

Chapitre 2 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques

Série TD2



Séance de TD4 (Semaine du 30 avril au 6 mai 2017)

Lors de cette séance, les chargés de TD doivent remettre aux étudiants le QCM2 à rendre dans 2 semaines.

Q1 – Voici les axiomes de l’algèbre de Boole

- Idempotence
- Commutativité
- Associativité
- Eléments neutre
- Eléments symétrique
- Complémentarité
- Absorption
- DeMorgan
- Inhibition
- Double distributivité

Q2 – L’ensemble des parties d’un ensemble E muni des lois **Union** et **intersection** et de l’application involutive « **complémentaire par rapport à E** » est une algèbre de Boole.

- Vrai Faux

Q3 – Complétez les 2 tableaux ci-dessous :

Loi "+"	Nom de la propriété
$x + x = x$	
$x + y = y + x$	
$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$	
$x + 0 = x$	
$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$	
$\bar{x} + x = 1$	

Loi "."	Nom de la propriété
$x \cdot x = x$	
$x \cdot y = y \cdot x$	
$x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	
$x \cdot 1 = x$	
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	
$\bar{x} \cdot x = 0$	

Q4 – Le principe de dualité stipule qu’on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule juste en remplaçant les opérateurs « + » par « . » et « 1 » par « 0 ».

- Vrai Faux Définition incomplète

Q5 – Indiquez à quoi correspondent les formules suivantes ?

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = x + y$$

Q6 – Dans l’algèbre des circuits logiques, l’état logique « 1 » correspond à :

- Un niveau de tension de 220V
- Un niveau de tension de 0V
- Un niveau de tension voisine de 5V
- Une puissance électrique
- Un courant électrique
- Une lampe allumée
- Une lampe éteinte
- Un interrupteur mis sur ON
- Un interrupteur mis sur OFF

Q7 – Dans l’algèbre des circuits logiques, l’état logique « 0 » correspond à :

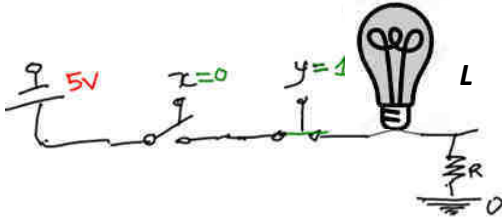
- Un niveau de tension de 220V
- Un niveau de tension de 0V
- Un niveau de tension voisine de 5V
- Une puissance électrique
- Un courant électrique
- Une lampe allumée
- Une lampe éteinte
- Un interrupteur mis sur ON
- Un interrupteur mis sur OFF

Q8 – Complétez le tableau ci-dessous :

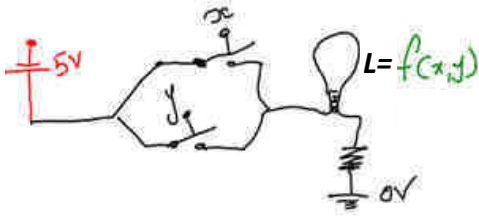
Etat électrique	Etat logique	Etat électrique	Etat logique

Q9 – En supposant que l’on représente deux variables booléennes « x » et « y » par 2 interrupteurs et une fonction « L » par une lampe.

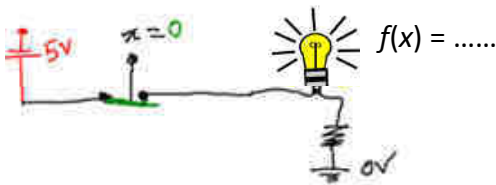
A ☞ Donnez la table de vérité qui définit la fonction « $L=f(x,y)$ » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



B ☞ Donnez la table de vérité qui définit la fonction « $L=f(x,y)$ » représentée dans la figure ci-dessous et indiquez à quelle situation correspond l'état représenté.



Q10 -- Le schéma électrique suivant



Correspond à :

- La négation
- Le OU
- Le ET
- Le OU exclusif
- Le NON OU exclusif
- L'équivalence

Q11 – Si vous avez n variables, combien de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction $F = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0)$:

--

Q12 – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

Transformation algébrique	Lois utilisées
$\bar{A} \cdot B + A \cdot B = B \cdot \bar{A} + B \cdot A$	
$B \cdot \bar{A} + B \cdot A = B \cdot (\bar{A} + A)$	
$B \cdot (\bar{A} + A) = B \cdot 1$	
$B \cdot 1 = B$	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$(A \oplus B) \cdot B + A \cdot B =$ $(\bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B}) \cdot B + A \cdot B$	
$= B \cdot (B \cdot \bar{A} + \bar{B} \cdot A) + A \cdot B$	
$= B \cdot (B \cdot \bar{A}) + B \cdot (\bar{B} \cdot A) + A \cdot B$	
$= (B \cdot B) \cdot \bar{A} + (B \cdot \bar{B}) \cdot A + A \cdot B$	
$= B \cdot \bar{A} + (B \cdot \bar{B}) \cdot A + A \cdot B$	
$= B \cdot \bar{A} + 0 \cdot A + A \cdot B$	
$= B \cdot \bar{A} + A \cdot B$	
$= B \cdot (\bar{A} + A)$	
$= B \cdot 1$	
$= B$	

Transformation algébrique	Lois utilisées
$x + (\bar{x} \cdot y) = (x + \bar{x}) \cdot (x + y)$	
$= 1 \cdot (x + y)$	
$= x + y$	

Q13 – Soit la table de vérité suivante

x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Indiquez les fonctions correspondent aux colonnes suivantes:

Colonne	Fonction
f_0	
f_1	
f_6	
f_7	
f_8	
f_9	
f_{14}	

Q14 – Démontrer la propriété suivante :

$$\underbrace{x + x + \dots + x}_{n \text{ fois}} = x$$

Indication :

Procédez par récurrence !
Et utilisez la propriété d'idempotence

Q15 – Démontrer la propriété : « $x \cdot x \cdot \bar{x} = 0$ ».
(Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q16 – Démontrer la propriété : « $x \cdot 0 = 0$ ».
(Indiquez, pour chaque étape, la propriété utilisée).

Q17 – Soient x et y deux variables booléennes
 $(x, y) \in V^2$ où $V = \{0,1\}$

☞ On définit l'opérateur « \oplus » de la manière suivante : $x \oplus y = 1$ si et seulement si $x \neq y$

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que
 $x \oplus y = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$

☞ On définit l'opérateur $\bar{\oplus}$ de la manière suivante : $x \bar{\oplus} y = 1$ si et seulement si $x = y$

Montrez, à l'aide d'une table de vérité que
 $x \bar{\oplus} y = \overline{x \oplus y}$

Q18 – Si je trouve un ensemble d'opérateurs $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ de sorte que toute fonction logique peut être exprimée à base des opérateurs de cet ensemble. Comment qualifieriez-vous cet ensemble.

Q19 – La loi de **De Morgan** stipule que la négation d'une somme logique est égale au produit des négations et la négation d'un produit logique est égale à la somme des négations.

- Appliquez cette loi sur 2 variables x_2 et x_1 .
- Appliquez cette loi sur 3 variables x_3, x_2 et x_1 .
- Appliquez cette loi sur n variables x_n, \dots, x_2, x_1 .
- En vous servant d'une table de vérité, démontrer cette loi pour 2 variables x_2 et x_1 .

Q20 – Montrer que les ensembles des opérateurs $\{\text{ET}, \text{NON}\}$ et $\{\text{OU}, \text{NON}\}$ constituent des systèmes logiques complets.

Q21 – Soit $f(x, y, z) = x \cdot y + y \cdot \bar{z}$

- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NAND : $x \uparrow y = \bar{x} \cdot \bar{y}$
- Exprimez cette fonction à base uniquement de l'opérateur NOR : $x \downarrow y = \overline{x + y}$

Q22 – Donnez la table de vérité des fonctions :

$$f_1(x, y, z) = x \cdot y + x \cdot \bar{y} + y \cdot z$$

$$f_2(x, y, z) = \overline{x \cdot (\bar{y} + z)}$$

Indication : Vous devez d'abord exprimer $f(x, y, z)$ sous sa forme canonique disjonctive, puis vous déduisez sa table de vérité.

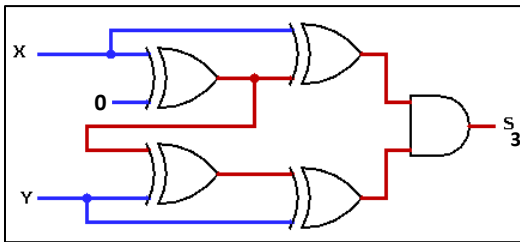
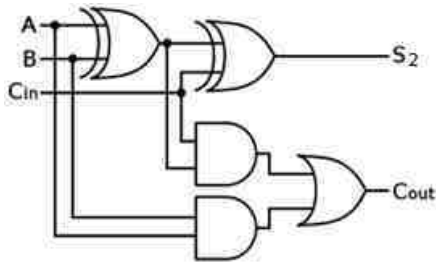
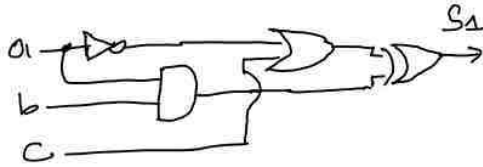
Q23 – Donnez le logigramme des fonctions suivantes :

$$f_1 = (x + \bar{y}) \uparrow (x \oplus z)$$

$$f_2 = (x + \bar{y}) \downarrow (x \bar{\oplus} z)$$

Les étudiants doivent montrer le QCM2. Une correction de ce QCM sera publiée en ligne.

Q26 – Donnez les équations de sortie des circuits ci-dessous



		x							
		0				1			
tu ↓	yz→	00	01	11	10	10	11	01	00
	00								
01									
11									
10									

		x							
		0				1			
tu ↓	yz→	00	01	11	10	10	11	01	00
	00								
01									
11									
10									

Q27 – Donnez la table de vérité de la fonction F suivante : $F(x,y,z,t) = \Sigma(0,1,4,8,13,15)$

Q28 – Indiquez par une croix toutes les cases adjacentes de la case de couleur foncée

		yz→			
		00	01	11	10
t ↓	0				
	1				

		yz→			
		00	01	11	10
tu ↓	00				
	01				
	11				
	10				

Q29 – Soit la fonction F suivante :

A - Donnez la forme canonique disjonctive de F

B - En utilisant la méthode algébrique donnez une forme simplifiée de F à base des opérateurs ET, OU et NON

D - Utilisez la table de Karnaugh pour vérifier vos résultats (celui obtenu en question B)

E - Dessinez le logigramme de F

F - Indiquez combien de formes simplifiées vous pouvez avoir

m_i	x	y	z	t	$F(x,y,z,t)$
m_0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	1	0
m_2	0	0	1	0	1
m_3	0	0	1	1	1
m_4	0	1	0	0	1
m_5	0	1	0	1	1
m_6	0	1	1	0	0
m_7	0	1	1	1	0
m_8	1	0	0	0	0
m_9	1	0	0	1	0
m_{10}	1	0	1	0	1
m_{11}	1	0	1	1	0
m_{12}	1	1	0	0	1
m_{13}	1	1	0	1	0
m_{14}	1	1	1	0	1
m_{15}	1	1	1	1	1