Examen de RDM 2ème Année ST Génie Civil Année 2010/2011

Exercice 1 : Considérons une poutre plane articulée – appuyée représentée à la figure 1. Nous supposerons que le point A est l'origine du repère globale auquel est rapportée la poutre. La poutre est soumise à une charge ponctuelle au point C milieu de AB = L .

1- Calculer les composantes des efforts de liaison (réactions d'appuis) en A et en B.
2- Calculer les efforts intérieurs en considérant les deux tronçons $[AC]$ et $[CB]$.
3- Représenter graphiquement ces efforts en fonction de l'abscisse x.

Exercice 2 : Une poutre encastrée en son extrémité A est soumise sur toute sa longueur L à l'action d'une charge uniformément répartie de densité linéique $\vec{p}$ (voir figure 2). On donne le module d'Young longitudinal E du matériau de base de la poutre et le moment quadratique I_z de sa section droite.

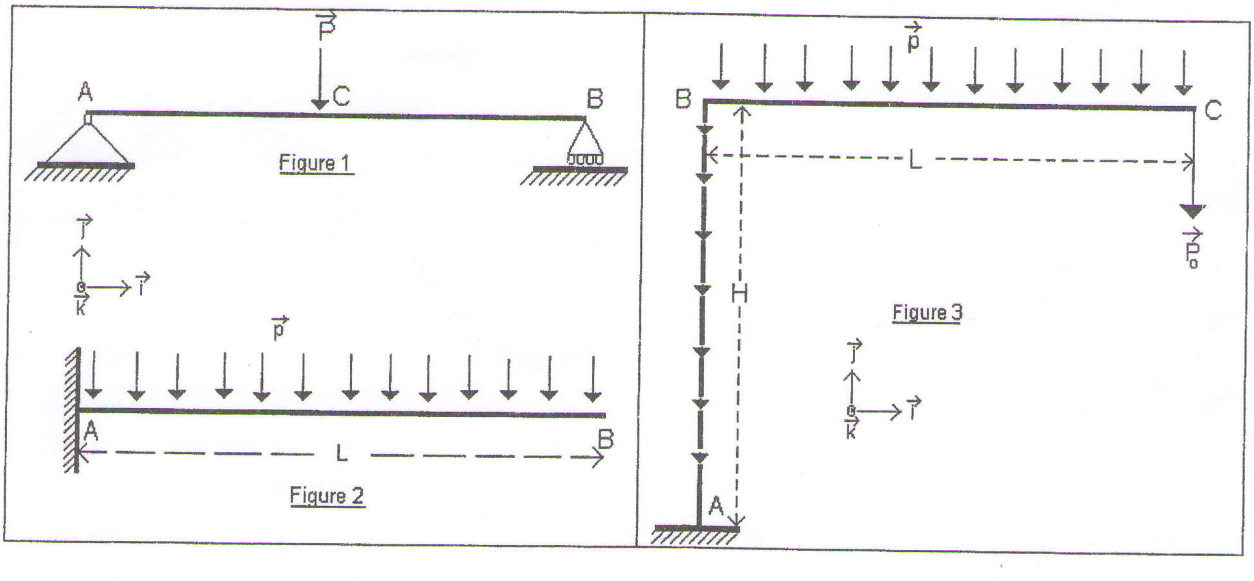
1- Calculer les composantes de l'effort et du moment de liaison en A.
2- Calculer les efforts intérieurs qui s'exercent sur la poutre.
3- En déduire l'équation de la déformée.
4- Calculer la flèche et l'angle de rotation en B.

Exercice 3 : On considère la structure de la figure 3 qui est représentative d'une grue. Elle est encastrée en A, soumise à son propre poids et au poids $\vec{P}_0$ d'une masse qui est accrochée au point C. On donne :

- Le poids linéique $\vec{p}$ de la poutre.
- AB= H, BC= L et A est l'origine du repère global auquel est rapportée la structure.

1-Calculer les composantes X_A et Y_A de l'effort et M_A du moment de liaison en A.
2-Calculer les efforts intérieurs (de cohésion) qui s'exercent sur la structure.
3-Ecrire et vérifier les équations d'équilibre local de la structure étudiée. Ces équations sont données par :

$$\frac{dN}{ds}-\frac{T_y}{R}+p_x=0,\quad \frac{dT_y}{ds}+\frac{N}{R}+p_y=0 \text{ et } \frac{dM_z}{ds}+T_y+m_z=0$$

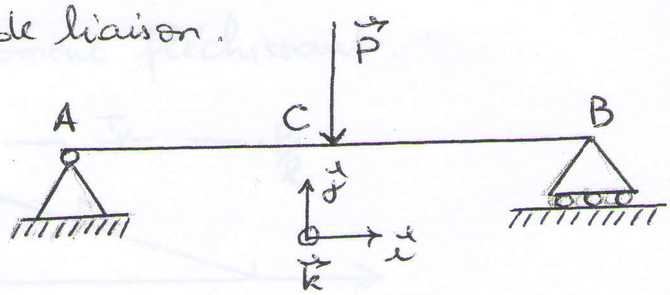


Barème : Exercice 1 : 06 Pts Exercice 2 : 07 Pts Exercice 3 : 07 pts

Correction de l'examen de RDM - Génie civil $2^{ème}$ année ST
2010 - 2011

Exercice 1 :

1° Calcul des composantes des efforts de liaison.



$$\left\{\vec{\tau}_A^L\right\} = \left\{\begin{matrix} X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_A$$

$$\left\{\vec{\tau}_B^L\right\} = \left\{\begin{matrix} Y_B\vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_B$$

$$\left\{\vec{\tau}_C^c\right\} = \left\{\begin{matrix} -P\vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_C$$

Principe fondamental de la statique écrit au point A = origine du repère global :

$$\left\{\begin{matrix} X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} Y_B\vec{j} \\ \vec{AB}\wedge Y_B\vec{j} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} -P\vec{j} \\ \vec{AC}\wedge(-P\vec{j}) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$\vec{AB} = L\vec{i}$ $\quad \vec{AC} = \frac{L}{2}\vec{i}$ $\quad$ d'où :

$$\left\{\begin{matrix} X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} Y_B\vec{j} \\ L\,Y_B\vec{k} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} -P\vec{j} \\ -\frac{PL}{2}\vec{k} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

ce qui donne :

$X_A = 0$

$Y_A + Y_B - P = 0$ $\quad \Rightarrow \quad$

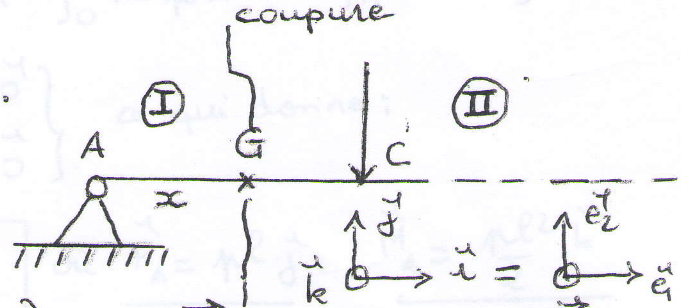
$L\,Y_B - \frac{PL}{2} = 0$

$X_A = 0$
$Y_B = \frac{P}{2}$
$Y_A = \frac{P}{2}$

$\vec{R}_A = \frac{P}{2}\vec{j}$ $\qquad R_B = \frac{P}{2}\vec{j}$

2° Efforts intérieurs (de cohésion).

Tronçon AC :



$\vec{AG} = x\vec{i}$

$\vec{GA} = -x\vec{i}$

$$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\} = -\left\{\vec{\tau}_{ext\to I}\right\} = -\left\{\vec{\tau}_A^L\right\}_G$$

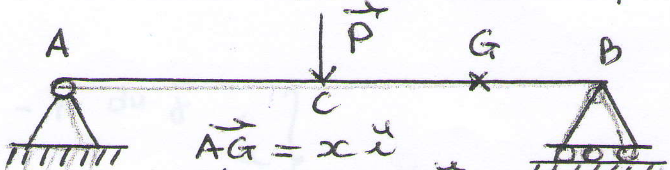
$$= -\left\{\begin{matrix} X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \\ \vec{GA}\wedge(X_A\vec{i} + Y_A\vec{j}) \end{matrix}\right\}_G = -\left\{\begin{matrix} \frac{P}{2}\vec{j} \\ -x\frac{P}{2}\vec{k} \end{matrix}\right\}_G$$

$$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\} = \left\{\begin{matrix} -\frac{P}{2}\vec{e}_2 \\ +\frac{P}{2}x\,\vec{e}_3 \end{matrix}\right\}_G$$

d'où ;

$N = 0$	$T_y = -\frac{P}{2}$	$M_z = +\frac{P}{2}x$

Tronçon CB



$\vec{AG} = x\vec{i}$

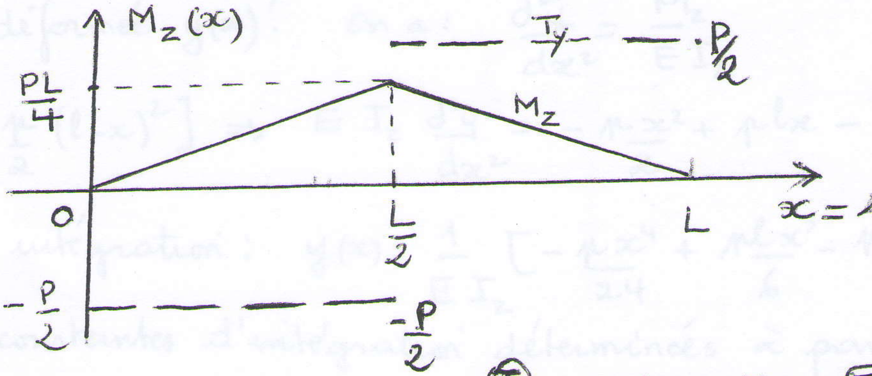
$\vec{GB} = (L-x)\vec{i}$

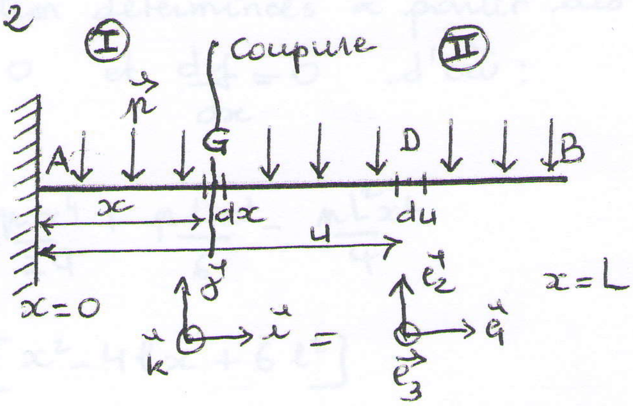
$$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\} = \left\{\vec{\tau}_{ext\to II}\right\} = \left\{\vec{\tau}_B^L\right\}_G$$

$$\{\vec{\tau}_{int}\} = \begin{Bmatrix} Y_B\,\vec{j} \\ \vec{GB}\wedge Y_B\,\vec{j} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2}\,\vec{j} \\ \frac{P}{2}(L-x)\,\vec{k} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2}\,\vec{e}_2 \\ \frac{P}{2}(L-x)\,\vec{e}_3 \end{Bmatrix}_G$$

d'où : $N = 0 \qquad T_y = \frac{P}{2} \qquad M_z = \frac{P}{2}(L-x)$

3°- Représentation graphique du moment fléchissant.





Exercice 2:

① Composantes des efforts de liaison

$$\{\vec{\tau}^L_A\} = \begin{Bmatrix} X_A\,\vec{i} + Y_A\,\vec{j} \\ M_A\,\vec{k} \end{Bmatrix}_A$$

$$d\{\vec{\tau}^c_G\} = \begin{Bmatrix} -p\,dx\,\vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

en A, $d\{\vec{\tau}^c_G\}_A = \begin{Bmatrix} -p\,dx\,\vec{j} \\ \vec{AG}\wedge(-p\,dx\,\vec{j}) \end{Bmatrix}_A$ d'où : $d\{\vec{\tau}^c_G\}_A = \begin{Bmatrix} -p\,dx\,\vec{j} \\ -p\,x\,dx\,\vec{k} \end{Bmatrix}_A$

$\vec{AG} = x\,\vec{i}$

Le PFS en A s'écrit : $\begin{Bmatrix} X_A\,\vec{i} + Y_A\,\vec{j} \\ M_A\,\vec{k} \end{Bmatrix}_A + \int_0^\ell \begin{Bmatrix} -p\,dx\,\vec{j} \\ -p\,x\,dx\,\vec{k} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

soit : $\begin{Bmatrix} X_A\,\vec{i} + Y_A\,\vec{j} \\ M_A\,\vec{k} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -p\ell\,\vec{j} \\ -\frac{p\ell^2}{2}\,\vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ ce qui donne :

$X_A = 0$	$Y_A = p\ell$	$M_A = \frac{p\ell^2}{2}$

ou $\underline{\vec{R}_A = p\ell\,\vec{j}}$ $\quad \underline{\vec{M}_A = \frac{p\ell^2}{2}\,\vec{k}}$

② Efforts intérieurs (de cohésion) (voir coupure sur figure).

$$\{\vec{\tau}_{int}\} = \{\vec{\tau}_{ext\to II}\} = \int_x^\ell d\{\vec{\tau}^c_D\}_G$$

$$d\{\vec{\tau}^c_D\} = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

et $d\{\vec{\tau}^c_D\}_G = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ \vec{GD}\wedge(-p\,du\,\vec{j}) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ -p\,(u-x)\,du\,\vec{k} \end{Bmatrix}_G$

$\vec{GD} = (u-x)\,\vec{i}$

$$\left\{\tau_{int}\right\} = \int_x \begin{Bmatrix} -\mu\, du\, \vec{j} \\ -\mu(u-x)\, du\, \vec{k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mu(l-x)\, \vec{j} \\ -\frac{\mu}{2}(l-x)^2\, \vec{k} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -\mu(l-x)\, \vec{e}_2 \\ -\frac{\mu}{2}(l-x)^2\, \vec{e}_3 \end{Bmatrix}_G$$

On obtient :

$N = 0$	$T_y = -\mu(l-x)$	$M_z = -\frac{\mu}{2}(l-x)^2$

3° Equation de la déformée $y(x)$? On a : $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z}$

soit $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{\mu}{2}(l-x)^2\right] \Rightarrow EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\mu x^2}{2} + \mu l x - \frac{\mu l^2}{2}$

Après une double intégration : $y(x) = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{\mu x^4}{24} + \frac{\mu l x^3}{6} - \frac{\mu L^2 x^2}{4} + C_1 x + C_2\right]$

C_1 et C_2 sont des constantes d'intégration déterminées à partir des conditions aux limites : en A $y = 0$ et $\frac{dy}{dx} = 0$ d'où :

$C_2 = 0$ et $C_1 = 0$

En définitif : $y(x) = \frac{1}{EI_z}\left[-\frac{\mu x^4}{24} + \frac{\mu L x^3}{6} - \frac{\mu L^2 x^2}{4}\right]$

$$y(x) = -\frac{\mu x^2}{24 EI_z}\left[x^2 - 4lx + 6l^2\right]$$

4° La flèche en B : $x = L$ $\quad y_B = -\frac{\mu l^4}{8EI_z}$

L'angle de rotation en B : $\theta_B = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = -\frac{\mu l^3}{6EI}$

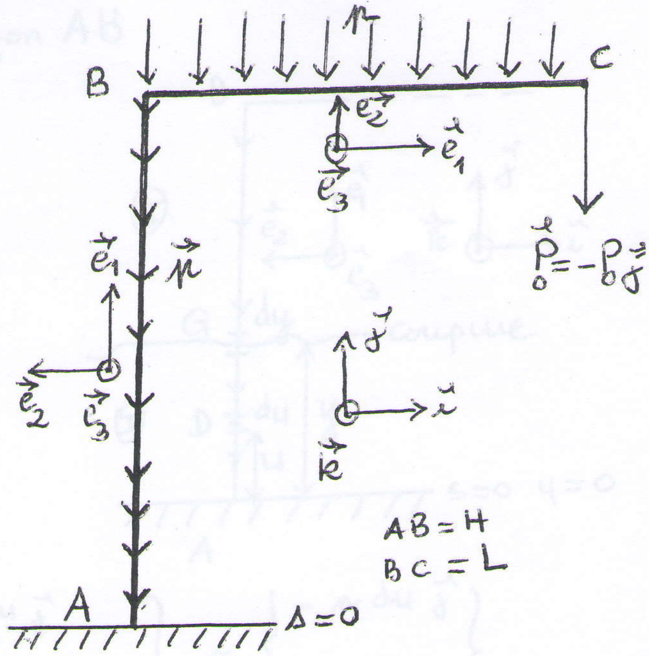
Exercice 3 :

1) Composantes des efforts de liaison

abscisse curviligne s :

Segment AB : $s = y$

Segment BC : $s = H + x$



$$\left\{\vec{\tau}^{L}_{A}\right\} = \left\{\quad\right\}$$

$$d\left\{\vec{\tau}^{c}_{G}\right\} = \left\{\begin{matrix} -\mu\, ds\, \vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_G$$

$$\left\{\vec{\tau}^{c}_{C}\right\} = \left\{\begin{matrix} -P_0\, \vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_C$$

On applique le PFS en A.

$$d\left\{\vec{\tau}^{c}_{G}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -\mu\, ds\, \vec{j} \\ \vec{AG} \wedge (-\mu\, ds)\vec{j} \end{matrix}\right\}_A =$$

Segment AB $\quad \vec{AG} = y\vec{j} \quad d\left\{\vec{\tau}^{c}_{G}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -\mu\, dy\, \vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_A$

Segment BC $\quad \vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BG} = H\vec{j} + x\vec{i} \qquad d\left\{\vec{\tau}^{c}_{G}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -\mu\, dx\, \vec{j} \\ -\mu x\, dx\, \vec{k} \end{matrix}\right\}_A$

$$\left\{\vec{\tau}^{c}_{C}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -P_0\, \vec{j} \\ \vec{AC} \wedge (-P_0 \vec{j}) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -P_0\, \vec{j} \\ -P_0 L\, \vec{k} \end{matrix}\right\}_A$$

Le PFS s'écrit alors par :

$$\left\{\begin{matrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} -P_0 \vec{j} \\ -P_0 L\, \vec{k} \end{matrix}\right\}_A + \int_0^H \left\{\begin{matrix} -\mu\, dy\, \vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_A + \int_0^L \left\{\begin{matrix} -\mu\, dx\, \vec{j} \\ -\mu x\, dx\, \vec{k} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} X_A \vec{i} + Y_A \vec{j} \\ M_A \vec{k} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} -P_0 \vec{j} \\ -P_0 L\, \vec{k} \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} -\mu H \vec{j} \\ 0 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} -\mu L \\ -\mu \frac{L^2}{2} \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}$$

d'où les équations :

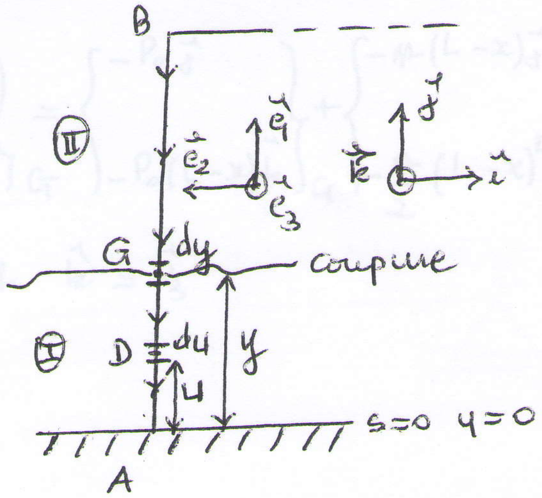
$$X_A = 0$$
$$Y_A - \mu(H+L) - P_0 = 0 \qquad \Rightarrow$$
$$M_A - \mu\frac{L^2}{2} - P_0 L = 0$$

$X_A = 0$
$Y_A = \mu(H+L) + P_0$
$M_A = \mu\frac{L^2}{2} + P_0 L$

La réaction d'appui en A : $\quad \vec{R}_A = [\mu(H+L) + P_0]\,\vec{j}$

Son moment est : $\quad \vec{M}_A = \left(\mu\frac{L^2}{2} + P_0 L\right)\vec{k}$

② Les efforts intérieurs (de cohésion) : Tronçon AB



$$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\}_G = -\left\{\vec{\tau}_{ext\to I}\right\} = -\left\{\vec{\tau}^{\,L}_A\right\}_G - \int_{AG}^{G} d\left\{\vec{\tau}^{\,c}_D\right\}_G$$

$$\left\{\vec{\tau}^{\,L}_A\right\}_G = \begin{Bmatrix} X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \\ M_A\vec{k} + \vec{GA}\wedge(X_A\vec{i}+Y_A\vec{j}) \end{Bmatrix}_G$$

$$\vec{GA} = -y\vec{j} \qquad \vec{GA}\wedge(X_A\vec{i}+Y_A\vec{j}) = yX_A\vec{k}$$

$$\left\{\vec{\tau}^{\,L}_A\right\}_G = \begin{Bmatrix} X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \\ (M_A + yX_A)\vec{k} \end{Bmatrix}_G$$

$$d\left\{\vec{\tau}^{\,c}_D\right\} = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow d\left\{\vec{\tau}^{\,c}_D\right\}_G = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ \vec{GD}\wedge(-p\,du\,\vec{j}) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$$

$$\vec{GD} = -(y-u)\vec{j}$$

Ainsi : $$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\}_G = -\begin{Bmatrix} X_A\vec{i}+Y_A\vec{j} \\ (M_A+yX_A)\vec{k} \end{Bmatrix}_G - \int_0^y \begin{Bmatrix} -p\,du \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -X_A\vec{i} - Y_A\vec{j} + p\,y\,\vec{j} \\ -(M_A+yX_A)\vec{k} \end{Bmatrix}_G$$

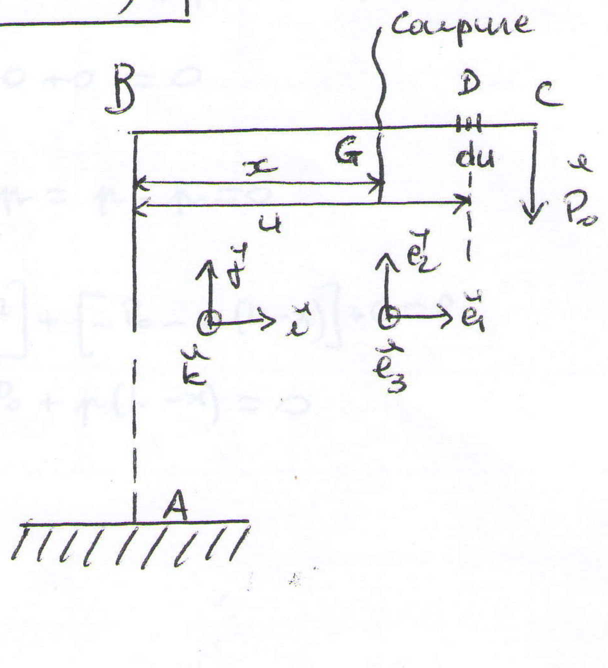
sur le segment AB. $\vec{i} = -\vec{e}_2 \qquad \vec{j} = \vec{e}_1 \qquad \vec{k} = \vec{e}_3$

d'où : $$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\}_G = \begin{Bmatrix} (py - Y_A)\vec{e}_1 + X_A\vec{e}_2 \\ -(M_A + yX_A)\,\vec{e}_3 \end{Bmatrix}_G$$

Soit :

$N = py - Y_A = py - p(H+L) - P_0$
$T_y = X_A = 0$
$M_z = -(M_A + yX_A) = -\left(p\frac{L^2}{2} + P_0 L\right)$

<u>Tronçon BC :</u>



$$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\}_G = \left\{\vec{\tau}_{ext\to II}\right\} = \left\{\vec{\tau}^{\,c}_C\right\}_G + \int_{GC} d\left\{\vec{\tau}^{\,c}_D\right\}_G$$

$$\left\{\vec{\tau}^{\,c}_C\right\}_G = \begin{Bmatrix} -P_0\vec{j} \\ \vec{GC}\wedge(-P_0\vec{j}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_0\vec{j} \\ -P_0(L-x)\vec{k} \end{Bmatrix}_G$$

$$\vec{GC} = (L-x)\vec{i}$$

$$d\left\{\vec{\tau}^{\,c}_D\right\}_G = \begin{Bmatrix} -p\,du\,\vec{j} \\ \vec{GD}\wedge(-p\,du\,\vec{j}) \end{Bmatrix}_G$$

$$\vec{GD} = (u-x)\vec{i}$$

$$d\left\{\vec{\tau}_D^{\,C}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -p\,du\,\vec{j} \\ -p(u-x)\,du\,\vec{k}\end{matrix}\right\}_G \qquad \text{d'où :}$$

$$\left\{\vec{\tau}_{int}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -P_0\,\vec{j} \\ -P_0(L-x)\,\vec{k}\end{matrix}\right\}_G + \int_x^L \left\{\begin{matrix} -p\,du\,\vec{j} \\ -p(u-x)\,du\,\vec{k}\end{matrix}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -P_0\,\vec{j} \\ -P_0(L-x)\,\vec{k}\end{matrix}\right\}_G + \left\{\begin{matrix} -p(L-x)\,\vec{j} \\ -\frac{p}{2}(L-x)^2\,\vec{k}\end{matrix}\right\}$$

Sur le segment BC $\quad \vec{i} = \vec{e}_1 \quad \vec{j} = \vec{e}_2$ et $\vec{k} = \vec{e}_3$

$$\text{d'où } \left\{\vec{\tau}_{int}\right\}_G = \left\{\begin{matrix} -\left(P_0 + p(L-x)\right)\vec{e}_2 \\ -\left[P_0(L-x) + \frac{p}{2}(L-x)^2\right]\vec{k}\end{matrix}\right\}_G$$

<u>Par identification :</u>

$N = 0$	$T_y = -\left[P_0 + p(L-x)\right]$
$M_z = -P_0(L-x) - \frac{p}{2}(L-x)^2$	

3° Equations d'équilibre local.

<u>Segment AB :</u> $\quad s = y \qquad R \to +\infty \qquad p_x = -p \qquad p_y = 0 \qquad m_z = 0$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_y}{R} + p_x = \frac{d}{dy}\left(py - p(H+L) - P_0\right) - p = p - p = 0$$

$$\frac{dT_y}{ds} + \frac{N}{R} + p_y = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{dM_z}{ds} + T_y + m_z = \frac{d}{dy}\left(-\frac{pL^2}{2} - P_0L\right) + 0 + 0 = 0$$

<u>Segment BC :</u> $\quad s = H + x \qquad ds = dx \qquad R \to +\infty \qquad p_y = -p \qquad p_x = 0 \qquad m_z = 0$

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T_y}{R} + p_x = \frac{dN}{dx} - \frac{T_y}{R} + p_x = \frac{d}{dx}(0) - 0 + 0 = 0$$

$$\frac{dT_y}{ds} + \frac{N}{R} + p_y = \frac{d}{dx}\left[-P_0 - p(L-x)\right] + 0 - p = p - p = 0$$

$$\frac{dM_z}{ds} + T_y + m_z = \frac{d}{dx}\left[-P_0(L-x) - \frac{p}{2}(L-x)^2\right] + \left[-P_0 - p(L-x)\right] + 0 = P$$

$$= \left[P_0 + p(L-x)\right] - \left[P_0 + p(L-x)\right] = 0$$