Université A/Mira-Bejaia
Faculté des Sciences Exactes.
Département de Mathématiques.

$1^{\text{ère}}$ année MI
Année universitaire 2020/2021
15/09/2021

Examen de remplacement - Analyse II

NB: Appareils électroniques et documents sont interdits - Durée de l'examen : 1h30

Exercice 1 (3 pts)

Montrer en utilisant la formule de Taylor-Lagrange l'inégalité suivante:

$$x - \frac{x^3}{2} < \sin x < x \qquad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

Exercice 2 (8 pts)

1. *Ecrire le développement limité des fonctions suivantes au voisinage de* 0 *à l'ordre* 3*:*

$$x \mapsto \ln(1+x) \qquad f(x) = e^x + \ln\left(\frac{1-x}{e}\right) \qquad g(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

3. *Ecrire le développement limité à l'ordre* 2 *au voisinage de* 0 *de la fonction* $h(x) = e^{g(x)}$

4. *Déduire le développement limité à l'ordre* 2 *au voisinage de* 1 *de la fonction*

$$x \mapsto x^{\frac{1}{x}}.$$

5. *Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités:*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \ln(\frac{1-x}{e}) - x + \sin x}{x^3}$$

Exercice 3 (9 pts)

On définit la fonction f *par*

$$f(x) = \frac{1+x^2}{(1+x)^2} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

1. *Trouvez les coefficients* a, b *et* c *de* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$f(x) = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}$$

2. *Calculer* $\int f(x)dx$

3. *Déduire la valeur de l'intégrale suivante:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

4. *Calculer la limite de la suite suivante:*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+k^2}{n^3+2kn^2+nk^2}.$$

Bon courage