Université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique

Enoncés TD n° 7
Performances en Régime Statique des Asservissements

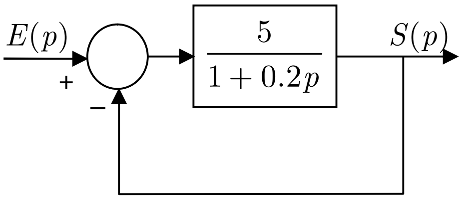
3ème Année Licence
1ème Année Master
« Automatisme Industriel »

Performances en régime statique (permanent)

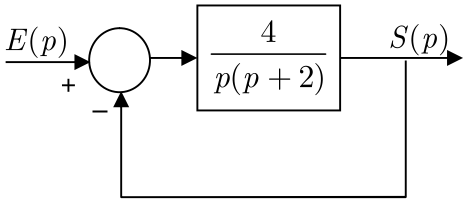
Exercice n°1

Calculez le gain statique en BF et les erreurs en régime permanent (en BF) pour une entrée en échelon et en rampe pour les systèmes suivants :

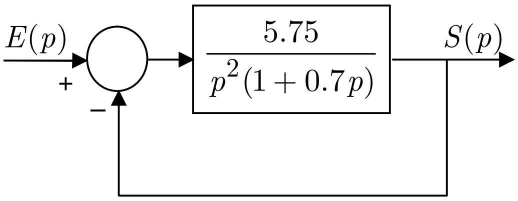
a)



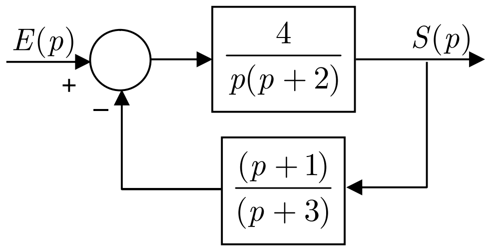
b)



c)

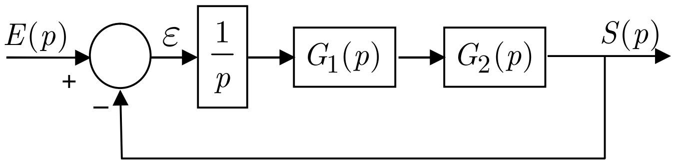


d)



Exercice n°2

Soit le système asservi ci-contre :

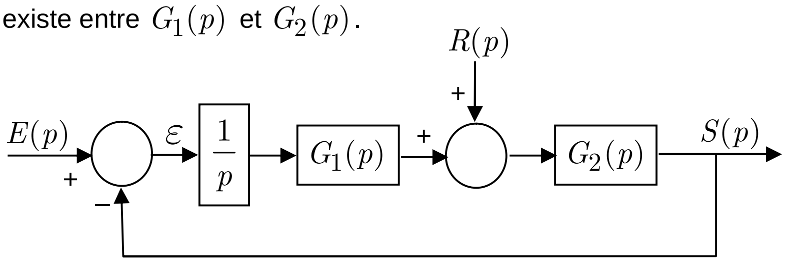


a) Calculez l'erreur statique ε_∞ pour une entrée en échelon $E(p)$.

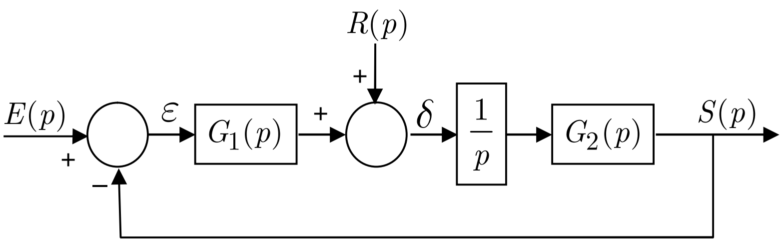
$$G_i(p) = K_i \frac{\prod_j (1+\tau_{ij}p)}{\prod_k (1+\tau_{ik}p)}$$

b) On suppose qu'une perturbation $R(p)$ existe entre $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

Calculez ε_∞ pour une perturbation en échelon $R(p)$, le système étant en régime établi d'un échelon d'amplitude E_0 sur l'entrée $E(p)$.



c) Le système est maintenant :

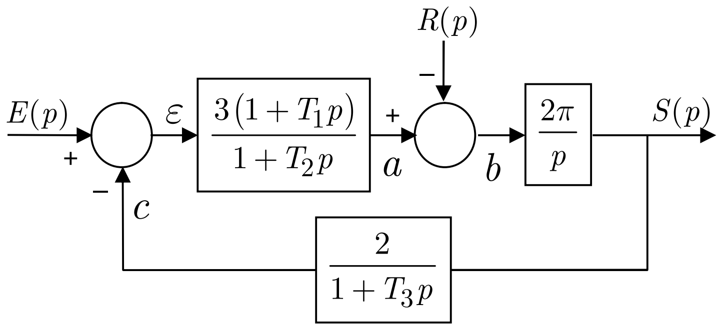


Calculez ε_∞ et δ_∞ dans les mêmes conditions que pour la question b). Conclusion.

Exercice n°3

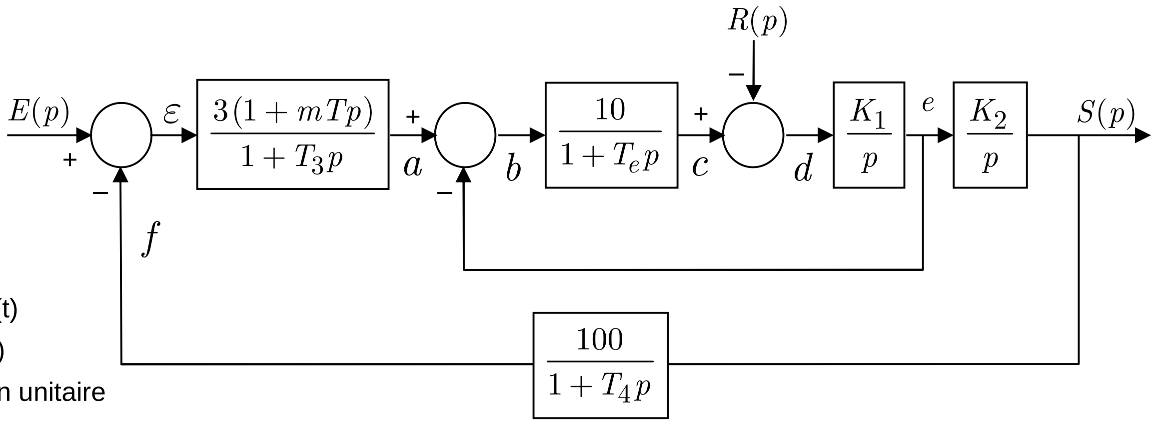
Soient les systèmes asservis, ci-dessous, supposés stables.
Sans aucun calcul, déterminez les valeurs des différentes grandeurs intermédiaires et de sorties en régime permanent (raisonnez sur les entrées des intégrateurs et les gains statiques).

a)



$e(t)$ = 10.u(t)
$r(t)$ = 6.u(t)
$u(t)$ = échelon unitaire

b)



$e(t)$ = 1500.u(t)
$r(t)$ = 150.u(t)
$u(t)$ = échelon unitaire

Performances en régime statique (permanent)

Exercice n°1

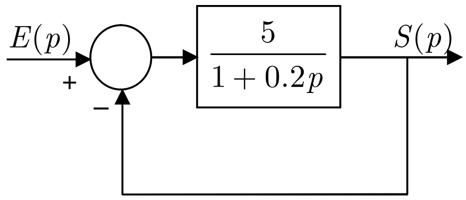
Calcul du gain statique en BF et des erreurs en régime permanent (en BF) pour une entrée en échelon et en rampe pour les systèmes suivants.

Remarque : On note l'erreur statique, indifféremment, ε_s ou ε_∞ .

a) $FTBO(p) = \dfrac{5}{1+0.2p} \quad \Rightarrow \quad FTBF(p) = \dfrac{\dfrac{5}{1+0.2p}}{1+\dfrac{5}{1+0.2p}} = \dfrac{5}{6+0.2p}$

- *Stabilité :*
  Système du 1er ordre $\Rightarrow$ Stable en BF.
- *Gain statique K_s :*
  $K_s = \lim\limits_{p\to 0} FTBF(p)$

  $K_s = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{5}{6+0.2p} \quad \Rightarrow \quad K_s = \dfrac{5}{6}$



- *Erreur statique ε_∞ pour une entrée en échelon :*

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} = \lim_{p\to 0} p\,\frac{1/p}{1+\dfrac{5}{1+0.2p}} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = \frac{1}{6}$$

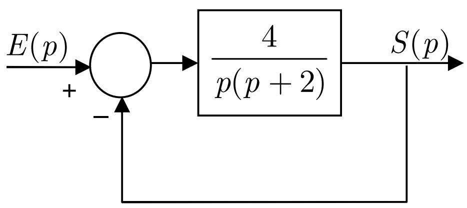
- *Erreur statique ε_∞ pour une entrée en rampe :*

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{E(p)}{1+FTBO(p)} = \lim_{p\to 0} p\,\frac{1/p^2}{1+\dfrac{5}{1+0.2p}} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = \infty$$

b) $FTBO(p) = \dfrac{4}{p(p+2)} \quad \Rightarrow \quad FTBF(p) = \dfrac{\dfrac{4}{p(p+2)}}{1+\dfrac{4}{p(p+2)}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}p+\dfrac{1}{4}p^2}$

- *Stabilité :*
  Système du 2ème ordre $\Rightarrow$ Stable en BF.
- *Gain statique K_s :*
  $K_s = \lim\limits_{p\to 0} FTBF(p)$

  $K_s = \lim\limits_{p\to 0} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}p+\dfrac{1}{4}p^2} \quad \Rightarrow \quad K_s = 1$



- *Erreur statique ε_∞ pour une entrée en échelon :*

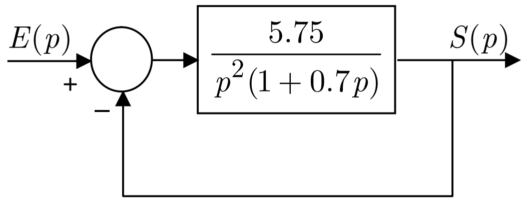
$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p\,\frac{1/p}{1+\dfrac{4}{p(p+2)}} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = 0$$ (Prévisible, car présence d'un intégrateur)

- *Erreur statique* ε_∞ *pour une entrée en rampe :*

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p \frac{1/p^2}{1+\dfrac{4}{p(p+2)}} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\cancel{p}} \frac{\cancel{p}(p+2)}{p(p+2)+4} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = \frac{1}{2}$$

c) $FTBO(p) = \dfrac{5.75}{p^2(1+0.7p)} \quad \Rightarrow \quad FTBF(p) = \dfrac{\dfrac{5.75}{p^2(1+0.7p)}}{1+\dfrac{5.75}{p^2(1+0.7p)}} = \dfrac{5.75}{0.7p^3+p^2+5.75}$

- *Stabilité :*

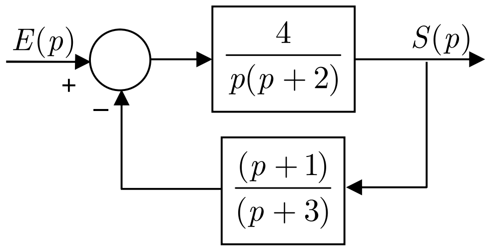


  - ✓ On peut remarquer sur le polynôme de l'équation caractéristique (dénominateur de la FTBF), le coefficient de la puissance p^1 est nul. La condition nécessaire mais pas suffisante (Critère d'Hurwitz) n'est pas vérifiée. ⇒ Instable en BF.
  - ✓ Sans tracer le diagramme de Bode, on peut remarquer sur la FTBO qu'il y a 3 pôles (un double pôle à l'origine et un pôle dans le demi-plan gauche du plan complexe) et pas de zéros. Le double pôle à l'origine introduit un déphasage fixe de 2 x (–90°) = – 180°. L'autre pôle, un déphasage variable de 0° à –90° selon la pulsation. Le déphasage global est donc variable de –180° à –270°. La marge de phase est, par conséquent, négative. ⇒ Instable en BF.

On ne calcule pas performances d'un système instable en BF.

d) $FTBO(p) = \dfrac{4(p+1)}{p(p+2)(p+3)} \Rightarrow FTBF(p) = \dfrac{\dfrac{4(p+1)}{p(p+2)(p+3)}}{1+\dfrac{4(p+1)}{p(p+2)(p+3)}} = \dfrac{4(p+3)}{p^3+5p^2+10p+4}$

- *Stabilité :*



1+ FTBO(p) = 0 ⇒ $p^3+5p^2+10p+4=0$

  - ✓ Critère d'Hurwitz (condition nécessaire mais pas suffisante) vérifié : Tous les coefficients de l'équation caractéristique sont de même signe et non nuls ⇒ tableau de Routh.
  - ✓ Critère de Routh-Hurwitz (tableau de Routh) : 1ère colonne de même signe ⇒ Système stable en BF.

p^3 :	1	10
p^2 :	5	4
p^1 :	46/5	
p^0 :	4	

- *Gain statique* K_s *:*

$$K_s = \lim_{p\to 0} FTBF(p)$$

$$K_s = \lim_{p\to 0} \frac{4(p+3)}{p^3+5p^2+10p+4} \qquad \Rightarrow \qquad K_s = 3$$

- *Erreur statique* ε_∞ *pour une entrée en échelon :*

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p \frac{1/p}{1+\dfrac{4(p+1)}{p(p+2)(p+3)}} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = 0$$

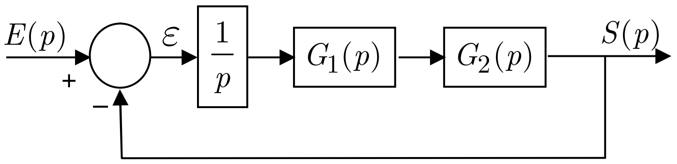
(Prévisible, car présence d'un intégrateur)

- *Erreur statique ε_∞ pour une entrée en rampe :*

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p \frac{1/p^2}{1+\dfrac{4(p+1)}{p(p+2)(p+3)}} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{\cancel{p}} \frac{\cancel{p}(p+2)(p+3)}{p(p+2)(p+3)+4(p+1)} \qquad \Rightarrow \varepsilon_\infty = \frac{3}{2}$$

Exercice n°2

Soit le système asservi ci-contre :



$$G_i(p) = K_i \frac{\prod_j (1+\tau_{ij}p)}{\prod_k (1+\tau_{ik}p)}$$

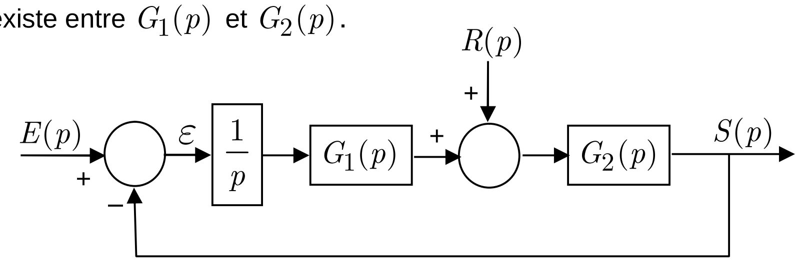
a) Calcul de l'erreur statique ε_∞ pour une entrée en échelon $E(p)=\dfrac{1}{p}$.

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p \frac{1/p}{1+\dfrac{1}{p}G_1(p).G_2(p)} = \lim_{p\to 0} p \frac{1/p}{1+\dfrac{1}{p}K_1 \dfrac{\prod_j (1+\tau_{1j}p)}{\prod_k (1+\tau_{1k}p)} K_2 \dfrac{\prod_j (1+\tau_{2j}p)}{\prod_k (1+\tau_{2k}p)}}$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{1}{p}K_1K_2} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = 0$$ (Prévisible, car présence d'un intégrateur)

b) On suppose qu'une perturbation $R(p)$ existe entre $G_1(p)$ et $G_2(p)$.

Calcul de ε_∞ pour une perturbation en échelon $R(p)$, le système étant en régime établi d'un échelon d'amplitude E_0 sur l'entrée $E(p)$.



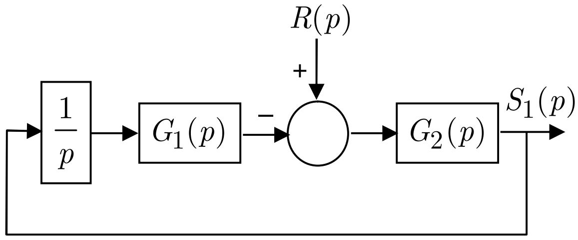
Une fois le régime établi après un échelon d'entrée sur $E(p)$, l'erreur en régime statique ε_∞ est nulle (d'après 2-a). E_0 est alors égale à S_0.
L'arrivée de la perturbation $R(p)$ constitue donc l'origine des temps.

Le principe de superposition permet d'écrire : $s(t) = s_0(t) + s_1(t)$
Donc : $\varepsilon(t) = e(t) - s(t) = \big(e_0(t)+e_1(t)\big) - \big(s_0(t)+s_1(t)\big) = \big(e_0(t)-s_0(t)\big) + \big(e_1(t)-s_1(t)\big)$
Or : $e_1(t) = 0$ (l'entrée $E(p)$ n'est pas appliquée)
Et : $\varepsilon_0(t) = e_0(t) - s_0(t) = 0$ (en régime statique, d'après 2-a)

Ce qui donne : $\varepsilon(t) = -s_1(t) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(p) = -S_1(p)$

La sortie S_1, due à la perturbation, s'écrit :

$$S_1(p) = R(p)\frac{G_2(p)}{1+\dfrac{1}{p}G_1(p).G_2(p)}$$ avec $R(p) = \dfrac{1}{p}$

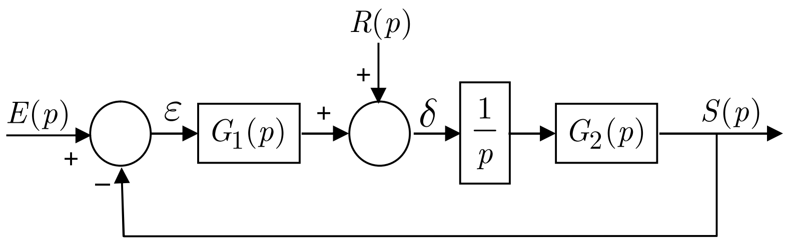


$$\varepsilon(p) = -\frac{1}{p}\frac{G_2(p)}{1+\frac{1}{p}G_1(p).G_2(p)}$$

$$\varepsilon_\infty = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = -\lim_{p\to 0} \cancel{p}\frac{1}{\cancel{p}}\frac{G_2(p)}{1+\frac{1}{p}G_1(p).G_2(p)} = -\lim_{p\to 0}\frac{K_2}{1+\frac{1}{p}K_1.K_2} \quad \Rightarrow \varepsilon_\infty = 0$$

c) Le système est maintenant :

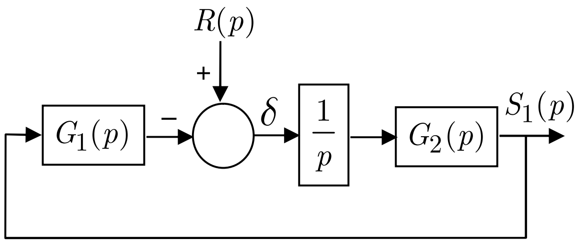
Calcul de ε_∞ et δ_∞ dans les mêmes conditions que pour la question b).



De même que précédemment : $\varepsilon(p) = -S_1(p)$

La sortie S_1, due à la perturbation, s'écrit :

$$S_1(p) = R(p)\frac{\frac{1}{p}G_2(p)}{1+\frac{1}{p}G_1(p).G_2(p)} \quad \text{avec} \quad R(p) = \frac{1}{p}$$



$$\varepsilon(p) = -\frac{1}{p}\frac{\frac{1}{p}G_2(p)}{1+\frac{1}{p}G_1(p).G_2(p)}$$

$$\varepsilon_\infty = -\lim_{p\to 0}\cancel{p}\frac{1}{\cancel{p}}\frac{\frac{1}{p}G_2(p)}{1+\frac{1}{p}G_1(p).G_2(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{-\frac{1}{p}K_2}{1+\frac{1}{p}K_1.K_2} = \lim_{p\to 0}\frac{-K_2}{p+K_1.K_2} \Rightarrow \varepsilon_\infty = \frac{-1}{K_1}$$

On a : $$\begin{cases} \delta(p) = \dfrac{S_1(p)}{\frac{1}{p}G_2(p)} \\[2ex] S_1(p) = R(p)\dfrac{\frac{1}{p}G_2(p)}{1+\frac{1}{p}G_1(p)G_2(p)} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \delta(p) = \frac{1}{p}\frac{1}{1+\frac{1}{p}G_1(p)G_2(p)}$$

$$\delta_\infty = \lim_{p\to 0} p.\delta(p) = -\lim_{p\to 0}\cancel{p}\frac{1}{\cancel{p}}\frac{1}{1+\frac{1}{p}G_1(p)G_2(p)} = \lim_{p\to 0}\frac{1}{1+\frac{1}{p}K_1.K_2} \quad \Rightarrow \quad \delta_\infty = 0$$

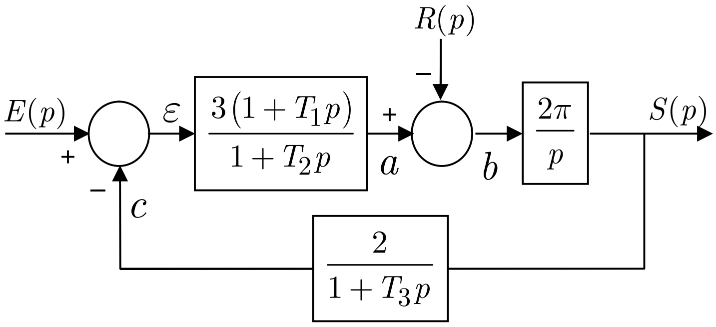
<u>*Conclusion :*</u> En présence d'intégrateurs sur la branche de sortie d'un comparateur, l'erreur statique, suite à un échelon, est toujours nulle.

Exercice n°3

Soient les systèmes asservis, ci-dessous, supposés stables.

Si nous raisonnons sur les entrées des intégrateurs et les gains statiques et sur les conclusions obtenues grâce aux exercices précédents, déterminons les valeurs des différentes grandeurs intermédiaires et de sorties en régime permanent (régime statique).

a)



<u>En régime statique</u> (lorsque t → ∞, ou encore, lorsque p → 0) :

$E(p)$ = 10
$R(p)$ = 6

$\lim\limits_{p\to 0} b(p) = 0$ (entrée d'intégrateur)

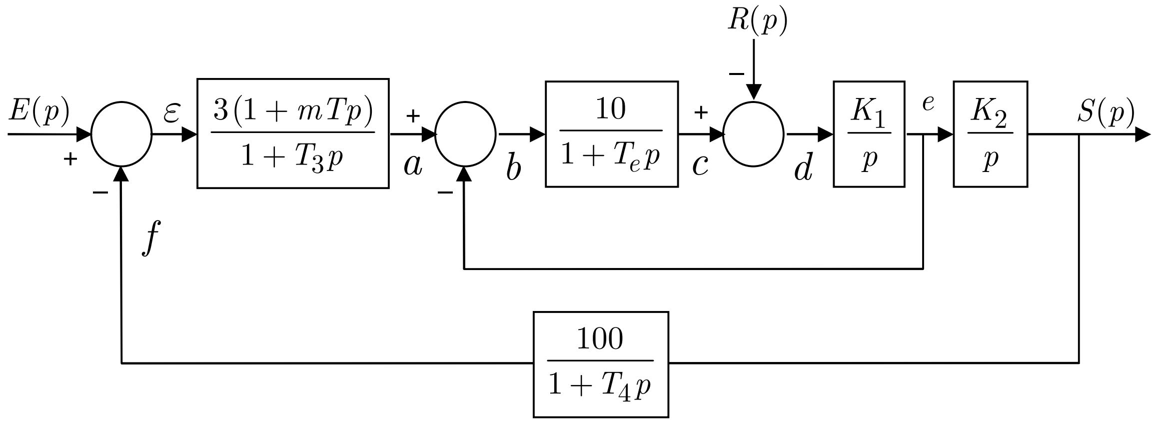
$$a(p) - R(p) = b(p) \quad \Rightarrow a(p) = R(p) + b(p) \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} a(p) = 6$$

$$\varepsilon(p)\frac{3(1+T_1p)}{1+T_2p} = a(p) \quad \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{a(p)}{\dfrac{3(1+T_1p)}{1+T_2p}} \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} \varepsilon(p) = \frac{6}{3} = 2$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - c(p) \quad \Rightarrow c(p) = E(p) - \varepsilon(p) \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} c(p) = 10 - 2 = 8$$

$$S(p)\frac{2}{1+T_3p} = c(p) \quad \Rightarrow S(p) = \frac{c(p)}{\dfrac{2}{1+T_3p}} \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} S(p) = \frac{8}{2} = 4$$

b)



En régime statique (lorsque t → ∞, ou encore, lorsque p → 0) :

$E(p)$ = 1500
$R(p)$ = 150

$$\begin{cases} \lim\limits_{p\to 0} d(p) = 0 \\ \lim\limits_{p\to 0} e(p) = 0 \end{cases}$$ (entrées d'intégrateur)

$$c(p) - R(p) = d(p) \quad \Rightarrow c(p) = R(p) + d(p) \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} c(p) = 150$$

$$b(p)\frac{10}{1+T_e p} = c(p) \quad \Rightarrow b(p) = \frac{c(p)}{\dfrac{10}{1+T_e p}} \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} b(p) = \frac{150}{10} = 15$$

$$a(p) - e(p) = b(p) \quad \Rightarrow a(p) = b(p) + e(p) \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} a(p) = 15$$

$$\varepsilon(p)\frac{3(1+mTp)}{1+T_3 p} = a(p) \Rightarrow \varepsilon(p) = \frac{a(p)}{\dfrac{3(1+mTp)}{1+T_3 p}} \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} \varepsilon(p) = \frac{15}{3} = 5$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - f(p) \quad \Rightarrow f(p) = E(p) - \varepsilon(p) \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} f(p) = 1500 - 5 = 1495$$

$$S(p)\frac{100}{1+T_4 p} = f(p) \quad \Rightarrow S(p) = \frac{f(p)}{\dfrac{100}{1+T_4 p}} \quad \Rightarrow \lim_{p\to 0} S(p) = \frac{1495}{100} = 14.95$$