Université Djillali Liabès de Sidi Bel-Abbès
Faculté de Technologie
Département d'Electrotechnique

Enoncés TD n° 8
Performances en Régime Dynamique des Asservissements

3ème Année Licence
1ème Année Master
« Automatisme Industriel »

Performances en régime dynamique (transitoire)

Exercice n°1

Pour chacun des systèmes suivants du 1er ordre, calculez les réponses indicielles, puis t_r et $t_{s \text{ à } 5\%}$:

$$G_1(p) = \frac{5}{p+5} \qquad ; \qquad G_2(p) = \frac{20}{p+20}$$

Exercice n°2

Pour chacun des systèmes suivants du 2ème ordre, calculez ξ , ω_n , t_p , t_r , $t_{s \text{ à } 5\%}$ et $d\%$:

$$G_1(p) = \frac{120}{p^2 + 12p + 120} \qquad ; \qquad G_2(p) = \frac{0.01}{p^2 + 0.002p + 0.01}$$

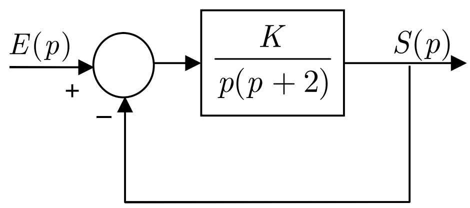
Exercice n°3

Pour chacun des systèmes du 2ème ordre dont les caractéristiques sont mentionnées ci-dessous, calculez la position des paires de pôles :

a) $d\%$ = 10% , $t_{s \text{ à } 2\%}$ = 0.5 s

b) $d\%$ = 15% , t_p = 0.25 s

Exercice n°4



Soit le système à retour unitaire suivant :

Calculez K afin d'assurer un dépassement $d\%$ ≤ 10% sur la réponse indicielle.

Exercice n°5

Soit le système à retour unitaire dont la FTBO est : $FTBO(p) = \dfrac{K}{p\,(p+20)}$

a) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement critique.
b) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement idéal (β = 45°).

Performances en régime dynamique (transitoire)

Exercice n°1

Système du 1er Ordre : $G(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{1+Tp}$

Si $E(p) = \dfrac{1}{p}$ (entrée échelon), alors :

$$S(p) = \frac{K}{p\,(1+Tp)} \quad \Rightarrow \quad s(t) = K\left(1 - e^{-t/T}\right) \quad \text{(Réponse indicielle)}$$

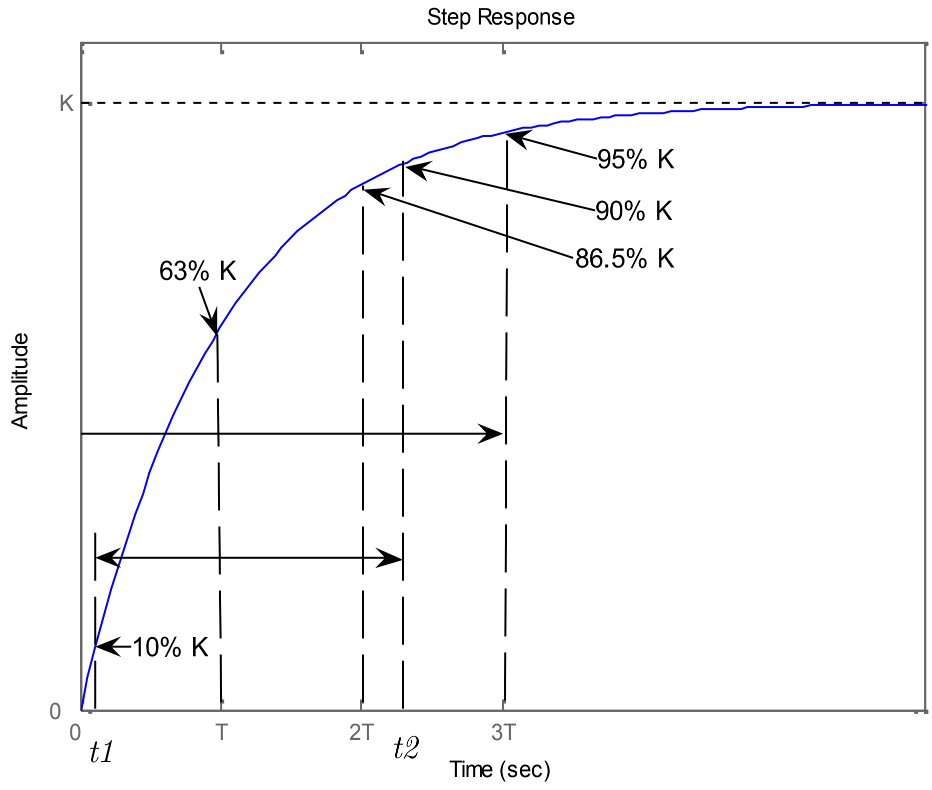
- *Temps de montée (* t_r , time rise *): Temps nécessaire pour passer de 10% à 90% de la valeur maximale :*

$$\begin{cases} s(t_1) = K\left(1 - e^{-t_1/T}\right) = 10\%\ K & \Rightarrow \quad t_1 = 0.11\ T \\ s(t_2) = K\left(1 - e^{-t_2/T}\right) = 90\%\ K & \Rightarrow \quad t_2 = 2.3\ T \end{cases}$$

$$t_r = t_2 - t_1 = 2.3\ T - 0.11\ T \qquad \Rightarrow t_r \approx 2.2\ T$$

- *Temps d'établissement (* $t_{s\ \text{à}\ 5\%}$, settling time *) ou encore Temps de réponse : Temps nécessaire pour atteindre 95% de la valeur maximale :*

$$s(t_s) = K\left(1 - e^{-t_s/T}\right) = 95\%\ K \qquad \Rightarrow \qquad t_{s\ \text{à}\ 5\%} = 3\ T$$



Réponse indicielle d'un système du 1er Ordre

Pour chacun des systèmes suivants du 1er ordre, calculons t_r et $t_{s\ \text{à}\ 5\%}$:

a) $G_1(p) = \dfrac{5}{p+5} = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{5}}$ $\quad T = 1/5 \text{ s} \quad t_r \approx 0.44 \text{ s} \quad t_{s\ \text{à}\ 5\%} = 0.6 \text{ s}$

b) $G_2(p) = \dfrac{20}{p+20} = \dfrac{1}{1+\dfrac{p}{20}}$ $\quad T = 1/20 \text{ s} \quad t_r \approx 0.11 \text{ s} \quad t_{s\ \text{à}\ 5\%} = 0.15 \text{ s}$

Exercice n°2

Système du 2ème Ordre : $G(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{1 + 2\dfrac{\xi}{\omega_n} p + \dfrac{1}{\omega_n^2} p^2}$

Si $E(p) = \dfrac{1}{p}$ (entrée échelon), alors :

$$S(p) = \frac{K}{p\left(1 + 2\dfrac{\xi}{\omega_n} p + \dfrac{1}{\omega_n^2} p^2\right)} \quad \Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[S(p)\right]$$ (Réponse indicielle, voir polycopié de cours)

- *Temps de montée (* t_r , time rise *): Temps nécessaire pour passer de 0% à 100% de la valeur maximale :*

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_p}$$

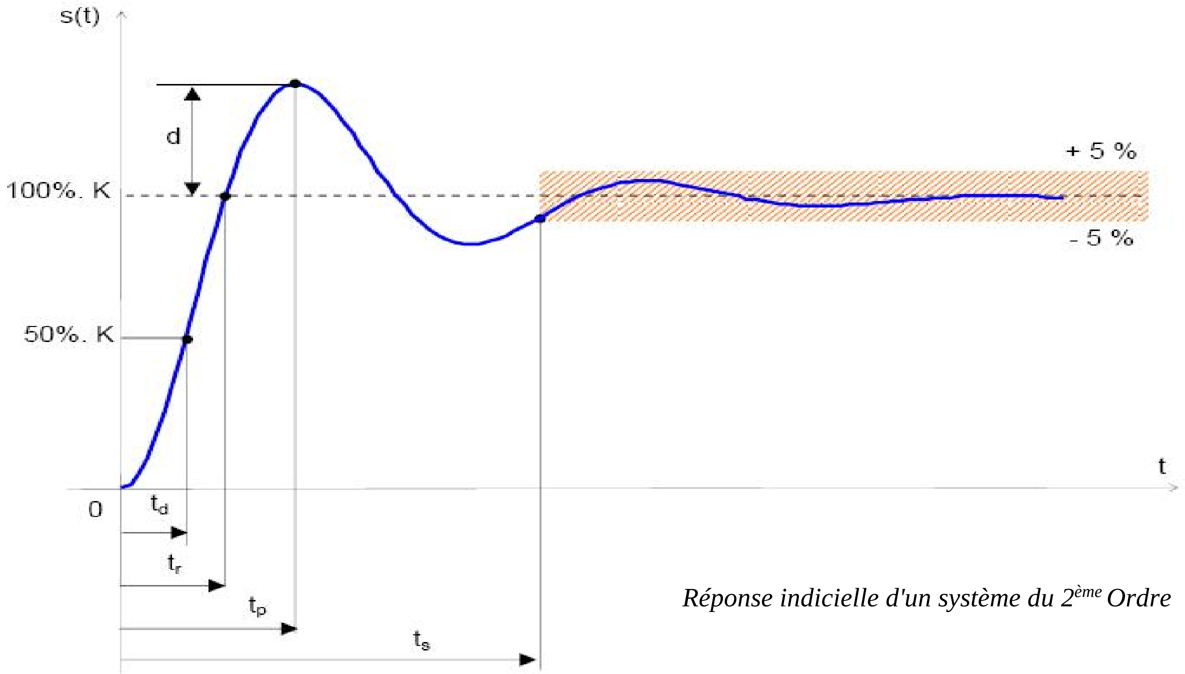
Avec : $\begin{cases} \omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ \beta = arctg\left(\dfrac{\omega_p}{\sigma}\right) = arctg\left(\dfrac{\omega_p}{\xi.\omega_n}\right) = arctg\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \end{cases}$

- *Temps de pic :* $\quad t_p = \dfrac{\pi}{\omega_p} = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

- *Dépassement :* $\quad d\% = e^{-\pi\left(\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}.100\%$

- *Temps d'établissement (* $t_{s\ \text{à}\ 5\%}$, settling time *) ou encore Temps de réponse : Temps nécessaire pour atteindre 95% de la valeur maximale :* $\quad t_{s\ \text{à}\ 5\%} = 3\dfrac{1}{\sigma} = 3\dfrac{1}{\xi.\omega_n}$

Avec : $\begin{cases} \omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ \beta = arctg\left(\dfrac{\omega_p}{\sigma}\right) = arctg\left(\dfrac{\omega_p}{\xi.\omega_n}\right) = arctg\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \end{cases}$



Réponse indicielle d'un système du 2ème Ordre

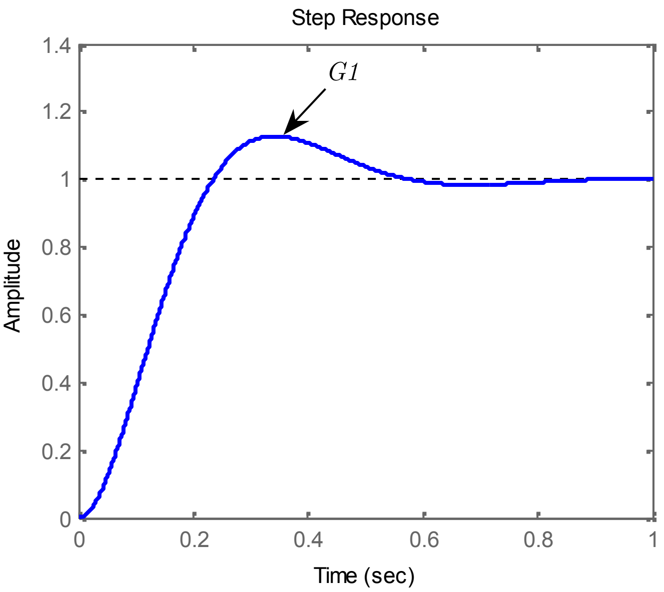
Pour chacun des systèmes suivants du 2ème ordre, calculons ξ , ω_n , t_p , t_r , $t_{s\ \text{à}\ 5\%}$ et $d\%$:

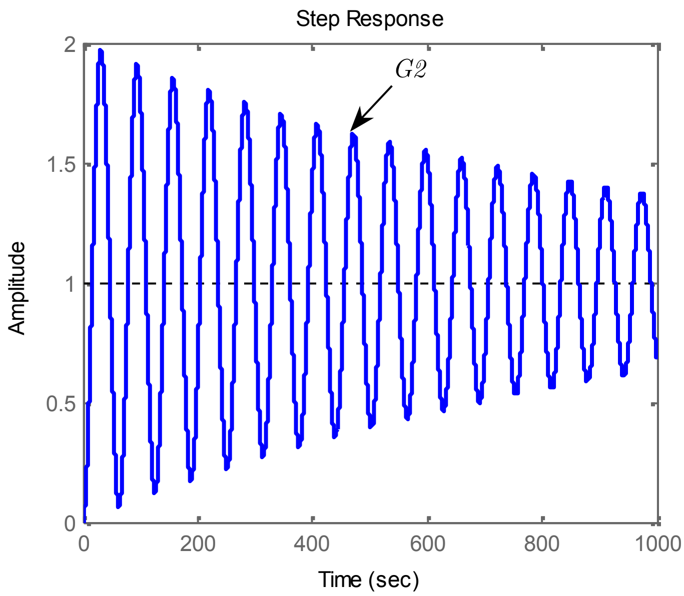
a) $G_1(p) = \dfrac{120}{p^2 + 12p + 120} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{10}p + \dfrac{1}{120}p^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = 0.548 \\ \omega_n = 10.95\ rd/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = 0.235\ s \\ t_p = 0.343\ s \end{cases} \qquad \begin{matrix} t_{s\ \text{à}\ 5\%} = 0.5\ s \\ d\% = 12.78\ \% \end{matrix}$$

b) $G_2(p) = \dfrac{0.01}{p^2 + 0.002p + 0.01} = \dfrac{1}{1 + 0.2p + 100p^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi = 0.01 \\ \omega_n = 0.1\ rd/s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_r = 15.8\ s \\ t_p = 31.4\ s \end{cases} \qquad \begin{matrix} t_{s\ \text{à}\ 5\%} = 3.10^3\ s = 50\ mn\ !!! \\ d\% = 96.9\ \% \end{matrix}$$





Exercice n°3

Pour chacun des systèmes du 2ème ordre dont les caractéristiques sont mentionnées ci-dessous, calculons la position des paires de pôles :

a) $d\%$ = 10% , $t_{s\ \text{à}\ 2\%}$ = 0.5 s

Les pôles du système sont complexes conjugués (système oscillatoire amorti) :

$$\Rightarrow \quad p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$d\% = e^{-\pi\left(\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}.100\% = 10\% \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 0.59$$

$$t_{s\ \text{à}\ 2\%} = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi.\omega_n} = 0.5 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_n = 13.56\ rd/s$$

D'où : $p_{1,2} = -8 \pm j10.95$

b) $d\%$ = 15% , t_p = 0.25 s

Les pôles du système sont complexes conjugués (système oscillatoire amorti) :

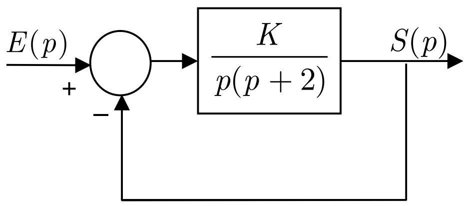
$$\Rightarrow \quad p_{1,2} = -\omega_n\left(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$d\% = e^{-\pi\left(\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}.100\% = 15\% \qquad \Rightarrow \qquad \xi = 0.52$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_p} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.25 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_n = 14.72\ rd/s$$

D'où : $p_{1,2} = -7.65 \pm j12.57$

Exercice n°4



Soit le système à retour unitaire suivant :

Calculons K afin d'assurer un dépassement $d\%$ ≤ 10% sur la réponse indicielle.

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\dfrac{K}{p(p+2)}}{1+\dfrac{K}{p(p+2)}} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{K}p+\dfrac{1}{K}p^2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\omega_n} = \dfrac{2}{K} \\ \dfrac{1}{\omega_n^2} = \dfrac{1}{K} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\sqrt{K}} \\ \omega_n = \sqrt{K} \end{cases}$$

Nous voulons : $d\% = e^{-\pi\left(\xi/\sqrt{1-\xi^2}\right)}.100\% \leq 10\% \qquad \Rightarrow \qquad \xi \geq 0.59$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{K}} \geq 0.59 \quad \Rightarrow \quad K \leq \frac{1}{(0.59)^2} \qquad \Rightarrow \qquad K \leq 2.87$$

Exercice n°5

Soit le système à retour unitaire dont la FTBO est :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p\,(p+20)} \quad \Rightarrow \quad FTBF(p) = \frac{1}{\frac{1}{K}\,p^2 + \frac{20}{K}\,p + 1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2\xi}{\omega_n} = \dfrac{20}{K} \\ \dfrac{1}{\omega_n^2} = \dfrac{1}{K} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{10}{\sqrt{K}} \\ \omega_n = \sqrt{K} \end{cases}$$

a) Calculons K afin d'obtenir un système avec un amortissement critique.

Amortissement critique : $\xi = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K = 100 \\ \omega_n = 10 \ rd\,/\,s \end{cases}$

b) Calculez K afin d'obtenir un système avec un amortissement idéal ($\beta = 45°$).

Amortissement idéal : $\beta = 45° \quad \Rightarrow \quad \xi = \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.707 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} K = 200 \\ \omega_n = 10\sqrt{2} \ rd\,/\,s \end{cases}$