Université A/ Mira de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie
$1^{ère}$ année ST

Juin 2021

Corrigé de la série N°3 de Maths II

Exercice 1. Soient les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculons si elles existent, les matrices suivantes :

- la matrice AB existe car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .
$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times (-2) & 1 \times (-3) + 2 \times 1 \\ 3 \times 4 + 4 \times (-2) & 3 \times (-3) + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- la matrice BA existe car le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A .
$$BA = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
- la matrice AC existe car le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de C .
$$\begin{aligned} AC &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 2 \times 2 & 1 \times (-3) + 2 \times 1 & 1 \times 1 + 2 \times (-1) \\ 3 \times 4 + 4 \times 2 & 3 \times (-3) + 4 \times 1 & 3 \times 1 + 4 \times (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 20 & -5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
- CA n'est pas défini car le nombre de colonnes de C est différent du nombre de lignes de A.
- $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2-3 \\ 3-2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
- $B + C$ n'existe pas car les matrices B et C n'ont pas les même dimensions (elles ne sont pas de la même taille).
- La matrice A^2 existe car la matrice A est une matrice carrée d'ordre 2.
$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$$
- C^2 : n'est pas défini car la matrice C n'est pas carrée
(matrice carrée : nombre de ses lignes = au nombre de ses colonnes).
- La matrice ${}^tCA$ est défini :
on a :
$${}^tC = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc

$$
{}^tCA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 0 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}
$$

- La transposée de B est la matrice ${}^tB$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de B,

  c-à-d ${}^tB = (b_{ji})$.

  $${}^tB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

- La transposée de C est la matrice ${}^tC$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de C,

  c-à-d ${}^tC = (c_{ji})$.

  $${}^tC = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice ${}^tA{}^tC$ n'existe pas.

  On a

  $${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tC = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  mais le produit ${}^tA{}^tC$ n'existe pas, car le nombre de colonnes de ${}^tA$ est différent du nombre de lignes de ${}^tC$.

  Remarque Le produit ${}^tC{}^tA$ existe

  $${}^tC{}^tA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -1 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

  Retenons bien la propriété : ${}^t(AC) ={}^t C{}^tA$.

Exercice 2. Soit la matrice B suivante :

$$
B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}
$$

a. Calculons le déterminant de B.

1) En développant selon la deuxième ligne.

Le déterminant de B en développant la ligne 2 est donné par :

$\sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j} \times b_{2j} \times \det B_{2j}$, avec B_{2j} est la matrice obtenue à partir de B, en supprimant la ligne 2 et la colonne j.

Donc

$$
\begin{aligned}
\det(B) &= (-1)^{2+1} \times b_{21} \times \det B_{21} + (-1)^{2+2} \times b_{22} \times \det B_{22} + (-1)^{2+3} \times b_{23} \times \det B_{23} \\
&= (-1)^{2+1} \times 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \times (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

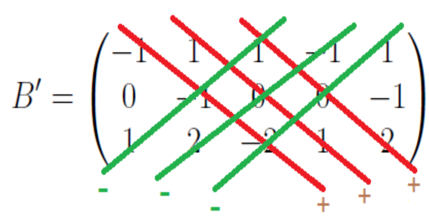
2) En développant selon la troisième colonne.
Le déterminant de B en développant la colonne 3 est donné par :
$\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+3} \times b_{i3} \times \det B_{i3}$, avec B_{i3} est la matrice obtenue à partir de B, en supprimant la ligne i et la colonne 3.

Donc

$$\begin{aligned}
\det(B) &= (-1)^{1+3} \times b_{13} \times \det B_{13} + (-1)^{2+3} \times b_{23} \times \det B_{23} + (-1)^{3+3} \times b_{33} \times \det B_{33} \\
&= (-1)^{1+3} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \times 0 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \times (-2) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -1
\end{aligned}$$

3) En utilisant la règle de Sarrus.
Soit B' la matrice obtenue à partir de B en ajoutant la première colonne comme quatrième et la deuxième comme cinquième, donc on obtient la matrice suivante :

$$B' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Alors
$$\begin{aligned}
\det(B) &= \big((-1) \times (-1) \times (-2) + 1 \times 0 \times 1 + 1 \times 0 \times 2\big) \\
&\quad -\big((1 \times (-1) \times 1 + (-1) \times 0 \times 2 + 1 \times 0 \times (-2)\big) \\
&= \big(-2 + 0 + 0\big) - \big(-1 + 0 + 0\big) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Remarque : Attention cette règle ne s'applique qu'aux matrices carrées d'ordre 3.

b. La matrice B est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0, on a $det(B) = -1 \neq 0$, donc B est inversible.

Calculons l'inverse de B, on a $B^{-1} = \dfrac{1}{det(B)} \, {}^{t}(comB)$.
où $comB$ est la comatrice de B définie par :

$$comB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

où c_{ij} est le cofacteur de la place (i, j) dans B, tel que $c_{ij} = (-1)^{i+j} \times \det(B_{ij})$.

où B_{ij} la matrice d'ordre (2) déduite de B en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
Donc,

$$comB = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

$$comB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad {}^t(comB) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) on a $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Nous vérifions que

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Déduire que A est inversible.

on a

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_3 = 0_{M_3(\mathbb{R})} &\implies A(A - 3I_3) = -2I_3 \\ &\implies \frac{-1}{2}A(A - 3I_3) = I_3 \\ &\implies A\Big(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\Big) = I_3 \end{aligned}$$

A est inversible car il existe $A' = \Big(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\Big)$ telle que

$$AA' = I_3$$

on a

$$A^{-1} = A' = \left(\frac{-1}{2}A + \frac{3}{2}I_3\right) = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après calculs, on obtient

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

I. $AB = I_n + A + A^2 \Leftrightarrow AB - A - A^2 = I_n$ et donc $A(B - I_n - A) = I_n$, de ce fait $A^{-1} = (B - I_n - A)$.

II. $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 44 & 0 \\ 40 & 24 \end{pmatrix}$ et $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 34 & 24 \\ 20 & 34 \end{pmatrix}$ donc $A^2 + 2AB + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

III. on a $AB = I_2$,
par identification et après calculs, on obtient :
$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{-7}{24} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ Il est facile de vérifier que $BA = AB = I_2$, la matrice B représente la matrice inverse de A (c'est à dire $B = A^{-1}$)