Université A/Mira-Bejaia
Faculté des Sciences Exactes.
Département de Mathématiques.

1ère année MI
Année universitaire 2020/2021

Corrigé de l'examen de remplacement d'Analyse II

Exercice 1

Soit $x \in]0, \pi/2[$. La fonction $t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathscr{C}^3$, alors d'aprés le théorème de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin^{(2)}(0)}{2}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(c)}{6}x^3. \quad \textbf{\textit{0.5pts}}$$

Soit aprés calcul de dérivées

$$\sin x = x - \frac{\cos c}{6}x^3. \quad \textbf{\textit{1pts}} \tag{1}$$

Comme $0 < c < x < \pi/2$ alors $0 < \cos c < 1$, par conséquent

$$0 < \frac{\cos c}{6}x^3 < \frac{x^3}{6}$$

En reportant cette inégalité dans (1) on obtient

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad \textbf{\textit{1pts}}$$

On termine en remarquant que

$$x - \frac{x^3}{2} < x - \frac{x^3}{6} \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[. \quad \textbf{\textit{0.5pts}}$$

Autre méthode:

On a d'après le théorème de Taylor-Lagrange

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{\sin^2(c)}{2}x^2.$$

où $c \in]0, x[$. ce qui donne après calcul des dérivées

$$\sin x = x - \frac{\sin(c)}{2}x^2. \tag{2}$$

Des inégalité $0 < c < x$, et vu que la fonction $x \mapsto \sin x$ est strictement croissante sur $]0, \pi/2[$, on déduit que

$$0 < \sin(c) < \sin(x)$$

D'autre part, il est bien connu que

$$|\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$0 < \sin c < \sin x \leq x$$

A fortiori

$$0 < \sin c < x$$

On reportant ces inégalités dans 2 on obtient

$$x - \frac{x^3}{2} < \sin x < x$$

Exercice 2

1.

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. ***0.5pts***

- *On a*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3). \quad \textbf{\textit{0.5pts}}$$

D'autre parts,

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1-x}{e}\right) &= \ln(1-x) - \ln(e) \\ &= \ln(1-x) - 1 \\ &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 1 + o(x^3) \\ &= -1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \textbf{\textit{0.5pts}} \end{aligned}$$

il suit alors

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + \ln\left(\frac{1-x}{e}\right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 1 + o(x^3) \\ &= -\frac{x^3}{6} + o(x^3). \quad \textbf{\textit{0.5pts}} \end{aligned}$$

- *On a*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \quad \textbf{\textit{0.5pts}}$$

On utilise alors la règle de multiplications des DL,

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln(1+x)\frac{1}{1+x} \\ &= \left[\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)(1 - x + x^2 - x^3)\right]_3 + o(x^3) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3). \quad \textbf{\textit{0.5pts}} \end{aligned}$$

2. *On a* $g(0) = 0$ ***0.5pts***, *la règle de compositions des DL s'applique dans ce cas, on calcul alors*

$$\begin{aligned} e^{g(x)} &= \left[1 + \left(x - \frac{3}{2}x^2\right) + \frac{\left(x - \frac{3}{2}x^2\right)^2}{2}\right]_2 + o(x^2) \\ &= 1 + x - x^2 + o(x^2). \quad \textbf{\textit{1pts}} \end{aligned}$$

3. *On a*

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}.$$

En posant $y = x-1$ ***0.5pts***, *on se ramène à développer au voisinage de* 0 *à l'ordre exigé, plus précisemment, on a*

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{y+1}\ln(y+1)} = 1 + y - y^2 + o(y^2).$$

On tire alors le DL à l'ordre 2 *au voisinage de* 1*;*

$$x^{\frac{1}{x}} = 1 + (x-1) - (x-1)^2 + o((x-1)^2). \quad \textbf{\textit{1pts}}$$

4. *On a*

$$e^x + \ln\left(\frac{1-x}{e}\right) - x + \sin x = -\frac{x^3}{6} - x + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

d'où

$$\frac{e^x + \ln\left(\frac{1-x}{e}\right) - x + \sin x}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1). \quad \textbf{\textit{1pts}}$$

On calcule alors la limite aisément,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \ln\left(\frac{1-x}{e}\right) - x + \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{3} + o(1)\right) = -\frac{1}{3}. \quad \textbf{\textit{1pts}}$$

Exercice 3

1. *On obtient aprés un calcul aisé* $\boxed{a = 1}$ ***0.5pts*** $\boxed{b = -2}$ ***0.5pts*** $\boxed{c = 2}$ ***0.5pts***. *Ainsi*

$$f(x) = 1 - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \left(1 - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2}\right) dx \\
&= \int dx - \int \frac{2dx}{1+x} + \int \frac{2dx}{(1+x)^2} \\
&= x - 2\ln(|x+1|) - \frac{2}{1+x} \quad \textbf{\textit{1.5pts}}
\end{aligned}$$

3. *Le calcule de cette intégrale s'effectue moyennant le changement de variable universel* $t = \tan(\frac{x}{2})$. ***1pts***

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x)(1+\cos x)} \\
&= \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(1 + \frac{2t}{1+t^2}\right)\left(1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\
&= \int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t)^2} dt \quad \textbf{\textit{1pts}} \\
&= \left[x - 2\ln(|x+1|) - \frac{2}{1+x}\right]_0^1 \\
&= 2 - 2\ln 2. \quad \textbf{\textit{1pts}}
\end{aligned}$$

4. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+k^2}{n^3+2kn^2+nk^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} \quad \textbf{\textit{0.5pts}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right). \quad \textbf{\textit{1pts}} \end{aligned}$$

Comme la fonction f est intégrable au sens de Riemann dans l'intervalle $[0,1]$ (f est continue) alors ***0.5pts***

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx = 2-2\ln 2. \quad \textbf{\textit{1pts}}$$