Algèbre 2 — Corrigé de la série de TD 1 — 2018/2019 — 1

Exo 1

① Par ax3, $\underline{0} \in V$. Donc V est non vide.

② Considérons $(0+0)\underline{v} = 0.\underline{v} + 0\underline{v}$ par ax 8

$\Rightarrow 0\underline{v} = 0\underline{v} + 0\underline{v}$

$\Rightarrow 0\underline{v} + [-(0.\underline{v})] = 0\underline{v} + 0\underline{v} + [-(0.\underline{v})]$

$\Rightarrow \underline{0} = 0\underline{v} + \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{0} = 0\underline{v}$ par ax 3

i.e $\boxed{0\underline{v} = \underline{0}}$

③ Nous avons $(\alpha + (-\alpha))\underline{v} = \alpha\underline{v} + (-\alpha).\underline{v}$ par ax 8

$\Rightarrow 0\underline{v} = \alpha\underline{v} + (-\alpha)\underline{v}$

$\Rightarrow \underline{0} = \alpha\underline{v} + (-\alpha)\underline{v}$ par ②

Donc $\boxed{(-\alpha)\underline{v} = -(\alpha\underline{v})}$ par ax 4.

④ Par ③, nous avons $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $(-\alpha)\underline{v} = -(\alpha\underline{v})$

Si $\alpha = 1$, alors $(-1)\underline{v} = -(1.\underline{v})$

$\Rightarrow (-1)\underline{v} = -\underline{v}$ par ax 6.

⑤ Nous avons $\alpha(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha.\underline{0} + \alpha\underline{0}$ par ax 7.

$\Rightarrow \alpha.\underline{0} = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0}$ par ax 3

$\Rightarrow \alpha.\underline{0} + [-(\alpha.\underline{0})] = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0} + [-(\alpha\underline{0})]$

$\Rightarrow \underline{0} = \alpha\underline{0} + \underline{0}$ par ax 4

$\Rightarrow \underline{0} = \alpha\underline{0}$ par ax 3

i.e $\boxed{\alpha\underline{0} = \underline{0}}$

⑥ Supposons que $\alpha \neq 0$, alors $\exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ $\alpha^{-1}.\alpha = 1$.

Donc $\alpha\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\underline{v}) = \alpha\underline{0}$

$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\underline{v} = \underline{0}$ par ⑤ et ax 5

$\Rightarrow 1.\underline{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{v} = \underline{0}}$ par ax 6.

$\alpha \cdot \underline{v} = \underline{0}$, alors $\alpha = 0$ ou $\underline{v} = \underline{0}$.

<u>Exo 2</u>

① Soient $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
$\underline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$.

$$(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z} = [(x_1+y_1)+z_1, (x_2+y_2)+z_2, \dots, (x_n+y_n)+z_n]$$
$$= [x_1+(y_1+z_1), x_2+(y_2+z_2), \dots, x_n+(y_n+z_n)]$$ (+ est associative dans $\mathbb{K}$)
$$= \underline{x}+(\underline{y}+\underline{z}) \dots\dots ①$$

② $$\underline{x}+\underline{y} = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$$
$$= (y_1+x_1, \dots, y_n+x_n)$$ (+ est commutative dans $\mathbb{K}$).
$$= \underline{y}+\underline{x}$$

$\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}+\underline{y} = \underline{y}+\underline{x} \dots ②$

③ Soit $\underline{0} = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Alors $$\underline{x}+\underline{0} = (x_1+0, x_2+0, \dots, x_n+0)$$
$$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$= \underline{x}$$

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}+\underline{0} = \underline{x} \dots ③$

④ Pour $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, soit $-\underline{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Alors $$\underline{x}+(-\underline{x}) = (x_1-x_1, x_2-x_2, \dots, x_n-x_n)$$
$$= (0, 0, \dots, 0)$$
$$= \underline{0}$$

$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n\ \exists (-\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x}+(-\underline{x}) = \underline{0} \dots ④$

⑤ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors $$\alpha(\beta\underline{x}) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \dots, \beta x_n)$$
$$= ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2, \dots, (\alpha\beta)x_n)$$
$$= (\alpha\beta)\underline{x}.$$

donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(\beta\underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x} \dots ⑤$

6) $1.x = 1(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n)$

$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$= x$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 1.x = x \dots$ 6

7) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Alors $\alpha(x + y) = \alpha(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$

$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \dots, \alpha x_n + \alpha y_n)$

$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \dots, \alpha y_n)$

$= \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) + \alpha(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$= \alpha x + \alpha y$.

Donc $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \dots$ 7

8 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors $(\alpha + \beta) x = (\alpha + \beta)(x_1, \dots, x_n)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \quad , \alpha x_n + \beta x_n)$

$= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \dots, \beta x_n)$

$= \alpha x + \beta x$

Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x \dots$ 8

De 1, 2, …, 8, on conclut que $(\mathbb{R}^n, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Scanné avec CamScanner

Ex03

① $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy + z = 0\}$, $V = \mathbb{R}^3$

Soient $a = (0,1,0)$, $b = (1,0,0)$.

$a, b \in W$, mais $a + b = (1,1,0) \notin W$ car $1.1 + 0 \neq 0$.

Donc W n'est pas un s.ev de $\mathbb{R}^3$

② $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

Nous avons $(0,0) \in W$ car $2.0 - 3.0 = 0$ .... (*)

Soit $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$.

Supposons $a, b \in W$, alors $2x_1 - 3y_1 = 0$ et $2x_2 - 3y_2 = 0$ .... (Δ)

$$\alpha a + \beta b = (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_2, \beta y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$$

Nous avons $2(\alpha x_1 + \beta x_2) - 3(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha(2x_1 - 3y_1) + \beta(2x_2 - 3y_2) = 0$ par (Δ)

Donc $\alpha a + \beta b \in W$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall a, b \in W$, $\alpha a + \beta b \in W$ .... (**)

De (*) et (**), on conclut que W est un s-ev de $\mathbb{R}^2$.

③ $W = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P = 5\}$ $V = \mathbb{R}[X]$.

Soit $P = X^5$, $Q = -X^5 + 1$.

Nous avons $P, Q \in W$, mais $P + Q = 1 \notin W$ car $\deg(1) = 0$.

Donc W n'est pas un s-ev de $\mathbb{R}[X]$.

④ $W = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg P \leq 3\}$, $V = \mathbb{R}[X]$.

Nous avons $0 \in W$ car $\deg(0) \leq 3$ .... (*)

Soient $P = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i$, $Q = \sum_{i=0}^{3} b_i X^i \in W$

Alors $\alpha P + \beta Q = \sum_{i=0}^{3} (\alpha a_i + \beta b_i) X^i \in W$.

Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall P, Q \in W$, $\alpha P + \beta Q \in W$ .... (Δ)

De ④, ②, on conclut que W est un s-ev de $\mathbb{R}[X]$. (5)

⑤ $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(1)=0\}$, $V = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

La fonction nulle $0 \in W$ ..... ②

Supposons que $f, g \in W$. Alors $f(1) = g(1) = 0$.

$$(\alpha f + \beta g)(1) = \alpha f(1) + \beta g(1)$$
$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0$$
$$= 0$$

Donc $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in W$, $\alpha f + \beta g \in W$..... ③

De ② et ③, on conclut que W est un s-ev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exo 6

① Soient
$$a = (1,2,3)$$
$$b = (0,+1,-1)$$
$$c = (2,0,1)$$

Soit $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $v = \alpha a + \beta b + \gamma c$ ... ①

$$① \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

On a la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & 1 & 0 & y \\ 3 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \text{......} ②$$

$$② \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -4 & -2x+y \\ 0 & -1 & -5 & -3x+z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -4 & -2x+y \\ 0 & 0 & -1 & -5x+y+z \end{array}\right] \begin{array}{l} — L_1 \\ — L_2 \\ — L_3 \end{array}$$

De L_3, on a $\gamma = 5x - y - z$ R1

De L_2, on a $\beta = 4\gamma - 2x + y$

$= 20x - 4y - 4z - 2x + y$

$= 18x - 3y - 4z$ R2

De L_1, on a $\alpha = -2\gamma + x$

$= -10x + 2y + 2z + x$

$= -9x + 2y + 2z$ ... R3

Donc $\underline{v} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$ où α, β, γ sont données par R1, R2 et R3.

On conclut que $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ c-à-d $\{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

Nous avons $(0,0,0) \in F$ ---- D1

Supposons que $\underline{v}, \underline{w} \in F$ où $\underline{v} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{w} = (x_2, y_2, z_2)$.

Alors $x_1 + y_1 + z_1 = 0$ et $x_2 + y_2 + z_2 = 0$.

$\alpha\underline{v} + \beta\underline{w} = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)$

$(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_3) = \alpha(x_1 + y_1 + z_1) + \beta(x_2 + y_2 + z_2)$

$= 0 + 0$

$= 0$

Donc $\alpha\underline{v} + \beta\underline{w} \in F$ ... D1

D1 et D2, on conclut que F est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = x + z = 0\}$

$(0,0,0) \in G$ ---- H1

De même, on prouve que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, w \in G, \alpha v + \beta w \in G$. (M2)

De (M1) et (M2), on conclut que G est un $\mathbb{R}$ s-ev de $\mathbb{R}^3$.

3) • $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

Soit $v = (x,y,z) \in F$.

$\Leftrightarrow x+y+z=0$

$\Leftrightarrow z = -x-y$

Donc si $x = s$ et $y = t$, alors $z = -s-t$.

Donc $v = (s, t, -s-t)$

$= (s, 0, -s) + (0, t, -t)$

$= s(1,0,-1) + t(0,1,-1)$

$= s\, a_1 + t\, a_2$ où $a_1 = (1,0,-1)$, $a_2 = (0,1,-1)$

Alors $F = \{s a_1 + t a_2 , s, t \in \mathbb{R}\}$

$F = Vect(a_1, a_2)$

ie $\{a_1, a_2\}$ est une famille génératrice de F.

• $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = x + z = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ x = t, y = t, z = -t, t \in \mathbb{R}\}$

$= \{(t,t,-t) : t \in \mathbb{R}\}$

$= \{t(1,1,-1) : t \in \mathbb{R}\}$

$G = Vect((1,1,-1))$ Donc $\{\underbrace{(1,1,-1)}_{= a_3}\}$ est une famille génératrice de G.

... prouver $\begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ F + G = \mathbb{R}^3 \end{cases}$

$$F + G = \{\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 \ , \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $v = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 \ldots\ldots (S)$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

On aura la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ -1 & -1 & -1 & z \end{array}\right] \ldots\ldots (B)$$

$$(B) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -1 & 0 & x+z \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{— } L1 \\ \text{— } L2 \\ \text{— } L3 \end{array}$$

De $L3$, nous aurons $\gamma = x + y + z \ \ldots\ldots (1)$

De $L2$, nous aurons $\beta = -\gamma + y$

$$= -x - y - z + y$$

$$\beta = -x - z \ \ldots\ldots (2)$$

De $L1$, nous aurons $\alpha = -\gamma + x$

$$= -x - y - z + x$$

$$= -y - z \ \ldots\ldots (3)$$

i.e. $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$

où $\alpha = -y - z$, $\beta = -x - z$, $\gamma = x + y + z$.

Donc $F + G = \mathbb{R}^3 \ldots\ldots (N_2)$

Supposons que $\underline{v} \in F \cap G$.

Alors $\underline{v} \in F$ et $\underline{v} \in G$.

Donc $\exists\ s, t \in \mathbb{R}$: $\underline{v} = s\underline{a}_1 + t\underline{a}_2$ M1

$\exists\ r \in \mathbb{R}$ $\quad \underline{v} = r\,\underline{a}_3$ M2

M1, M2, $\Longrightarrow$ $s\underline{a}_1 + t\,\underline{a}_2 - r\,\underline{a}_3 = \underline{0}$

Par ①, ② et ③, on a $s = t = r = 0$

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$

Donc $F \cap G = \{\underline{0}\}$ N2

De N1 et N2 on conclut que F et G sont supplémentaires i.e $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.