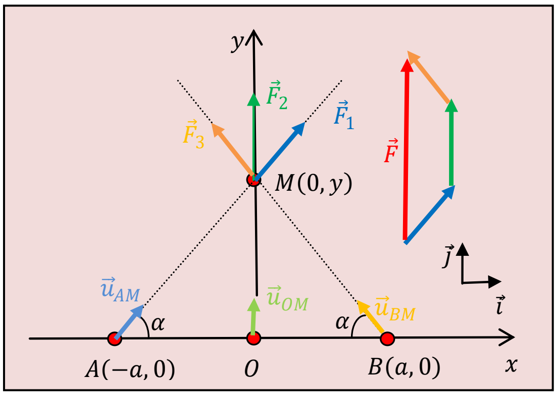
Corrigé de la série spéciale de physique 2

Exercice 1

1. Calcul de la force exercée sur la charge q

La charge q est soumise aux forces électrostatiques suivantes :

- $\vec{F}_1 = \frac{Kq_A.q_M}{\|AM\|^2}\vec{u}_{AM} = \frac{KQq}{y^2+a^2}(\cos\alpha\, i + \sin\alpha\, \vec{j}\,)$
- $\vec{F}_2 = \frac{Kq_O.q_M}{\|OM\|^2}\vec{u}_{OM} = \frac{KQq}{y^2}\vec{j}$
- $\vec{F}_3 = \frac{Kq_B.q_M}{\|BM\|^2}\vec{u}_{BM} = \frac{KQq}{y^2+a^2}(-\cos\alpha\, i + \sin\alpha\, \vec{j}\,)$



La résultante des forces exercée sur la quatrième charge est :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = KQq\left(\frac{2\sin\alpha}{y^2+a^2} + \frac{1}{y^2}\right)\vec{j}$$

Or, la figure ci-dessus nous donne :

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}}$$

La force devient :

$$\boldsymbol{\vec{F} = KQq\left(\frac{2y}{(y^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{y^2}\right)\vec{j}}$$

2. Calcul du champ créé au point M

1ère méthode

On a : $\vec{F} = q_M.\vec{E}(M)$

Alors :

$$\vec{E}(M) = \frac{\vec{E}(M)}{q_M} = KQ\left(\frac{2\,y}{(y^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{y^2}\right)\vec{j}$$

2ème méthode

Les charges q_A, q_o et q_B créent au point M les champs électrostatiques :

- $\vec{E}_A(M) = \frac{Kq_A}{\|AM\|^2}\vec{u}_{AM} = \frac{KQ}{y^2+a^2}(\cos\alpha\, i + \sin\alpha\, \vec{j}\,)$
- $\vec{E}_O(M) = \frac{Kq_O}{\|OM\|^2}\vec{u}_{OM} = \frac{KQ}{y^2}\vec{j}$
- $\vec{E}_B(M) = \frac{Kq_B}{\|BM\|^2}\vec{u}_{BM} = \frac{KQ}{y^2+a^2}(-\cos\alpha\, i + \sin\alpha\, \vec{j}\,)$

Le champ total créé en M s'ecrit :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_O(M) + \vec{E}_B(M)$$

On trouve :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = KQ\left(\frac{2\,y}{(y^2+a^2)^{3/2}} + \frac{1}{y^2}\right)\vec{j}}$$

3. Potentiel produit en M

Les trois charges produisent en M les potentiels suivants :

- $V_A(M) = \frac{Kq_A}{\|AM\|} = \frac{KQ}{\sqrt{y^2+a^2}}$
- $V_O(M) = \frac{Kq_O}{\|OM\|} = \frac{KQ}{y}$
- $V_B(M) = \frac{Kq_B}{\|BM\|} = \frac{KQ}{\sqrt{y^2+a^2}}$

Le principe de superposition du potentiel électrostatique, s'écrit :

$$V(M) = V_A(M) + V_O(M) + V_B(M)$$

On aura donc :

$$\boldsymbol{V(M) = KQ\left(\frac{2}{\sqrt{y^2+a^2}} + \frac{1}{y}\right)}$$

Connaissant le potentiel, il est aisé de retrouver l'expression du champ électrique établie dans la question 2. En effet, ces deux grandeurs sont reliées par la relation suivante :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)$$

Puisque le potentiel ne dépend que de la variable, on vérifie que :

$$\vec{E}(M) = -\frac{dV}{dy}\vec{j}$$

4. Energie potentielle de la charge $q_M = q$

L'énergie potentielle de la charge q dans le

Champ des autres charges est :

$$E_p = q_M . V(M)$$

Où $V(M)$ est le potentiel électrostatique produit par les charges q_A, q_o et q_B au point M.

En substituant le potentiel $V(M)$ dans l'énergie potentielle E_p, on aura :

$$\boldsymbol{E_p = KQq\left(\frac{2}{\sqrt{y^2+a^2}} + \frac{1}{y}\right)}$$

5. Energie potentielle du système de charges $\{q_A, q_O, q_B\}$

L'énergie potentielle du système des trois charges s'écrit :

$$E_p(q_A, q_O, q_B) = E_p(q_A, q_O) + E_p(q_A, q_B) + E_p(q_O, q_B)$$

Avec :

$$E_p(q_A, q_O) = \frac{Kq_A . q_O}{\|\overrightarrow{AO}\|} = \frac{KQ^2}{a}$$

$$E_p(q_A, q_B) = \frac{Kq_A . q_B}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{KQ^2}{2a}$$

$$E_p(q_O, q_B) = \frac{Kq_O . q_B}{\|\overrightarrow{OB}\|} = \frac{KQ^2}{a}$$

En remplaçant dans l'énergie du système, on trouve :

$$\boldsymbol{E_p(q_A, q_O, q_B) = \frac{5}{2}\left(\frac{KQ^2}{a}\right)}$$

Exercice 2

1. Champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en $M(0, y)$ par le fil

Prenons une charge élémentaire dq. Cette charge crée en $M(0,y)$ le champ élémentaire $d\vec{E}(M)$ qui s'écrit :

$$d\vec{E}(M) = \frac{Kdq}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\vec{u}_{PM}$$

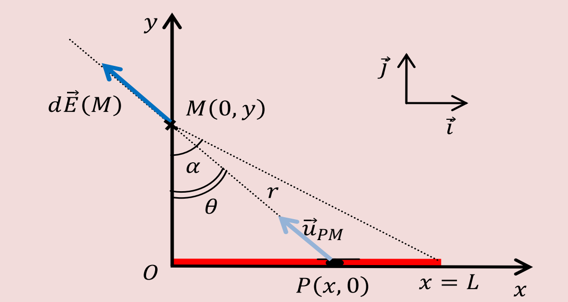
Où

$$dq = \lambda dL = \lambda dx$$

D'après la figure, on a :

$x = y \tan\theta$ Alors $dx = \frac{y}{\cos^2\theta}d\theta$

et $\|\overrightarrow{PM}\| = r = \frac{y}{\cos\theta}$



Champ élémentaire créé en *M* par la charge élémentaire *dq*.

cartésienne :

$$\vec{u}_{PM} = -\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$

On porte les équations précédentes dans le champ élémentaire, on aura :

$$d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda}{y}(-\sin\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j})d\theta$$

En intégrant sur tout le fil, c.-à-d. l'angle θ varie de 0 jusqu'à α, on trouve le champ total suivant :

$$\boldsymbol{\vec{E}(M) = \int d\vec{E}(M) = \frac{K\lambda}{y}[(\cos\alpha - 1)\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}]}$$

2. Potentiel électrostatique $V(M)$ produit-en M

La loi de circulation du champ électrostatique permet d'écrire :

$$V(M) = -\int \vec{E}.\vec{dl}$$

Entre deux points $M(0, y)$ et $M'(0, y + dy)$ de l'axe(Oy), le vecteur déplacement élémentaire $\vec{dl}$ est :

$$\vec{dl} = (dy)\vec{j}$$

Le potentiel devient :

$$V(M) = -\int \frac{K\lambda}{y} \sin\alpha \, dy$$

Après intégration, on obtient :

$$\boldsymbol{V(M) = K\lambda \sin\alpha \ln\left(\frac{1}{y}\right) + C}$$

où C est une constante d'intégration.

3. Calcul du champ et du potentiel

(a) Champ et potentiel créés en M' symétrique de M par rapport à l'axe (Ox)

(i) Calcul du champ

En raison de la symétrie par rapport à l'axe qui porte le fil chargé, le champ créé en M' est le champ symétrique du champ créé en M. Par conséquent :

$$\boldsymbol{\vec{E}\ (M') = \vec{E}_{\vec{j}\to-\vec{j}}(M) == \frac{K\lambda}{y}[(\cos\alpha - 1)\vec{\imath} - \sin\alpha\,\vec{j}]}$$

(ii) Calcul du potentiel

Le potentiel $V(M')$ produit en M' s'écrit :

$$V(M') = \int \frac{Kdq}{\|\overrightarrow{PM'}\|} = \int \frac{Kdq}{\|\overrightarrow{PM}\|} = V(M)$$

On aura donc :

$$\boldsymbol{V(M') = K\lambda \sin\alpha \ln\left(\frac{1}{y}\right) + C = V(M)}$$

(b) Champ et potentiel créés en M par un fil infini

(i) Calcul du champ

Un fil semi-infini porté par l'axe (Ox) crée en M le champ :

$$\vec{E}_1(M) = \vec{E}_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}(M) = \frac{K\lambda}{y}[-\vec{\imath} + \vec{j}]$$

Par symétrie par rapport l'axe (Oy), le fil semi-infini porté par l'axe (Ox') crée en M le champ :

$$\vec{E}_2(M) = \frac{K\lambda}{y}[\vec{\imath} + \vec{j}]$$

Le champ total créé par le fil infini est d'après le principe de superposition :

$$\boldsymbol{\vec{E}_{Total}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = 2\frac{K\lambda}{y}\vec{j}}$$

(ii) Calcul du potentiel

La loi de circulation du champ électrostatique permet d'écrire :

$$V(M) = -\int \vec{E}.\vec{dl}$$

$$V(M) = -\int 2\frac{K\lambda}{y}dy$$

Après intégration on trouve :

$$\boldsymbol{V(M) = 2K\lambda \ln\left(\frac{1}{y}\right) + C}$$

où C est une constante d'intégration.

Exercice 3

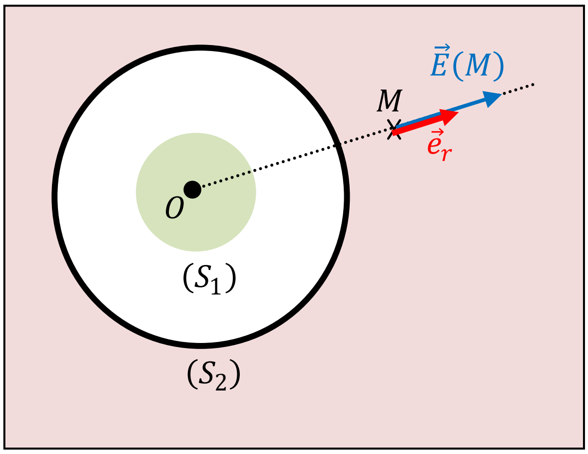
1. Champ électrique $\vec{E}(M)$ créé en M

Le théorème de Gauss énonce que :

$$\oiint \vec{E}(M).\vec{dS} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

En coordonnées sphériques le champ électrostatique s'écrit :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r + E_\varphi.\vec{e}_\varphi + E_\theta.\vec{e}_\theta$$



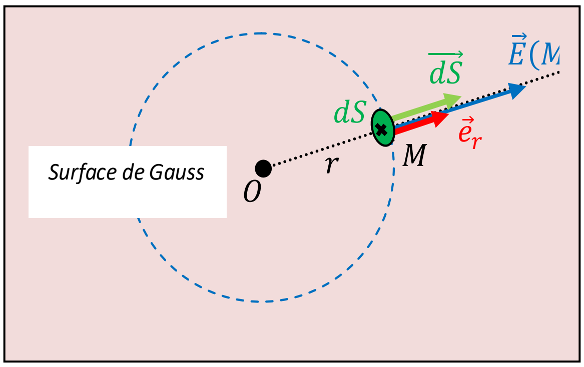
En raison de la symétrie sphérique de la distribution, le champ est radial (Le champ est porté par la droite (OM)) :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r$$

On choisit comme surface de Gauss, la surface S d'une sphère imaginaire de centre O et de rayon $r = \|\overrightarrow{OM}\|$.

Considérons une surface élémentaire dS centré en M. Le vecteur $\overrightarrow{dS}$ est perpendiculaire à **la** tangente en M et se dirige vers l'extérieur de la surface de Gauss.

$$\overrightarrow{dS} = dS.\vec{e}_r$$



Le flux du champ à travers la surface de Gauss est donc:

$$\oiint \vec{E}(M).\overrightarrow{dS} = \oiint E_r.dS = E_r \oiint dS = E_r.4\pi r^2$$

La loi de Gauss nous donne le champ radial :

$$E_r = \frac{q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

La charge à l'intérieur de la surface de Gauss dépend de la position du point M dans l'espace. D'après la distribution de charges, on distingue 3 régions :

Région 1 **($r < R_1$)**

$$q_{int} = \rho V_{int} = \rho.\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

Le champ créé dans cette région est :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right) r.\vec{e}_r$$

Région 2 **($R_1 < r < R_2$)**

$$q_{int} = \rho V_{int} = \rho.\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)$$

On obtient le champ suivant :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r = \left(\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\right)\frac{R^3}{r^2}.\vec{e}_r$$

Région 3 **($r > R_2$)**

$$q_{int} = q_{S_1+}q_{S_2} = \sigma.(4\pi R_2^2) + \rho.\left(\frac{4}{3}\pi R_1^3\right)$$

On trouve le champ :

$$\vec{E}(M) = E_r.\vec{e}_r = \left[4\sigma + \frac{\rho R}{3}\right]\frac{R^2}{\varepsilon_0 r^2}.\vec{e}_r$$

2. Calcul du potentiel dans la région ($r > R_2$)

En coordonnées sphériques, le potentiel est donné par:

$$V(M) = -\int \vec{E}.\vec{dl} = -\int E_r dr$$

On obtient :

$$V(M) = -\int \left[4\sigma + \frac{\rho R}{3}\right]\frac{R^2}{\varepsilon_0 r^2} dr$$

Apres intégration, nous obtenons :

$$V(M) = \left[4\sigma + \frac{\rho R}{3}\right]\frac{R^2}{\varepsilon_0 r} + C$$

On a :

$$V(+\infty) = 0 + C = 0$$

On trouve :

$$C = 0$$

Exercice 4

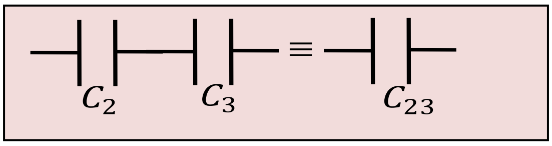
Calcul de la capacité équivalente C_{AB}

Les capacités C_2 et C_3 peuvent être remplacées par C_{23} :

$$\frac{1}{C_{23}} = \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

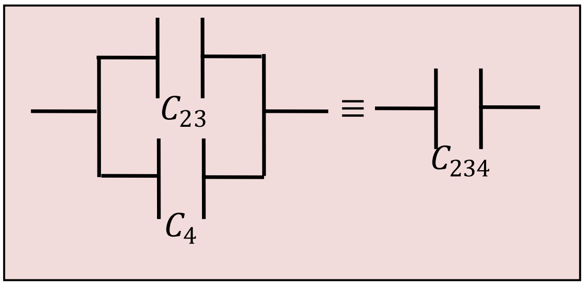
On obtient la capacité:

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} = \frac{1}{5}C_1$$



Les capacités C_{23} et C_4 peuvent être remplacées par C_{234} :

$$C_{234} = C_{23} + C_4 = \frac{9}{20}C_1$$



Les capacités C_1 , C_{234} et C_5 peuvent être remplacées par $C_{12345} = C_{AB}$:

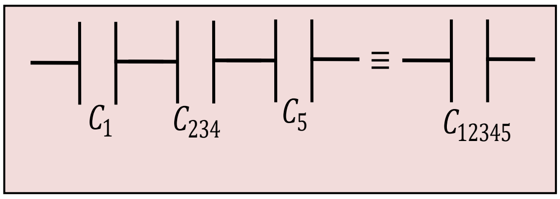
$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{234}} + \frac{1}{C_5}$$

La capacité équivalente est alors:

$$C_{AB} = \frac{9}{74}C_1$$

Application numérique

$$C_{AB} = 14,59\ \mu F$$

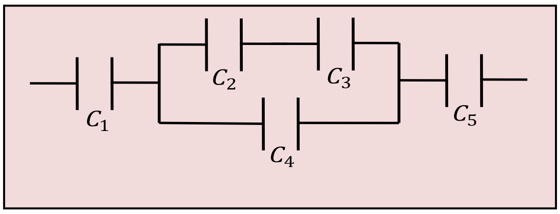


Calcul des charges et des tensions

Calcul des charges portées par les condensateurs

D'après les montages ci-dessous, on écrit les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1 = Q_5 = Q_{AB} \\ Q_2 = Q_3 \\ Q_1 = Q_2 + Q_4 \\ \dfrac{Q_2}{C_2} + \dfrac{Q_3}{C_3} = \dfrac{Q_4}{C_4} \end{cases}$$



En résolvant le système d'équations précédentes, on obtient les charges :

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q_1 = Q_5 = C_{AB}U} \\ \boldsymbol{Q_4 = \left(\dfrac{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}}\right)Q_1 = \frac{5}{9}Q_1} \\ \boldsymbol{Q_2 = Q_3 = Q_1 - Q_4 = \frac{4}{9}Q_1} \end{cases}$$

Application numérique

$$\begin{cases} \boldsymbol{Q_1 = Q_5 = 3.65\ mC} \\ \boldsymbol{Q_4 = 2.03\ mC} \\ \boldsymbol{Q_2 = Q_3 = 1.62\ mC} \end{cases}$$

Calcul dest tensions aux bornes des condensateurs

Les tensions aux des condensateurs sont données par :

$$\begin{cases} U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \\ U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \\ U_3 = \frac{Q_3}{C_3} \\ U_4 = \frac{Q_4}{C_4} = U_2 + U_3 \\ U_5 = \frac{Q_5}{C_5} = U - U_1 - U_4 \end{cases}$$

Application numérique

$$\begin{cases} U_1 = 30.41\ V \\ U_2 = 27\ V \\ U_3 = 40.5\ V \\ U_4 = 67.5\ V \\ U_5 = 152.09\ V \end{cases}$$