Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST Juin 2021

<u>Série de TD n° 03 de Maths 2</u> (Calcul Matriciel)

Exercice 1. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer si elles existent, les matrices suivantes :
$AB, \; BA, \; AC, \; CA, \; (B+C), \; (A+B), \; A^2, \; C^2, {}^tCA, \; {}^tB, \; {}^tC, \; {}^tA{}^tC.$

Exercice 2. On considère la matrice suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le déterminant de B.
- En développant selon la deuxième ligne.
- En développant selon la troisième colonne.
- En utilisant la règle de Sarrus.

b. B est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse.

Exercice 3. On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$, où I_3 est la matrice identité et $0_{M_3(\mathbb{R})}$ est la matrice nulle.

2) Déduire que A est inversible, puis donner son inverse A^{-1} sans calcul.

Exercice 4.

I. Soient A, B deux matrices carrées de taille n, on note I_n la matrice d'identité.
On suppose que : $AB = I_n + A + A^2$
Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1} en fonction de A, B et I_n.

II. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ deux matrices.
Calculer $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$, puis comparer.

III. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.
- Trouver la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$, où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et I_2 est la matrice identité.
- Vérifier que $BA = AB = I_2$, que représente la matrice B ?