T_1 (T_2 + T_3 - K T_1 T_2 T_3) - (T_2 + T_3)^2}{T_2 + T_3 - K T_1 T_2 T_3}$		
$p^0 :$	K		

Système stable $\forall K < K_{\text{limite}}$ avec : $K_{\text{limite}} = \frac{(T_2 + T_3)(T_1 - T_2 - T_3)}{T_1^2 T_2 T_3}$

Mais K_{limite} doit être positif puisque K est positif, ce qui exige d'imposer $(T_1 - T_2 - T_3) > 0$ pour assurer cette stabilité.

Pour récapituler :

- ✓ Si $\{T_1 > (T_2 + T_3)\}$, alors stabilité possible pour $K \in]0, K_{\text{limite}}[$.
- ✓ Si $\{T_1 < (T_2 + T_3)\}$, alors K_{limite} est négatif et le système est toujours instable.

Nous sommes en présence d'une stabilité conditionnelle dépendant des valeurs relatives de T_1 , T_2 , et T_3 .

b) Diagramme de Bode :

Pour étudier la stabilité à partir du diagramme asymptotique de Bode, il faut considérer plusieurs cas selon les valeurs relatives de T_1 , T_2 , et T_3 , donc de $\frac{1}{T_1}$, $\frac{1}{T_2}$, et $\frac{1}{T_3}$.

On considère que $T_2 > T_3$. Cela ne change rien aux calculs puisque T_2 et T_3 sont tous les deux au dénominateur de la FTBO.

- ✓ Si $\{T_1 < (T_2 + T_3)\}$, alors $\left\{ \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} < \frac{1}{T_1} \text{ ou } \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_3} \right\}$
- ✓ Si $\{T_1 > (T_2 + T_3)\}$, alors $\left\{ \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} \right\}$

- Cas n° 1 : $\left(\frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} < \frac{1}{T_1} \right)$

$\forall K, -2\pi < \varphi(\omega) < -\pi$
 \Rightarrow La marge de phase $\Delta\varphi < 0$.
 \Rightarrow Le système est donc instable.

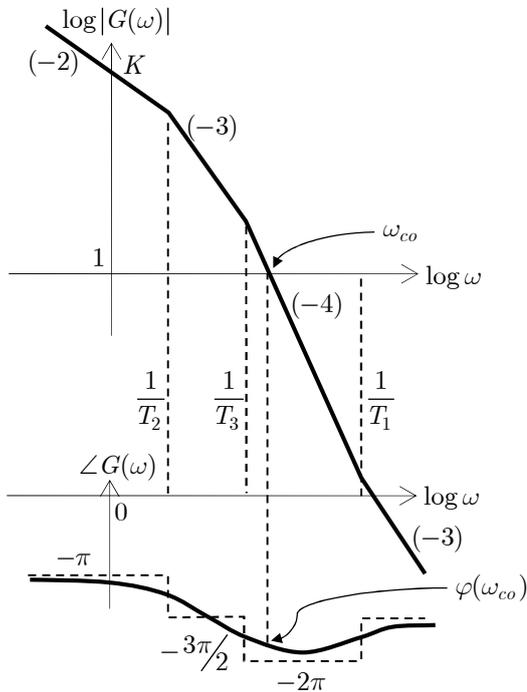


Diagramme asymptotique de Bode

- Cas n° 2 : $\left(\frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_3} \right)$

$\forall K, -3\pi/2 < \varphi(\omega) < -\pi$
 \Rightarrow La marge de phase $\Delta\varphi < 0$.
 \Rightarrow Le système est donc instable.

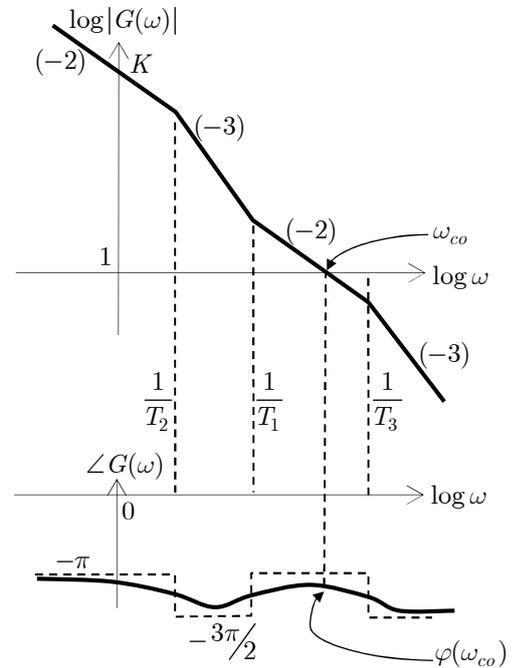


Diagramme asymptotique de Bode

- Cas n° 3 : $\left(\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} \right)$

$\forall 0 < K < K_{limite}, -\pi < \varphi(\omega) < -\pi/2$
 \Rightarrow La marge de phase $\Delta\varphi > 0$.
 \Rightarrow Le système est donc stable.

$\forall K_{limite} < K < \infty, -3\pi/2 < \varphi(\omega) < -\pi$
 \Rightarrow La marge de phase $\Delta\varphi < 0$.
 \Rightarrow Le système est donc instable.

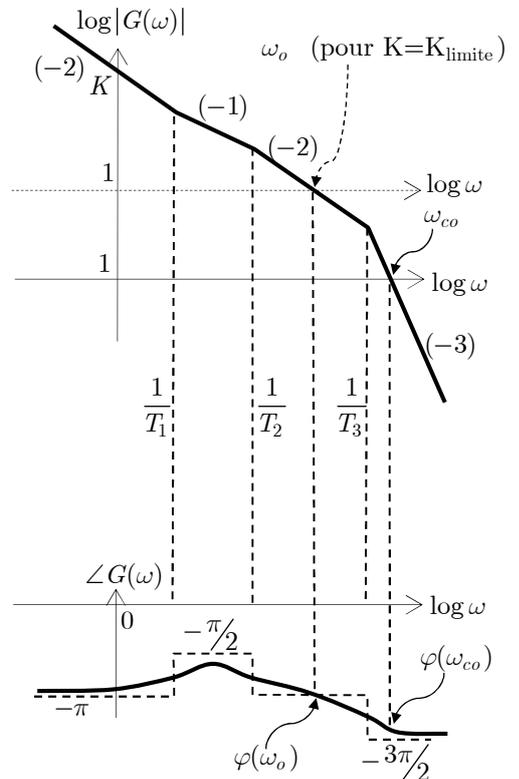


Diagramme asymptotique de Bode

Pour calculer K_{limite} (gain limite) et ω_0 (pulsation limite), on adopte la même procédure que précédemment (exemple G3) :

$$\begin{cases} |G(\omega)| = 1 \\ \angle G(\omega) = -\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{\text{limite}} = \frac{(T_2 + T_3)(T_1 - T_2 - T_3)}{T_1^2 T_2 T_3} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{T_1 - T_2 - T_3}{T_1 T_2 T_3}} \end{cases}$$

c) Lieu de Nyquist :

Dans notre cas, il y a un double intégrateur. Il faut donc faire attention aux variations du lieu lorsque $\omega \rightarrow 0$.

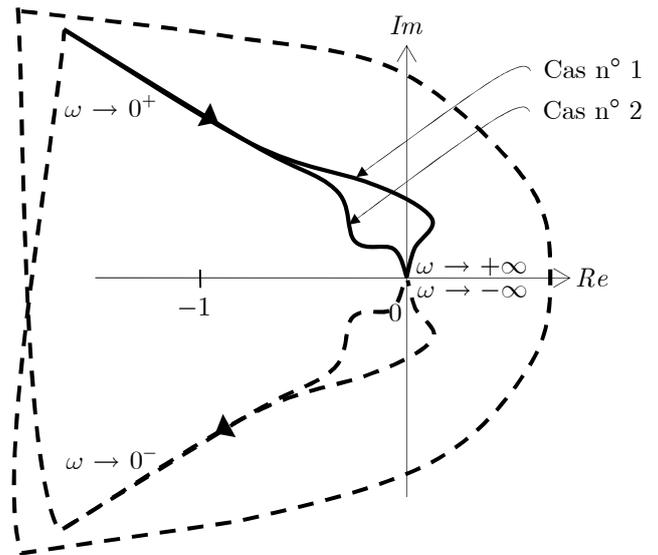
$$\begin{cases} Re = \frac{K}{\omega^2 [1 + \omega^2 (T_2^2 + T_3^2) + \omega^4 (T_2^2 T_3^2)]} [-1 - \omega^2 \{T_1 T_2 + T_3 (T_1 - T_2)\}] \\ Im = \frac{K}{\omega^2 [1 + \omega^2 (T_2^2 + T_3^2) + \omega^4 (T_2^2 T_3^2)]} [\omega (T_3 - T_1 + T_2 + \omega^2 T_1 T_2 T_3)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} Re = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} Im = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{K (T_3 - T_1 + T_2)}{\omega} = \begin{cases} +\infty & \text{si } T_1 < (T_3 + T_2) \\ -\infty & \text{si } T_1 > (T_3 + T_2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} Re = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow 0^+} Im = \begin{cases} +\infty & \text{si } \left\{ \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} < \frac{1}{T_1} \text{ ou } \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_3} \right\} \\ -\infty & \text{si } \left\{ \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} \right\} \end{cases} \end{cases}$$

- Cas n° 1 $\left(\frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3} < \frac{1}{T_1}\right)$ et Cas n° 2 $\left(\frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_3}\right)$

$\forall K, P = 0, N = -2$
 $\Rightarrow Z = P - N = 2 (\neq 0)$
 \Rightarrow Le système est donc instable.

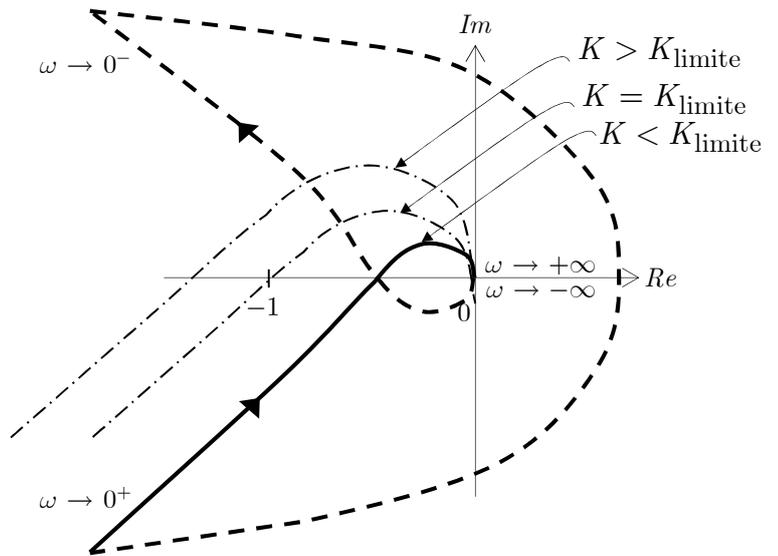


Lieu de Nyquist

- Cas n° 3 : $\left(\frac{1}{T_1} < \frac{1}{T_2} < \frac{1}{T_3}\right)$

$\forall 0 < K < K_{\text{limite}}$
 $P = 0, N = 0$
 $\Rightarrow Z = P - N = 0$
 \Rightarrow Le système est donc stable.

$\forall K > K_{\text{limite}}$
 $P = 0, N = -2$
 $\Rightarrow Z = P - N = 2 (\neq 0)$
 \Rightarrow Le système est donc instable.



Lieu de Nyquist

Pour calculer K_{limite} (gain limite) et ω_0 (pulsation limite), on adopte la même procédure que précédemment (exemple G3).

$$\begin{cases} Re = -1 \\ Im = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_{\text{limite}} = \frac{(T_2 + T_3)(T_1 - T_2 - T_3)}{T_1^2 T_2 T_3} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{T_1 - T_2 - T_3}{T_1 T_2 T_3}} \end{cases}$$