CHAPITRE 3

Les Matrices et Déterminants

1.1 Introduction

L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser des problèmes issus de divers domaines : physiques, biologie, mécaniques, chimie,...

Les matrices servent à interpréter en termes de calculs opérationnels les résultats théoriques de l'algèbre linéaire. Toutes les disciplines étudiant des phénomènes linéaires utilisent des matrices.

1.2 Généralités sur les matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{k}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définitions et notations :

Définition 1.1 *Soient n et p deux entiers positifs.*

Une matrice A de dimension np est une application de $\{1,2,....,n\}\times\{1,2,....,p\}$ dans $\mathbb{k}$.

On note par a_{ij} l'image du couple (i,j) par l'application A.

Alors on écrit A sous la forme :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix},$$

ou plus simplement $A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,p}}$.

Les a_{ij} sont appelés les coefficients (les composantes) de la matrice A.

L'indice i désigne les lignes, l'indice j désigne les colonnes.

n désigne le nombre de lignes de la matrice A et p désigne le nombre de colonnes de la matrice A.

L'élément a_{ij} est l'élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne.

On note $M_{n,p}(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{k}$, c'est à dire si $A\in M_{n,p}(\mathbb{k})$ alors A est une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Exemple 1.1 *La matrice A de type $(4,3)$ définie par :* $a_{11} = -1, a_{12} = \sqrt{2}, a_{13} = 5, a_{21} = -2, a_{22} = \frac{3}{2}, a_{23} = 0, a_{31} = 4, a_{32} = 1, a_{33} = 3, a_{41} = 0, a_{42} = 6, a_{43} = -4$ *se note par :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est une matrice de 4 lignes et 3 colonnes.

Egalité de deux matrices :
Soient $A = (a_{ij})\,, B = (b_{ij}) \in M_{np}(K)\,.$
On dit $A = B$ si et seulement si $a_{ij} = b_{ij}\ \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$
Transposée d'une matrice :

Définition 1.2 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\Bbbk)$. On appelle transposée de A la matrice notée ${}^tA$ de $M_{p,n}(\Bbbk)$ définie par ${}^tA = (a_{ji})$.*

Exemple 1.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}, \quad alors \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & \frac{3}{2} \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les lignes de A sont les colonnes de ${}^tA$.

Propriété :
$\forall A \in M_{n,p}(\Bbbk)$ on a ${}^t({}^tA) = A.$
Matrices particulières :
Matrice nulle :

Définition 1.3 *On dit $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\Bbbk)$ est nulle si et seulement si $a_{ij} = 0, \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$*

La matrice nulle dans $M_{n,p}(\Bbbk)$, est noté $0_{M_{n,p}(\Bbbk)}$.

Exemple 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice ligne :

Une matrice ne contenant qu'une seule ligne (de dimension $1 \times p$) est appelée matrice ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrice colonne :

Une matrice ne contenant qu'une seule colonne (de dimension $n \times 1$) est appelée matrice colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \pi \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Matrice carrée :

Une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes ($n = p$) est appelée matrice carrée.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$ se note $M_{n,n}(\mathbb{k})$ ou plus simplement par $M_n(\mathbb{k})$.

Diagonale d'une matrice carrée :

Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux et on appelle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & ... & a_{ii} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

diagonale de A.

Exemple 1.6

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux sont $-1, \frac{3}{2}$ *et* -4, *et la diagonale de* A *est*

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix}.$$

Trace d'une matrice carrée :

On appelle trace d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ la somme des coefficients diagonaux et on écrit :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{i=n} a_{ii}.$$

Exemple 1.7

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 5 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 6 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

alors $Tr(A) = -1 + \frac{3}{2} + (-4) = -\frac{7}{2}$.

1.2.1 Matrices carrés particulières

Matrice diagonale :

La matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice diagonale si : $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Exemple 1.8

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

sont des matrices diagonales.

Matrice identité :

La matrice identité d'ordre n est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont égaux à 1 et on la note I_n .

Exemple 1.9

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

Matrices scalaires :

Les matrices de la forme : $A = \lambda I_n$ où $\lambda \in \mathbb{k}$ sont dites matrices scalaires.

Exemple 1.10

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2,$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)\, I_3,$$

sont des matrices scalaires

Matrice triangulaire supérieure :

Définition 1.4 *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice triangulaire supérieure si : $a_{ij} = 0$ pour tous $i > j$.*

C'est à dire tous les coefficients situés en dessous de la diagonale sont nuls.

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite matrice triangulaire inférieure si : $a_{ij} = 0$ pour tous $i < j$.

C'est à dire tous les coefficients situés au dessus de la diagonale sont nuls.

Exemple 1.11

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A et B sont des matrices triangulaires supérieures.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

C et D sont des matrices triangulaires inférieures.

1.2.2 Opérations sur les matrices

Somme de deux matrices :

Définition 1.5 *Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$. On définit la somme de A et B et on note $A + B$ la matrice $A + B = (c_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ tel que :*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq p.$$

Exemple 1.12

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2+5 & 1+(-4) & 3+5 \\ 4+7 & 2+3 & 1+\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 11 & 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+(-3) & 3+\frac{5}{2} \\ 4+3 & 2+(-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & \frac{11}{2} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque 1.1 *$A \begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$ Impossible car A est de type 2×3 et B est de type 2×2.*

Multiplication d'une matrice par un scalaire :

Définition 1.6 *Soient $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, alors*

$$\lambda A = \lambda (a_{ij}) = (\lambda a_{ij}) \ \ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

Exemple 1.13 *Soient*

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5&-4&5\\7&3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

On a :

$$3A=3\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&9\\12&6&3\end{pmatrix}.$$

$$\frac{1}{4}B=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}5&-4&5\\7&3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}&-1&\frac{5}{4}\\\frac{7}{4}&\frac{3}{4}&\frac{1}{8}\end{pmatrix}.$$

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$ et λ,μ deux réels. Alors on :

1) $A+B=B+A$ (+ commutative)
2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ (+ associative)
3) $A+0=0+A=A$ (0 matrice nulle élément neutre)
4) $A+(-A)=(-A)+A=0$ ($-A$ opposée de A)
5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
7) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$
8) $1\times A=A$ et $0\times A=0$ (ne pas confondre 0 scalaire et 0 matrice nulle).

Remarque 1.2 *Compte tenu des propriétés ci-dessus, l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{k})$ muni des deux lois précédentes est un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$.*

Produit de deux matrices :

Définition 1.7 *Soient $A=(a_{ij})\in M_{n,p}(\mathbb{k})$ et $B=(b_{jk})\in M_{p,m}(\mathbb{k})$ (c'est à dire le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B). On définit alors le produit de A et B dans cet ordre par la matrice $C=A\times B=(c_{ik})$ de $M_{n,m}(K)$ tel que :*

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}.b_{jk}.$$

Exemple 1.14

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 9 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 5 \\ 7 & 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \textit{Impossible.}$$

Remarques importantes :

1. Si le nombre de colonnes de A est différent du nombre de lignes de B, alors le produit $A \times B$ n'est pas défini.

2. En général, et lorsque le produit est bien défini, on a $A \times B \neq B \times A$, alors on a aussi

$(A + B)^2 \neq A^2 + B^2 + 2AB$,
$(A - B)^2 \neq A^2 + B^2 - 2AB$,
$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$.

3. Le produit des matrices carrées d'ordre n est toujours défini.

4. L'égalité $A \times B = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple 1.15 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais

$$A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. L'égalité $A \times B = A \times C$ n'implique pas $B = C$.

Exemple 1.16 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 10 & 20 \end{pmatrix},$$

et

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que : $AB = AC$. *Mais* $B \neq C$.

Propriétés :

Soient A, B et C trois matrices. Lorsque le produit est bien défini, on a

1. $A(B+C) = AB + AC$.
2. $(AB)C = A(BC)$.
3. En général, $AB \neq BA$ (le produit des matrices est une opération qui n'est pas commutative).

Exemple 1.17 *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix},$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 25 & 40 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que :

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ -1 & 10 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 & 25 & 40 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc en général, $AB \neq BA$.

1.2.3 Matrices carrées inversibles

Définition 1.8 *Soit* $A \in M_n(\Bbbk)$, *on dit que* A *est inversible si et seulement si il existe* $B \in M_n(\Bbbk)$ *telle que*

$$AB = BA = I_n.$$

Si A *est inversible alors* B *est unique et est appelée inverse de* A *(notée* A^{-1}*).*

Exemple 1.18 *Soit*

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

est l'inverse de A car :

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.1 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{k})$, alors la matrice AB est aussi inversible et*

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Proposition 1.2 *Soient A, B deux matrices inversibles de $M_n(\mathbb{k})$ et $\lambda, \beta \in \mathbb{k}$ alors on a :*

1. ${}^t(\lambda A+\beta B)=\lambda\left({}^tA\right)+\beta\left({}^tB\right)$.
2. ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ${}^t(A^n)=\left({}^tA\right)^n$.
4. *Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ et inversible on a* $\left({}^tA^{-1}\right)=\left({}^tA\right)^{-1}$.

Matrices symétriques :

Définition 1.9 *Une matrice carrée est dite symétrique si et seulement si :*

$${}^tA=A.$$

Autrement dit A est symétrique par rapport à sa diagonale.

Exemple 1.19 *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \sqrt{3} & 4 \\ \frac{2}{3} & -2 & 5 & \frac{6}{7} \\ \sqrt{3} & 5 & 3 & -1 \\ 4 & \frac{6}{7} & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

est symétrique.

Matrice antisymétrique :

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite antisymétrique si et seulement si : ${}^tA = -A$.

Matrice orthogonale :

Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{k})$ est dite orthogonale si et seulement si : $A({}^tA) = ({}^tA)A = I_n$.

Propriété :

Si A est une matrice orthogonale, alors A est inversible et $A^{-1} = ({}^tA)$.

Matrices équivalentes :

Soient A, B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{k})$. On dit que A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices carrées inversibles $P \in M_p(\mathbb{k})$ et $Q \in M_n(\mathbb{k})$ telles que $B = Q^{-1}AP$.

Matrices semblables :

Soient A, B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{k})$. On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice carrée P inversible d'ordre n telle que $B = P^{-1}AP$.

1.3 Déterminants

1.3.1 Calcul des déterminants

Définition 1.10 *Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice carrée de $M_n(\mathbb{k})$.*

On appelle déterminant de A développé suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne le scalaire

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik},$$

où A_{ij} est la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On appelle déterminant de A développé suivant la $j^{ème}$ colonne le scalaire

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}.$$

On utilise également la notation :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Remarque 1.3 *Les déterminants ne concernent que les matrices carrées.*
Le déterminant d'une matrice carrée est unique.

Cas de déterminant d'ordre 2 :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{k}).$$

Alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Exemple 1.20

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (-4)(-1) = -10,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -7 \\ -\pi & 4 \end{vmatrix} = \left(\frac{5}{2}\right)(4) - (-\pi)(-7) = 10 - 7\pi.$$

Cas de déterminant d'ordre 3 :
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{k}).$$

Alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Première méthode : Développement suivant la première ligne.

$$\det A = (-1)^{1+1}(a_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(a_{12}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(a_{13}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}).$$

Deuxième méthode : Développement suivant la troisième colonne.

$$\det A_{3\times 3} = (-1)^{1+3}(a_{13}) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(a_{23}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(a_{33}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Exemple 1.21 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer detA.

Développement la première ligne :

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1}(3) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-7) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(8) \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (3)(4+2) + (7)(-3-10) + (8)(3-20) = -209.$$

Développement la troisième colonne :

$$detA = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -3 & 4 & 2 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+3}(8)\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(2)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(1)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (8)(3-20) - (2)(-3+35) + (12-21) = -209.$$

La règle de Sarrus :

Cette règle est valable uniquement pour les matrices carrées d'ordre 3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Propriétés des déterminants :

Soient A, B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{k})$ et $\lambda \in \mathbb{k}$.

1) $\det I_n = 1$.

2) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

3) $\det(AB) = \det A \det B$.

4) $\det(A^m) = (\det A)^m, m \in \mathbb{N}^*$.

5) A est inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$ de plus $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

6) $\det({}^tA) = \det A$.

7) Le déterminant de A ne change pas de valeur si on ajoute à une colonne une combinaison linéaires d'autres colonnes.

8) Un déterminant est nul si l'une de ses colonnes est nulle.

9) Un déterminant est nul si ses colonnes (resp. ses lignes) sont liées.

10) Si A est une matrice triangulaires inférieure ou supérieure, alors $\det A = \Pi_{i=1}^n a_{ii}$.

1.3.2 Calcul de l'inverse d'une matrice en utilisant le déterminant

La formule $AA^{-1} = I_n$ permet de calculer l'inverse A^{-1} de la matrice inversible A. On détermine ici une formule plus performante de calcul de A^{-1}. Cette formule utilise les comatrices.

Définition 1.11 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$. On appelle cofacteur de la place (i,j) dans A et on note c_{ij} le nombre :*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

où : A_{ij} est la matrice d'ordre $(n-1)$ déduite de A en supprimant la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne.

Définition 1.12 *On appelle comatrice de A la matrice carrée d'ordre n définie par :*

$$comA = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{ni} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

où c_{ij} est le cofacteur de la place (i,j) dans A.

Théorème 1.22 *Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{k})$, alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t(comA).$$

Exemple 1.23 *Soit la matrice de $M_2(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer A^{-1} si elle existe.
On a : $detA = 8 \neq 0$, donc A^{-1}existe.

$$ComA = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(4) & (-1)^{1+2}\det(2) \\ (-1)^{2+1}\det(-3) & (-1)^{2+2}\det\left(\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$ComA = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad {}^t(ComA) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.24 *Soit la matrice de* $M_3(\mathbb{R})$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculer B^{-1} *si elle existe.*
On a : $detB = 25 \neq 0$, *donc* B^{-1}*existe.*

$$ComB=\begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

donc

$$ComB=\begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 7 & -3 & 5 \\ 8 & -7 & -5 \end{pmatrix},$$

d'où

$${}^t(ComB)=\begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 8 & -3 & -7 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$B^{-1}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix} -2 & 7 & 8 \\ 8 & -3 & -7 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{25} & \frac{7}{25} & \frac{8}{25} \\ \frac{8}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{7}{25} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

1.4 Exercices

Exercise 1.25 *Calculer le déterminant de la matrice suivante :*

$$A=\begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, *déduire* A^n *en fonction de* n *.*

Exercise 1.26 *Soit A la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer A^2, A^3, A^4 .

b) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$, déduire A^n en fonction de n.

Exercise 1.27 *Déterminer le rang des matrices suivantes. Etudier si elles sont inversibles. Si oui calculer l'inverse*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercise 1.28 *Calculer le déterminant suivant :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

a) par la règle de Sarrus.

b) En le développant suivant la première colonne puis la troisième ligne.

c) En faisant apparaître des zéros dans la première ligne.

Exercise 1.29 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer AB, BA, A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(BA)^{-1}$.

2) Calculer $2M$, M^2, $2M - M^2$, en déduire M^{-1} .