

Séance de TD n°5 (Semaine du dimanche 09 au jeudi 13 mars 2014)

Exo-1 : Déduire, en utilisant le principe de dualité, une formule à partir de l'égalité suivante :
 $(x + \bar{x}.y) + z = x + y + z$

Réponse : $(x + \bar{x}.y) + z = x + y + z$ peut être écrite comme ceci $(x + (\bar{x}.y)) + z = x + y + z$
 sa formule duale est : $(x.(\bar{x} + y)).z = x.y.z$

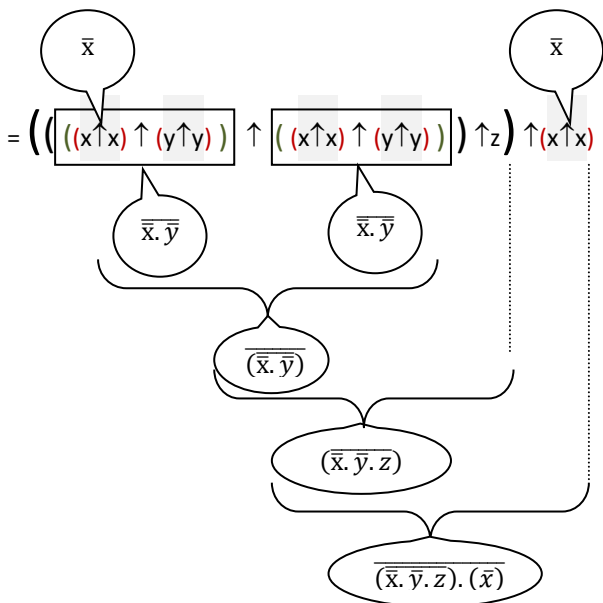
Exo-2 : Opérateur NAND

A - Démontrer que l'opérateur NAND n'est pas associatif. Indication : Utilisez le symbole \uparrow pour représenter l'opérateur NAND.

Réponse : on se propose de montrer que $(x\uparrow y)\uparrow z$ est différent de $x\uparrow(y\uparrow z)$
 Il suffit de trouver un contre exemple. Pour $(x,y,z)=(0,0,1)$
 la valeur de $(x\uparrow y)\uparrow z = \overline{\overline{x.y}.z} = \overline{\overline{0.0}.1} = \overline{\overline{0}.1} = \overline{1.1} = \overline{1} = 0$
 la valeur de $x\uparrow(y\uparrow z) = \overline{x.(\overline{y.z})} = \overline{0.(0.1)} = \overline{0.0} = 1$
 On voit bien qu'il existe au moins une situation où $(x\uparrow y)\uparrow z \neq x\uparrow(y\uparrow z)$

B - soit la fonction $F(x,y,z) = \bar{x}.y.z + x$, exprimez cette fonction uniquement en utilisant l'opérateur NAND.

Réponse : $F(x,y,z) = \bar{x}.y.z + x$
 $= \overline{(\overline{\bar{x}.y.z} + x)}$ $= \overline{(\overline{\bar{x}.y.z}).(\bar{x})}$
 $= \overline{(\overline{\bar{x}.y.z}).(\bar{x})}$ $= \overline{(\bar{x}.y.z)\uparrow \bar{x}}$
 $= ((\bar{x}.y)\uparrow z)\uparrow \bar{x}$ $= (\overline{\bar{x}.y}\uparrow z)\uparrow \bar{x}$
 $= ((\bar{x}.y\uparrow \bar{x}.y)\uparrow z)\uparrow \bar{x}$



Attention, cette solution est la plus compliquée. En réalité, en appliquant le théorème d'inhibition, on aurait pu simplifier l'équation de F comme suit :

$$F(x,y,z) = \bar{x}.y.z + x = x + \bar{y}.z$$

Donc il s'agit de trouver une formule à base de NAND équivalent à : $x + \bar{y}.z$

$$F(x,y,z) = \bar{y}.z + x$$

$$= \overline{(\overline{\bar{y}.z} + x)}$$

$$= \overline{(\bar{y}.z).(\bar{x})}$$

ce qui donne : $((y\uparrow y)\uparrow z)\uparrow(x\uparrow x)$

Exo-3 Trouver l'équation de la fonction définie par la table de vérité suivante :

| | x | y | Z | F ₂ (x,y,z) |
|----------------|---|---|---|------------------------|
| m ₀ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| m ₁ | 0 | 0 | 1 | 0 |
| m ₂ | 0 | 1 | 0 | 0 |
| m ₃ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| m ₄ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| m ₅ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| m ₆ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| m ₇ | 1 | 1 | 1 | 1 |

Indication : Rappelez-vous la formule suivante :

$F(x,y,z) = \sum_{i=0}^7 v_i m_i$ avec m_i : les mintermes et v_i les valeurs de vérité de F correspondant à chaque terme m_i .

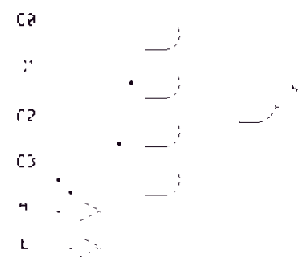
Réponse : $F(x,y,z) = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$

Je rappelle les expressions des mintermes:

| Mintermes | Termes associés |
|----------------|---------------------|
| m ₀ | $\bar{x}.y.z$ |
| m ₁ | $\bar{x}.y.\bar{z}$ |
| m ₂ | $\bar{x}.y.z$ |
| m ₃ | $\bar{x}.y.z$ |
| m ₄ | $x.y.\bar{z}$ |
| m ₅ | $x.y.z$ |
| m ₆ | $x.y.\bar{z}$ |
| m ₇ | $x.y.z$ |

ce qui fait : $F(x,y,z) = \bar{x}.y.z + x.y.z + x.y.\bar{z} + x.y.z$

Exo-4 Donnez l'équation de sortie du circuit suivant :



Réponse : $Y = A.B.C3 + A.\bar{B}.C2 + \bar{A}.B.C1 + \bar{A}.\bar{B}.C0$

Exo-5 Ecrivez sous sa forme canonique disjonctive la fonction suivante : $F_1(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + x + z$ puis donnez sa table de vérité.

Réponse : $F_1(x, y, z) = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + x + z$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + x(y + \bar{y}) + (x + \bar{x})z$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + xy + x\bar{y} + xz + \bar{x}z$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + xy(z + \bar{z}) + x\bar{y}(z + \bar{z}) + xz(y + \bar{y}) + \bar{x}z(y + \bar{y})$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

$$F_1(x, y, z) = m_1 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

Séance de TD n°6 (Dimanche 16 au jeudi 20 mars)

Exo-6 : On définit un opérateur OU exclusif (ou XOR) par la formule suivante: $a \oplus b = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b}$

A - Trouvez : à quoi correspondent : $0 \oplus x$, $x \oplus 0$ et $x \oplus x$
Que déduisez-vous par rapport à la commutativité et l'idempotence?

Réponse :

$$0 \oplus x = \bar{0} \cdot x + 0 \cdot \bar{x} = 1 \cdot x = x$$

$$x \oplus 0 = \bar{x} \cdot 0 + x \cdot \bar{0} = x \cdot 1 = x$$

$$x \oplus x = \bar{x} \cdot x + x \cdot \bar{x} = 0$$

Par rapport à la commutativité on ne peut rien déduire. En effet, on trouve que $0 \oplus x = x \oplus 0$ mais cela ne suffit pas pour dire que l'opérateur \oplus est commutatif.

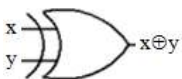
Cela dit si on se réfère à la définition de l'opérateur \oplus . On pourrait facilement démontrer qu'il est commutatif:

$$a \oplus b = \bar{a} \cdot b + a \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot a + b \cdot \bar{a} = b \oplus a$$

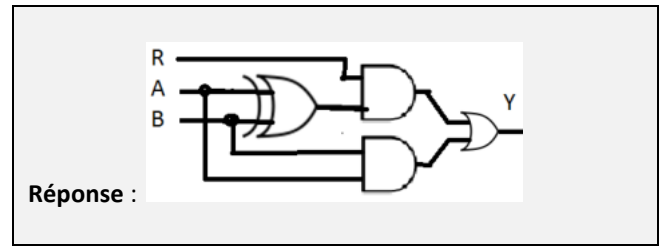
Par contre le fait de trouver que $x \oplus x = 0$ montre clairement que l'opérateur \oplus n'est pas idempotent!

Je rappelle que l'idempotence est la propriété qui fait qu'en composant une variable avec elle même donne la variable. (x opérateur x) = x . Par exemple " $x \cdot x = x$ ".

B - Voici le symbole représentant le XOR:



Donnez le schéma logique (logigramme) de l'équation suivante: $Y = (A \oplus B) \cdot R + A \cdot B$



Réponse :

Exo-7: Trois interrupteurs I_1 , I_2 et I_3 commandent l'allumage de 2 lampes L_1 et L_2 suivant les conditions suivantes :

- Dès qu'un ou plusieurs interrupteurs sont activés, la lampe L_1 doit s'allumer.
- La lampe L_2 ne doit s'allumer que si au moins 2 interrupteurs sont activés.

A - Donnez la table de vérité des fonctions régissant l'allumage des lampes L_1 et L_2 .

Réponse :

| Mintermes | I1 | I2 | I3 | L1 | L2 |
|----------------|----|----|----|----|----|
| m ₀ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| m ₁ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| m ₂ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| m ₃ | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| m ₄ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| m ₅ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| m ₆ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| m ₇ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

B- Déduisez les équations de L1 et L2 (sous forme canonique disjonctive)

Réponse :

$$L_1 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$L_1 = \bar{I}_1 \cdot \bar{I}_2 \cdot I_3 + \bar{I}_1 \cdot I_2 \cdot \bar{I}_3 + \bar{I}_1 \cdot I_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot \bar{I}_2 \cdot \bar{I}_3 + I_1 \cdot \bar{I}_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot I_2 \cdot \bar{I}_3 + I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$$

$$L_2 = m_3 + m_5 + m_6 + m_7$$

$$L_2 = \bar{I}_1 \cdot I_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot \bar{I}_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot I_2 \cdot \bar{I}_3 + I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$$

C - Simplifiez ces équations

Réponse : Afin de ne pas surcharger l'écriture, je vais poser $x=I_1$, $y=I_2$ et $z=I_3$

$$L_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot z + x \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot y \cdot z$$

$$L_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot (z + \bar{z}) + x \cdot \bar{y} \cdot (z + \bar{z}) + x \cdot y \cdot (z + \bar{z})$$

$$L_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + x \cdot y$$

$$L_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y + x \cdot (\bar{y} + y)$$

$$L_1 = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y + x = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + (x + \bar{x} \cdot y)$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + x + y = (x + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z) + y = (x + \bar{y} \cdot z) + y$$

$$= x + (y + \bar{y}z) = x + y + z = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$$

Séance de TD n°7 (dimanche 06 au jeudi 10 avril)

$$L_2 = \bar{I}_1 \cdot I_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot \bar{I}_2 \cdot I_3 + I_1 \cdot I_2 \cdot \bar{I}_3 + I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$$

$$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

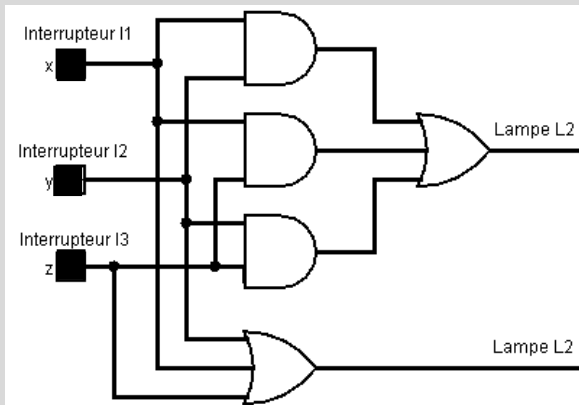
$$= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy(\bar{z} + z) = \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy =$$

$$= \bar{x}yz + x(\bar{y}z + y) = \bar{x}yz + x(y + \bar{y}z) = \bar{x}yz + x(y + z)$$

$$= \bar{x}yz + xy + xz = (xz + \bar{x}yz) + xy = xy + xz + yz$$

D - Dessinez le logigramme correspondant à L_1 et L_2 .

Réponse :



Exo.8 Donnez des expressions plus simples des fonctions suivantes:

$$F_1 = (x \cdot \bar{y} + z) \cdot (x + \bar{y}) \cdot z$$

$$F_2 = (a + b + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + a \cdot b + b \cdot c$$

$$F_3 = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot c + (a + b) \cdot \bar{c}$$

Réponse :

$$F_1 = (x \cdot \bar{y} + z) \cdot (x + \bar{y}) \cdot z =$$

$$= (x \cdot \bar{y}z + z \cdot z) \cdot (x + \bar{y}) = (x \cdot \bar{y}z + z) \cdot (x + \bar{y})$$

$$= (x\bar{y}z + xz + \bar{y}z) = xz(1 + \bar{y}) + \bar{y}z = xz + \bar{y}z = (x + \bar{y})z$$

$$F_2 = (a + b + c) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) + a \cdot b + b \cdot c$$

$$= (a\bar{a} + a\bar{b} + a\bar{c} + b\bar{a} + b\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} + c\bar{b} + c\bar{c}) + ab + bc$$

$$= ab + ac + \bar{a}b + b + \bar{a}c + c + bc$$

$$= ab + \bar{a}b + ac + \bar{a}c + b + c(1 + b)$$

$$= (a + \bar{a})b + (a + \bar{a})c + b + c = b + c + b + c = b + c$$

$$F_3 = \bar{a} \cdot b \cdot c + a \cdot c + (a + b) \cdot \bar{c}$$

$$= (a + \bar{a})c + a\bar{c} + b\bar{c} = (a + b)c + a\bar{c} + b\bar{c}$$

$$= ac + bc + a\bar{c} + b\bar{c} = a(c + \bar{c}) + b(c + \bar{c}) = a + b$$

Exo9 Simplifier par la méthode de Karnaugh la fonction F_1 décrite par la table de vérité suivante

| x | y | $F_1(x,y)$ |
|---|---|------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

Réponse :

| y | 0 | 1 |
|---|---|---|
| x | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

g1

g2

$$g1 = \bar{x}$$

$$g2 = \bar{y}$$

Exo10 Simplifier par la méthode de Karnaugh la fonction F_2 décrite par la table de vérité suivante

| x | y | z | $F_2(x,y,z)$ |
|---|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Réponse :

| x | yz | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|----|----|----|----|----|
| 0 | 00 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 00 | 0 | 0 | 1 | 1 |

g1

g2

$$g1 = \bar{x}\bar{y}$$

$$g2 = xy$$

$$F_2(x,y,z) = g1 + g2$$

$$F_2(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + xy$$

Exo11 Simplifier par la méthode de Karnaugh les fonctions F_3 et F_4 décrites par les formules suivantes :

$$F_3(x, y, z, t) = \sum (1,3,5,9,11,12,15)$$

Réponse :

$$F_3(x, y, z, t) = \sum (1,3,5,9,11,12,15)$$

| x y | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-----|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 00 | m ₀ | m ₄ | m ₁₂ | m ₈ |
| 01 | m ₁ | m ₅ | m ₁₃ | m ₉ |
| 11 | m ₃ | m ₇ | m ₁₅ | m ₁₁ |
| 10 | m ₂ | m ₆ | m ₁₄ | m ₁₀ |

| x y | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-----|----|----|----|----|
| 00 | | | 1 | |
| 01 | 1 | 1 | | 1 |
| 11 | 1 | | 1 | 1 |
| 10 | | | | |

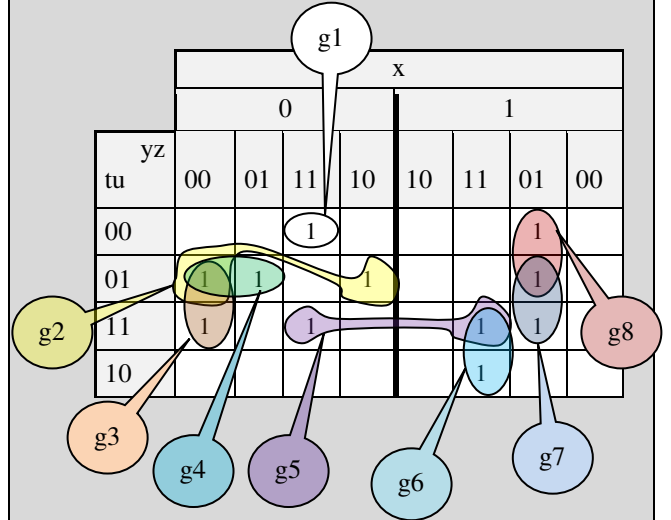
$$\begin{aligned} g1 &= xyz\bar{t} \\ g2 &= \bar{x}z\bar{t} \\ g3 &= xz\bar{t} \\ g4 &= \bar{y}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3(x, y, z, t) &= g1 + g2 + g3 + g4 \\ &= xyz\bar{t} + \bar{x}z\bar{t} + xz\bar{t} + \bar{y}t \end{aligned}$$

$$F_4(x, y, z, t, u) = \sum (1,3,5,9,12,15,20,21,23,30,31)$$

Réponse :

$$F_4(x, y, z, t, u) = \sum (1,3,5,9,12,15,20,21,23,30,31)$$



$$\begin{aligned} g1 &= \bar{x}yz\bar{t}\bar{u} & g2 &= \bar{x}z\bar{t}u & g3 &= \bar{x}\bar{y}z\bar{u} \\ g4 &= \bar{x}\bar{y}\bar{t}u & g5 &= yz\bar{t}u & g6 &= xyz\bar{t} \\ g7 &= x\bar{y}z\bar{u} & g8 &= x\bar{y}z\bar{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_4(x, y, z, t, u) &= g1 + g2 + g3 + g4 + g5 + g6 + g7 \\ &\quad + g8 \\ &= \bar{x}yz\bar{t}\bar{u} + \bar{x}z\bar{t}u + \bar{x}\bar{y}z\bar{u} + \bar{x}\bar{y}\bar{t}u + yz\bar{t}u + xyz\bar{t} \\ &\quad + x\bar{y}z\bar{u} + x\bar{y}z\bar{t} \end{aligned}$$