Série de TD n°5 : Conducteurs en équilibre électrostatique

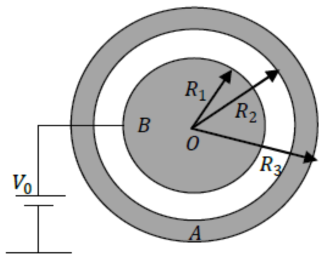
Exercice 1 :

Une sphère conductrice S_1, de centre O_1 et de rayon $R_1 = 10\ cm$, porte une charge électrique $Q = 10\ nC$.

1. Calculer son potentiel V et son énergie interne W ;
2. On relie, par un fil conducteur, S_1 à une seconde sphère conductrice S_2, initialement neutre, de centre O_2 et de rayon $R_2 = 1\ cm$. Les centres des deux sphères sont séparés par une distance $d = O_1O_2 = 50\ cm$. On néglige les caractéristiques du fil de jonction et on ne tient pas compte du phénomène d'influence. Calculer, à l'équilibre, les charges Q_1 et Q_2 portées respectivement par S_1 et S_2 ;
3. Calculer l'énergie du système formé par les deux sphères avant et après la connexion. Où est passée l'énergie perdue ?

Exercice 2 :

Un conducteur sphérique creux A, initialement neutre, de rayon intérieur $R_2 = 2R$ et rayon extérieur $R_3 = 4R$ entoure un deuxième conducteur sphérique B, de rayon $R_1 = R$, porté à un potentiel V_0 par l'intermédiaire d'un générateur (Voir figure ci-contre). Le conducteur B porte une charge Q_0.



1. Quelles sont les charges portées par les surfaces intérieure et extérieure du conducteur A ?
2. En appliquant le théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}$ dans les quatre régions suivantes : $r < R, R < r < 2R, 2R < r < 4R, r > 4R$

Exercice 3 :

1. Les caractéristiques d'un condensateur sont : sa capacité $C = 0.12\ mF$, épaisseur du diélectrique $e = 0.2\ mm$; permittivité relative de l'isolant $\varepsilon_r = 5$; tension de service $U_s = 100\ V$ et $\varepsilon_0 = 8.84\ 10^{-12} F/m$. Calculer :

a- La surface des armatures ;
b- La charge du condensateur soumis à la tension de service ;
c- L'énergie emmagasinée dans ces conditions.

2. Le condensateur étant chargé, on l'isole, puis on l'associe en parallèle à un condensateur de capacité $C_1 = 0.15\ mF$ initialement déchargé. Calculer :

a- La charge totale de l'ensemble formé par les deux condensateurs ;
b- La tension commune aux deux condensateurs en régime permanent ;
c- L'énergie emmagasinée par le montage.

Exercice 4 :

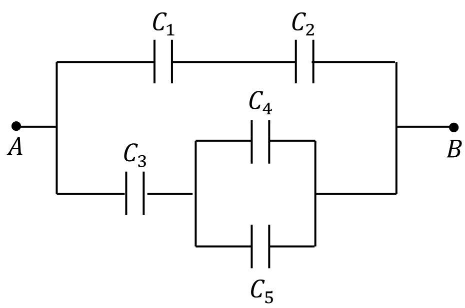
Un condensateur de capacité $C_1 = 3.3\ mF$ est chargé sous la tension $U_1 = 20\ V$, un autre condensateur de capacité $C_2 = 2200\ \mu F$ est chargé sous la tension $U_2 = 10\ V$.

1. Calculer les charges Q_1 et Q_2 de ces deux condensateurs ;
2. Les deux condensateurs sont isolés et branchés en parallèle. Quelle est alors la charge Q portée par l'ensemble?
3. En déduire la tension U aux bornes de l'ensemble.

Exercice 5 :

Soit le groupement de condensateurs de la figure ci-contre :

1. Calculer la capacité C_{AB} du condensateur équivalent ;



2. Une tension $U_{AB} = 220\ V$ est appliquée entre les points A et B. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.

On donne : $C_1 = C_2 = 1\ \mu F, C_3 = 220\ nF, C_4 = 70\ nF, C_5 = 720\ nF$

Exercice 6 : (à traiter en cours)

Déterminer l'expression de la capacité d'un condensateur sphérique et celle d'un condensateur cylindrique.

Exercices supplémentaires :

Exercice S1 : (suite de l'exercice 2)

1. En considérant que V_A est le potentiel du conducteur A et sachant que le potentiel électrique est nul à l'infini, déterminer l'expression du potentiel électrique V dans les quatre régions :

$$r < R, R < r < 2R, 2R < r < 4R, r > 4R$$

2. En déduire la charge Q_0 en fonction de R, V_0 et ε_0.

Exercice S2 :

Soit un condensateur plan constitué de deux armatures placées perpendiculairement à l'axe OX. L'armature positive porte la charge $(+Q)$ et est située à l'abscisse $x = 0$; l'armature négative est située à l'abscisse $x = e$. On note U la tension positive établie entre ces armatures.

1. Le condensateur étant isolé (la charge des armatures reste constante), on déplace l'armature négative de l'abscisse e à l'abscisse $e + h$. Établir l'expression de la nouvelle tension U' qui s'établit entre les armatures ;

2. Quel travail fournit l'opérateur lors de ce déplacement ?

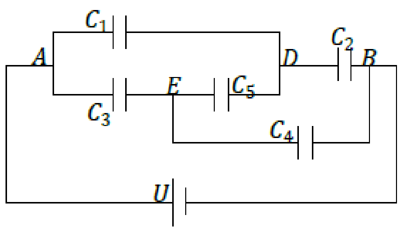
3. Quelle est la variation d'énergie potentielle du condensateur quand il passe de sa position initiale à sa position finale ? Conclure.

Exercice S3 :

Soit le montage de condensateurs comme indiqué sur la figure ci-contre.

1. Redessiner le schéma de ce montage en faisant apparaître la symétrie par rapport à la branche ED ;

2. Si $U = 100\ V$ et $U_{ED} = 0\ V$, calculer la capacité du condensateur équivalent, la charge de chaque condensateur ainsi que la différence de potentiel entre les armatures de chaque condensateur. On donne : $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1\ \mu F$

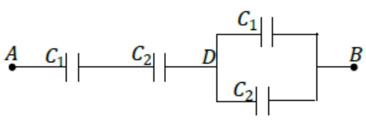


Exercice S4 :

Soit le groupement de condensateurs de la figure ci-contre :

1. La capacité C_1 étant donnée, quelle doit être la capacité C_2 pour qu'il y ait entre A et B une capacité équivalente C_e telle que $C_e = C_2$? A.N. : $C_1 = 8\ \mu F$

2. Une tension $U_{AB} = 500\ V$ est appliquée entre les points A et B. Calculer les tensions aux bornes de chaque condensateur ainsi que les charges qu'ils portent.



Corrigé de la série n°4

Exercice 1 :

$$V = K\frac{Q}{R_1}\ ; W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}K\frac{Q^2}{R_1}$$

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ V_1 = V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ K\frac{Q_1}{R_1} = K\frac{Q_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ Q_2 = \frac{R_2}{R_1}Q_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)Q \\ Q_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)Q \end{cases}$$

$$W_{av} = W_{av1} + W_{av2} = \frac{1}{2}K\frac{Q^2}{R_1}$$

$$W_{ap} = W_{ap1} + W_{ap2} = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}Q_2V_2 = \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2)V_1 = \frac{1}{2}QV_1 = \frac{1}{2}Q\left(K\frac{Q_1}{R_1}\right) = \frac{1}{2}K\frac{Q}{R_1}\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)Q$$
$$= \frac{1}{2}K\frac{Q^2}{R_1 + R_2} < W_{av}$$

Une partie de l'énergie initiale a été dissipée en chaleur par effet Joule dans le fil de jonction

Exercice 2 :

$$\begin{cases} Q_{A,int} = -Q_0 \text{ (Influence totale)} \\ Q_{A,ext} = -Q_{A,int} = Q_0 \text{ (le conducteur A est neutre)} \end{cases}$$

Symétrie sphérique (champ radial) : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

Surface de Gauss : sphère de centre O et de rayon $r = OM$

Flux :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = ES_G = E(4\pi r^2)$$

Théorème de Gauss :

$$\Phi = \oiint_{(S_G)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r < R \Rightarrow Q_{int} \Rightarrow E = 0$$

$$R < r < 2R \Rightarrow Q_{int} = Q_0 \Rightarrow E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$2R < r < 4R \Rightarrow Q_{int} = Q_0 - Q_0 = 0 \Rightarrow E = 0$$

$$r > 4R \Rightarrow Q_{int} = Q_0 - Q_0 + Q_0 = Q_0 \Rightarrow E = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Exercice 3 :

$$C_1 = \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{S}{e} \Rightarrow S = \frac{C_1 e}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$Q = C_1U_s$$

$$W = \frac{1}{2}QU_s$$

$$\begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ U_1 = U_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 + Q_2 = Q \\ \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2}\right)Q \\ Q_2 = \left(\frac{C_2}{C_1 + C_2}\right)Q \end{cases}$$

$$U = U_1 = U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C_1 + C_2}$$

$$W = \frac{1}{2}C_1U_1^2 + \frac{1}{2}C_2U_2^2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2$$

Exercice 4 :

$$Q_1 = C_1U_1 \; ; \; Q_2 = C_2U_2$$

$$\begin{cases} Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \\ U_1' = U_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \\ \dfrac{Q_1'}{C_1} = \dfrac{Q_2'}{C_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1' = \left(\dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\right)(Q_1 + Q_2) \\ Q_2' = \left(\dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\right)(Q_1 + Q_2) \end{cases}$$

$$U = U_1' = U_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2}$$

Exercice 5 :

$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} \; ; \; C_{45} = C_4 + C_5 \; ; \; C_{345} = \frac{C_3C_{45}}{C_3 + C_{45}} \; ; \; C_{AB} = C_{12} + C_{345}$$

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ Q_3 = Q_4 + Q_5 \\ Q_{AB} = C_{AB}U_{AB} = Q_1 + Q_3 \\ U_4 = U_5 \\ U_{AB} = U_1 + U_2 = U_3 + U_4 \end{cases}$$