ST Université A.MIRA de Béjaia
Faculté de la Technologie
Département de 2ème LMD-ST

® Juin 2011

Examen Maths $\widetilde{VI}$

Exercice 1 (07.00 points) :
On considère la fonction $F(x)$ définie par : $F(x) = 2x\cos(2x) - (x+1)^2$, x est donné en radian.

1. Peut-on appliquer la méthode de la Bissection pour calculer α_1 sur l'intervalle $I_1 = [-3; -2]$? Justifier.
2. Soit $\epsilon = 10^{-4}$. Déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher, par la méthode de la Bissection, la racine α_1 située sur I_1.
3. Sachant que $a_0 = -3$ et $b_0 = -2$, calculer les cinq premières itérations en utilisant cette méthode.

Exercice 2 (07.00 points) :
On considère la fonction $F(x)$ définie par : $F(x) = x^3 + 4x^2 - 10$.

1. Montrer que $F(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $I = [1; 2]$.
2. Il existe plusieurs façons pour écrire l'équation $F(x) = 0$ sous la forme $x = g(x)$
   a- $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$,
   b- $x = g_2(x) = (\frac{10}{x} - 4x)^{\frac{1}{2}}$,
   c- $x = g_3(x) = (\frac{10}{4+x})^{\frac{1}{2}}$.

• Quelle est parmi les trois fonctions $x = g_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, celles qui vérifient les conditions du point fixe, en partant de $x_0 = 1.5$.

Exercice 3 (06.00 points) :
On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver la relation de α en fonction de β pour que A soit non inversible.
2. Trouver les valeurs de α et β pour que :
   a- La matrice A soit à diagonale strictement dominante.
   b- La matrice A soit symétrique.
3. Soit $\alpha = 2\beta$.
   a- Dans quel cas peut-on décomposer la matrice A sous la forme LL^t.
   b- Donner la matrice L.
   c- Déduire le déterminant de la matrice A.

Bon Courage

Exo 1 :

$$F(x) = 2x\cos(2x) - (x+1)^2$$

0,5 1. a) * F est bien définie et continue

0,5 * $F(-3) = -9,761$; $F(-2) = 1,614$ $\Rightarrow F(-3)\times F(-2) < 0$

0,5 * D'après le TVI, $\exists$ aumoins une racine $\alpha_1 \in]-3, -2[$ tel que $F(\alpha_1) = 0$.

* De plus, $F'(x) = 2\cos(2x) - 4x\sin(2x) - 2(x+1) > 0$

0,5 $\Rightarrow F(x)$ est croissante

Alors, la solution α_1 est unique.

b) $\varepsilon = 10^{-4}$, $n > \frac{4\ln(10)}{\ln(2)} - 1 = 12,287$ 1

$n = 13$ 1

0,5 c) • $x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{-2-3}{2} = -\frac{5}{2}$, $F\left(-\frac{5}{2}\right) = -3,6683$

$F(-5/2)\times F(-2) < 0 \Rightarrow \alpha_1 \in]-5/2, -2[$

0,5 • $x_1 = \frac{-2,5-2}{2} = \frac{-4,5}{2} = -2,25 = -\frac{9}{4}$

$F(-9/4) = -0,61435$

$F(-9/4)\times F(-2) < 0 \Rightarrow \alpha_1 \in]-9/4, -2[$

0,5 • $x_2 = \frac{-9/4 - 2}{2} = \frac{-17}{8} = -2,125$

$F(x_2) = 0,6301$

$F(-2,25)\times F(-2,125) < 0 \Rightarrow \alpha_1 \in]-2,25, -2,125[$

0,5 • $x_3 = \frac{-2,25-2,125}{2} = -2,1875 = -\frac{35}{16}$

$F(x_3) = F\left(-\frac{35}{16}\right) = 0,0380$

$F(-2,25) \times F(-2,1875) < 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \left]-2,25, -2,1875\right[$.

0,5 • $x_4 = \frac{-2,25-2,1875}{2} = -2,21875 = -\frac{71}{32}$

$F(x_4) = F\left(-\frac{71}{32}\right) = -0,2808$

$F(-2,21875) \times F(-2,1875) < 0 \Rightarrow \alpha_1 \in \left]-2,21875, -2,1875\right[$

0,5 • $x_5 = \frac{-2,21875-2,1875}{2} = -2,203125$.

$\vdots$

$x_{13} = \alpha_1 = -2,1913$

Exo 2 :

$$F(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

0,25 1. La fonction F est bien définie et Continue sur I

0,25 = $F(1) = -5$ = $F(2) = 14$ $\Big\}$ $F(1) \times F(2) < 0$

0,25 = D'après le TVI, $\exists$ aumoins une racine $\alpha \in]1,2[\ / F(\alpha) = 0$.

De plus, $F'(x) = 3x^2 + 8x > 0 \Rightarrow F$ est monotone

0,25 = ALors la racine α est unique.

2. a) $F(x) = 0 \Leftrightarrow x - x + x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$\Leftrightarrow -x = -x + x^3 + 4x^2 - 10$ = 0,5

$\Leftrightarrow x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = g_1(x)$

$g_1(x)$ est bien définie et Continue sur I

La stabiLité : $g_1(I) \subset I$? //

$g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x < 0,\ \forall x \in I \Rightarrow g_1$ est décroissante

$g_1([1,2]) = [g_1(2); g_1(1)] = [-12, 6] \not\subset [1, 2]$

$\Rightarrow g_1$ n'est pas stable. 1

La Contractance : //

$g_1''(x) = -6x - 8 < 0 \Rightarrow g_1'$ est décroissante

$k = \max_I \{|g'(1)|, |g'(2)|\} = \max\{10; 27\} > 1$

$\Rightarrow g_1$ n'est pas contractante

En Conclusion : g_1 ne verifiée les Conditions de Théorème du Point Fixe.

b. $F(x)=0 \iff x^3 = 10 - 4x^2$

$$\iff x^2 = \frac{10}{x} - 4x$$

$$\iff x = \left[\frac{10}{x} - 4x\right]^{1/2} = g_2(x)$$ 0,5

On remarque que la fonction $g_2(x)$ n'est pas définie sur I 1

c. $F(x)=0 \iff x^2(x+4)=10$

$$\iff x^2 = \frac{10}{x+4}$$

$$\iff x = \left[\frac{10}{x+4}\right]^{1/2} = g_3(x)$$ 0,5

0,5 La fonction $g_3(x)$ est bien définie et Continue sur I

La Stabilité :

$$g_3'(x) = -\frac{5}{(4+x)^2\sqrt{\frac{10}{4+x}}} < 0 \Rightarrow g_3 \searrow$$ 0,5

$$g_3([1,2]) = [g(2), g(1)] = \left[\sqrt{\tfrac{5}{3}}, \sqrt{2}\right] \subset [1,2]$$ 0,5

$\Rightarrow g_3$ est stable

Contractance $|g_3'(x)| \leq k < 1$

$$|g_3'(x)| = \left|\frac{-5}{(4+x)^2\sqrt{\frac{10}{4+x}}}\right| = \left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}}\right| \leq$$

1

$$\leq \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0{,}15, \ \forall x \in [1,2]$$

$\Rightarrow g_3$ est contractante.

En Conclusion: $g_3(x)$ vérifiée les Conditions du P. Fixe

EXO 3

$$A=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ \beta & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. A soit non inversible si $\det(A)=0$.

$$\det(A)=\alpha\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=3\alpha-2\beta=0$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{2}{3}\beta \quad 0{,}5$$

2. a)- A est DDS si

$$\begin{array}{ll} i=1, & |\alpha|>|1| \\ i=2, & |2|>|\beta|+|1| \\ i=3, & |2|>|1| \end{array} \Rightarrow \begin{cases} |\alpha|>1 \\ |\beta|<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[& 0{,}5 \\ \beta\in]-1,1[& 0{,}5 \end{cases}$$

b)- A est symétrique si $A=A^t$

Dans ce cas, $A=A^t$ si $\begin{cases} \beta=1; & 0{,}5 \\ \text{et} \\ \forall\alpha & 0{,}5 \end{cases}$

3. $\alpha=2\beta$,

a)- si A est SDP $\Rightarrow A=LL^t$

- A est symétrique si $\beta=1$ (voir 2-b)) 0,25
- DP: $\alpha=2\beta=2\times1=2$,

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=|2|=2>0$, 0,25

$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3>0$; 0,25

$\Delta_3 = |A| = 3\alpha - 2\beta = 3\times 2 - 2 = 4$ (voir 1°) 0,25

En Conclusion : A est SDP pour $\alpha = 2\beta$, avec $\beta = 1$
Dans le cas, $A = LL^t$.

b) $A = LL^t \iff \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$

0,5

$$\iff \begin{cases} l_{11}^2 = 2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{2} \\ l_{11}\, l_{21} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ l_{11}\, l_{31} = 0 \Rightarrow l_{31} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l_{21}^2 + l_{22}^2 = 2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{2 - \frac{2}{4}} = \sqrt{3/2} \\ l_{21}\, l_{31} + l_{22}\, l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = 1/\sqrt{3/2} = \sqrt{2/3} \end{cases}$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 2 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{2 - 2/3} = \sqrt{4/3}$$

Donc, $L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} & \sqrt{4/3} \end{bmatrix}$ 1,5

$L^t = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & \sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & \sqrt{4/3} \end{bmatrix}$

c/ $\det(A) = \det(LL^t) = \det(L)\det(L^t) = \left[\prod_{i=1}^{3} l_{ii}\right]^2$

0,5 $= \left(\sqrt{2} \times \sqrt{3/2} \times \sqrt{4/3}\right)^2 = 4.$