Mathématique(I)

INTRODUCTION

Comme tout étudiant en science, l'étudiant en économie est en face de variables (données) économiques, représentées par les **nombres** considérés comme objets mathématiques.

Dans le but d'analyser ces données, les mathématiques sont apparues comme le moyen le plus approprié pour modéliser la plupart des phénomènes économiques et de les faire analysés c'est-à-dire modéliser consiste à écrire les hypothèses que l'on fait sur les concepts économiques en utilisant le formalisme mathématique qui permet de représenter, en général, ces concepts sous forme d'équations ou inégalité, puis on en tire logiquement les conséquences, qu'on réécrit ensuite en termes économiques.

En effet, dans chaque théorie mathématique on trouve des méthodes, plus au moins, simples et claires qui sont présentées dans un mode de déduction logique. Ce mode de raisonnement, qui accompagne ces sciences (économies, commerciales et sciences de gestion) dans leurs développements, a donné des résultats satisfaisants et une précision proche de la réalité économique.

Les nombres dont on a déjà parlé, ce sont les nombres réels, donc il est nécessaire de rappelé les propriétés essentielles qui serviront à l'étude des suites de nombres et aux fonctions d'une variable réelle.

Ce modeste cours est réparti en trois chapitres, le premier donne les définitions générales des suites et les principaux résultats de convergence. Le deuxième est consacré à l'étude des fonctions d'une variable réelle ; nous allons présenter en détail les fonctions puissances, exponentielles et logarithmes, puis on introduit la notion de limite qui est centrale dans les définitions de la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Nous donnons par la suite l'essentiel de ce qu'il faut connaître pour la recherche des extremums et les points d'inflexion. Le troisième donne des méthodes de calcul de l'aire basées sur le théorème fondamental du calcul intégral. Et on achève ce cours par quelques notions générales sur les fonctions de plusieurs variables réelles.

1.Nombres réels

Le sujet de ce chapitre est tout à fait classique dans l'enseignement des mathématiques ; pour le besoin de faire de l'analyse et de présenter des démonstrations rigoureuses et claires, nous allons fixer un certain nombre de propositions simples comme axiomes par lesquelles on déduit les propriétés des nombres réels de grande utilité en analyse et qui sont jugées nécessaires de les imposer aux étudiants.

Rappel sur les nombres réels :

1. **Axiomes des nombres réels :**

Le corps des nombres réels est un ensemble $\mathbb{R}$ pour lequel sont définies :

a) deux applications $(x, y) \longmapsto x + y$ et $(x, y) \longmapsto xy$ de$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;

b) une relation $x \leq y$ (écrite aussi $y \geq x$) entre les éléments de $\mathbb{R}$, satisfaisant aux quatre groupes d'axiomes suivants :

$(\boldsymbol{I})$ $\mathbb{R}$ **est un corps**, en d'autres termes :

$(I.1)$ $x + (y + z) = (x + y) + z$;

$(I.2)$ $x + y = y + x$;

$(I.3)$ il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$, tel que $0 + x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$(I.4)$ pour chaque élément $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$, tel que $x + (-x) = 0$;

$(I.5)$ $x(yz) = (xy)z$;

$(I.6)$ $xy = yx$;

$(I.7)$ il existe un élément $1 \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ tel que $1x = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$(I.8)$ pour chaque élément $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ (noté aussi $\frac{1}{x}$) tel que $xx^{-1} = 1$;

$(I.9)$ $x(y + z) = xy + xz$.

Nous supposons que les conséquences élémentaires de ces axiomes sont connues.

$(\boldsymbol{II})$ $\mathbb{R}$ **est un corps ordonné**. Ceci signifie que les axiomes suivants sont satisfaits :

$(II.1)$ $x \leq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$.

$(II.2)$ $x \leq y$ et $y \leq x$ est équivalent à $x = y$.

$(II.3)$ pour deux éléments quelconques x, y dans $\mathbb{R}$, ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$.

$(II.4)$ $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$.

$(II.5)$ $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.

$(\boldsymbol{III})$ $\mathbb{R}$ **est archimédien et satisfait à l'axiome des intervalles emboîtés.**

Cela signifie que les axiomes suivants sont vérifiés :

$(III.1)$ <u>axiome d'Archimède :</u> pour tout couple de nombres réels x, y, tels que $0 < x$ et $0 \leq y$, il existe un entier n tel que $y \leq n.x$ où $n.x = x + x + \cdots + x$, n fois le nombre x.

$(III.2)$ <u>axiomes des intervalles emboîtés :</u> étant donnée une suite $([a_n, b_n])_n$ d'intervalles fermés tels que $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$ pour tout n, alors l'intersection de cette suite d'intervalles n'est pas vide i.e $\bigcap_n([a_n, b_n])_n \neq \emptyset$.

2. <u>Conséquences de la structure d'ordre des nombres réels :</u>

La relation $\ll x \leq y$ et $x \neq y \gg$ s'écrit $x < y$ ou $y > x$.

La relation $x \leq y$ est donc équivalente à $\ll x < y$ ou $x = y \gg$.

(2.1) *Pour tout couple de nombres réels x, y, une et une seule des trois relations*

$$\boxed{x < y\,,\; x = y,\; x > y},$$

a lieu.

Si $x \neq y$, d'après $(II.3)$, $x < y$ ou $x > y$ mais d'après $(II.2)$ il est impossible d'avoir simultanément $x < y$ et $x > y$ car $x \neq y$.

(2.2) *Les deux relations $\ll x \leq y$ et $y < z \gg$ et $\ll x < y$ et $y \leq z \gg$ impliquent chacune $x < z$,*

$$\boxed{(\ll x \leq y \text{ et } y < z \gg) \Longrightarrow x < z} \text{ et } \boxed{(\ll x < y \text{ et } y \leq z \gg) \Longrightarrow x < z}.$$

Car, d'après $(II.1)$, elles impliquent $x \leq z$, et si on suppose que $x = z$, alors on aura à la fois $x \leq y$ et $y < x$ (ou $x < y$ et $y \leq x$), ce qui est absurde d'après $(II.2)$.

(2.3) *Si (x_i) et (y_i) sont deux suites finies de n nombres réels $(1 \leq i \leq n)$ tels que $x_i \leq y_i$ pour tout i, alors*

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \ldots\ldots(1)$$

Si, en outre, $x_i < y_i$ pour un indice au moins, alors

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_n < y_1 + y_2 + \cdots + y_n} \ldots\ldots(2)$$

Montrons tout d'abord ces résultats pour $n = 2$, les hypothèses $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$ impliquent successivement, d'après $(II.4)$

$$x_1 + x_2 \leq y_1 + x_2 \leq y_1 + y_2,$$

d'où la première conclusion. En outre, la relation $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ implique que

$x_1 + x_2 = y_1 + x_2$ et $y_1 + y_2 = y_1 + x_2$ d'après $(II.2)$, donc $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$ contradiction avec au moins une des inégalités $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ est stricte, ce qui entraîne la deuxième conclusion.

On termine la démonstration par récurrence sur n. on suppose que les inégalités (1) et (2) sont vérifiées sous leurs hypothèses jusqu'à l'entier n. On montre que les inégalités (1) et (2) sont aussi vérifiées pour l'entier $(n+1)$.

On note $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ et $y = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$. D'après les hypothèses suivantes

$x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2, \cdots, x_n \leq y_n$ et $x_{n+1} \leq y_{n+1}$, on aura $x \leq y$ (hypothèse de récurrence) et $x_{n+1} \leq y_{n+1}$ qui à leurs tours impliquent $x + x_{n+1} \leq y + x_{n+1} \leq y + y_{n+1}$ d'où la première conclusion.

Maintenant, nous allons vérifier que $x + x_{n+1} < y + y_{n+1}$ dès que l'une des inégalités $x_i \leq y_i$ est stricte pour l'indice $i \in \{1, \cdots, n, n+1\}$.

Supposons que i vérifie $1 \leq i \leq n$, donc $x_i < y_i$ implique $x < y$ (hypothèse de récurrence).

Si $x + x_{n+1} = y + y_{n+1}$, alors les inégalités $x + x_{n+1} \leq y + x_{n+1} \leq y + y_{n+1}$ entraîne

$x + x_{n+1} = y + x_{n+1}$ et cela implique que $x = y$.

De même pour $i = n + 1$: supposons que $x_{n+1} < y_{n+1}$, si $x + x_{n+1} = y + y_{n+1}$, alors $x + x_{n+1} \leq y + x_{n+1} \leq y + y_{n+1}$ entraîne $y + x_{n+1} = y + y_{n+1}$ i.e $x_{n+1} = y_{n+1}$.

Finalement, si $x_i < y_i$ pour un certain $i \in \{1, \cdots, n, n+1\}$, alors l'égalité

$x + x_{n+1} = y + y_{n+1}$ n'aura pas lieu. D'où $x + x_{n+1} < y + y_{n+1}$.

(2.4) *La relation $x \leq y$ équivaut à $x + z \leq y + z$;la relation $x < y$ équivaut à $x + z < y + z$,*

$$\boxed{x \leq y \iff x + z \leq y + z} \text{ et } \boxed{x < y \iff x + z < y + z}.$$

La première : d'après $(II.4)$, la relation $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$, réciproquement $x + z \leq y + z$ implique $x + z + (-z) \leq y + z + (-z)$ i.e $x \leq y$.

La deuxième : la relation $x < y$ s'écrit $x \leq y$ et $x \neq y$ ainsi la relation $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$. Si $x + z = y + z$, alors $x = y$ et cela contredit l'hypothèse,

d'où $x + z < y + z$.

(2.5) *Les relations $x \leq y$, $0 \leq y - x$, $x - y \leq 0$, $-y \leq -x$ sont équivalentes, même résultat lorsque $<$ remplace $\leq$,*

$$\boxed{x \leq y \iff 0 \leq y - x \iff x - y \leq 0 \iff -y \leq -x}.$$

Ceci résulte de (2.4) en prenant successivement $z = -x$, $z = -y$, $z = -x - y$.

Les nombres réels tels que $x \geq 0$ (resp. $x > 0$) sont appelés positifs (resp. strictement positif) ; ceux qui sont tels que $x \leq 0$ (resp. $x < 0$) négatifs (resp. strictement négatifs).

L'ensemble des nombres réels positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathbb{R}_+$ (resp.$\mathbb{R}_+^*$).

(2.6) *Si $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont positifs, il en est de même pour $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$,*

$$\boxed{(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, x_i \geq 0) \Longrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0};$$

de plus,

$$\boxed{x_1 + x_2 + \cdots + x_n > 0, sauf\ si\ x_1 = x_2 = \cdots, = x_n = 0}.$$

Ce résultat est un cas particulier de (2.3).

En particulier, $x \geq 0$ (resp. $x > 0$) est équivalent à $nx \geq 0$ (resp. $nx > 0$) pour tout entier $n > 0$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*: x \geq 0 \Leftrightarrow nx \geq 0}\ et\ \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*: x > 0 \Leftrightarrow nx > 0}.$$

(2.7) *Si $z \geq 0$, la relation $x \geq y$ implique $xz \geq yz$,*

$$\boxed{Si\ z \geq 0: x \geq y \Longrightarrow xz \geq yz}.$$

D'après (2.5) $x \geq y$ implique $(x-y) \geq 0$, et par l'axiome $(II.5)$, $(x-y)z \geq 0$; d'où $xz - yz \geq 0$ car $(-y)z = -yz$, et par suite $xz \geq yz$.

(2.8) *La relation $x \geq 0$ équivaut à $-x \leq 0$,*

$$\boxed{x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0}.$$

Cela résulte de (2.4) ou (2.5).

(2.9) *Les relations $x \leq 0$ et $y \geq 0$ impliquent $xy \leq 0$,*

$$\boxed{(x \leq 0\ et\ y \geq 0) \Longrightarrow xy \leq 0};$$

les relations $x \leq 0$ et $y \leq 0$ impliquent $xy \geq 0$,

$$\boxed{(x \leq 0\ et\ y \leq 0) \Longrightarrow xy \geq 0}.$$

Mêmes résultats lorsque $<$ remplace $\leq$.

La première et la deuxième résultent de$(II.5)$, (2.8) et de$(-x)y = -xy$, $(-x)(-y) = -xy$;

La troisième découle de l'équivalence de $xy = 0$ et $(x = 0$ ou $y = 0)$ à partir des axiomes des nombres réels.

En particulier, $x^2 \geq 0$ pour tout nombre réel et $x^2 > 0$, sauf si $x = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0\ et\ x^2 > 0, sauf\ si\ x = 0\ }.$$

Il en résulte que $1 = 1^2 > 0$ (inégalité stricte d'après $(I.7)$),

$$\boxed{1 > 0}.$$

Il résulte de (2.6) que le nombre réel $n.1 > 0$ (1 additionné n fois) pour $n > 0$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*: n.1 > 0}.$$

Ceci montre que l'application $n \longmapsto n.1$ des entiers naturels dans $\mathbb{R}$ est injective, et conserve relation d'ordre, addition et multiplication ; par suite, les entiers naturels sont, à l'aide de cette application, identifiés à des nombres réels.

(2.10) *Si $x > 0$, alors $x^{-1} > 0$. Pour $z > 0$, la relation $x \leq y$ est équivalente à $xz \leq yz$,*

$$\boxed{x > 0 \Longrightarrow x^{-1} > 0} \; et \; \boxed{si\ z > 0 : x \leq y \Leftrightarrow \ xz \leq yz}.$$

La relation $0 < x < y$ est équivalente à $0 < y^{-1} < x^{-1}$ et implique la relation $0 < x^n < y^n$ pour tout entier $n > 0$,

$$\boxed{0 < x < y \Leftrightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}} \; et \; \boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < x < y \Longrightarrow 0 < x^n < y^n}.$$

Le premier résultat provient du fait que $xx^{-1} = 1 > 0$, donc $x^{-1} > 0$ d'après (2.9) ; la première implication du second résulte de (2.5) et $(II.5)$, et la réciproque, du premier résultat et (2.5). Le troisième est une conséquence directe du premier et du second.

Le quatrième résulte par récurrence sur n. En effet, les inégalités $0 < x < y$ et $0 < x^n < y^n$ impliquent $0 < xy^n < y^{n+1}$ et $0 < x^{n+1} < xy^n$, car $y^n > 0$, $x > 0$, donc par transitivité $0 < x^{n+1} < y^{n+1}$.

La réciproque de l'implication est vraie si x et y sont strictement positifs et distincts. En effet, si $x > y$ alors d'après ce qui précède on aura $x^n > y^n$, par conséquent les deux inégalités $x^n > y^n$ et $x^n < y^n$ sont simultanément vérifiées, ce qui donne l'égalité$x^n = y^n$ et par la suite $x = y$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, donc il nous reste la possibilité $x < y$ d'après ***(2.1)***.

2.Suites numériques

Introduction:

En économie, on a souvent besoin d'étudier l'évolution des valeurs d'une variable économique au cours du temps ce qui nous donne une suite de nombres, par exemple la suite formée des valeurs (nombres) successives :

-du PIB chaque année ;

-du taux de chômage chaque mois ;

-du taux d'inflation chaque année.

Il est donc utile pour l'économiste de savoir analyser des suites de nombres et répondre à des questions comme :

-les valeurs sont-elles de plus en plus élevées? Si la réponse est positive, on dit que la suite est croissante

-les valeurs de cette suite varient-elles de moins en moins avec le temps, pour se rapprocher d'une valeur donnée? Si cela est confirmé, on dit que la suite admet une limite finie ou convergente.

L'étude mathématique des suites numériques (particulièrement les suites des nombres réels) permet de répondre à ce type de questions.

Une suite réelle, notée (U_n) où $n \in \mathbb{N}$, est une succession infinie de nombres réels U_n numérotés par l'entier n, soit U_0, U_1,U_2, etc…

Une formulation mathématique est la suivante :

1. **Définition mathématique** : Une suite numérique, ou suite de nombres réels, est une fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ i.e U:$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \longmapsto U(n)$.

$U(n)$ est l'image de l'entier n par U. On utilise la notation U_n au lieu de $U(n)$.

On désigne par (U_n) toutes les valeurs de la suite U i.e $(U_n) = (U_1, U_2, U_3, U_4, \cdots)$ de valeurs de U et dont chaque valeur est appelée terme.

Application :

Si j'ai initialement $3000\ DA$ d'économies et que j'ajoute $200\ DA$ par mois à mon épargne, alors la suite qui décrit l'évolution de mon épargne au cours du temps est la suite :

$U_0 = 3000$; $U_1 = 3200$; $U_2 = 3400$; etc.

Mon épargne U_n le n-ième mois sera égal à $3000 + 200n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 200n + 3000$.

2. **Propriétés des suites** :

On va maintenant donner quelques définitions mathématiques bien utiles pour décrire l'évolution d'une suite de nombres réels.

* On dit que la suite (U_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq U_{n+1}$.
* On dit que la suite (U_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq U_{n+1}$.
* On dit que la suite (U_n) est monotone si elle est croissante, ou si elle est décroissante.

Exemples :

1. La suite définie par $U_n = 200n + 3000$ est croissante (monotone).
2. La suite définie par $V_n = \frac{1}{1+n}$ est décroissante (monotone).
3. La suite définie par $W_n = (-1)^n$ n'est pas monotone.

Dans l'étude d'une suite, il est utile de savoir si celle-ci peut varier de façon très importante, ou si elle reste cloisonnée entre des bornes. Cela conduit aux définitions suivantes.

* On dit que la suite (U_n) est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$.
* On dit que la suite (U_n) est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq m$.
* On dit que la suite (U_n) est bornée si elle est majorée et minorée.

Exemples :

1) $U_n = \frac{1}{1+n}$ est minorée par 0 et majorée par 1 donc bornée.

2) $V_n = n^2$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée donc n'est pas bornée.

3) $W_n = (-1)^2$ est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Suites arithmétiques, suites géométriques :

En principe, il ya deux types de suites particulièrement simples et utiles, notamment pour analyser la croissance(ou décroissance) de variables économiques.

- On dit que la suite (U_n) est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r.$$

Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique. On a aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + n.r.$$

- On dit que la suite (U_n) est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q.U_n.$$

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique. On écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0.q^n.$$

Application :(suite géométrique)

Une personne place une somme de 5000 DA avec un taux d'intérêt $q = 5\%$ i.e $5000\ DA$ vont augmenter de 5% par an. On pose $y_0 = 5000\ DA$.

Au bout d'un an :$y_1 = 5000 + 5000\frac{5}{100}$=$5000(1 + 0{,}05) = 5000 \times 1{,}05$.

Au bout de deux ans : $y_2 = y_1 + y_1\frac{5}{100}$=$y_1(1 + 0{,}05) = y_1 \times 1{,}05 = 5000 \times 1{,}05^2$.

La richesse au bout de n années : $y_n = 5000 \times 1{,}05^n$ donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$.

2.Convergence :

Quand on étudie l'évolution d'une variable économique, il est intéressant de savoir si cette variable va fluctuer de façon importante à l'avenir ou bien, au contraire, elle va fluctuer de moins en moins avec le temps, pour se rapprocher d'un nombre donné que l'on appellera sa limite.

Définition :

Une suite (U_n) est dite convergente s'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ tel que, si on fait tendre suffisamment n, le terme U_n va se rapprocher d'aussi près que l'on veut de l .

On dit, dans ce cas, que l est la limite de (U_n) et on note $l = \lim_{n \to +\infty} U_n$.

Si (U_n) ne converge pas on dit qu'elle diverge.

Formulation mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Longrightarrow |U_n - l| < \varepsilon.$$

Formulation mathématique des limites infinies :

* Lorsque (U_n) tend vers $+\infty$:

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}: n \geq N \Longrightarrow U_n > A.$$

On écrit $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

* Lorsque (U_n) tend vers $-\infty$:

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}: n \geq N \Longrightarrow U_n < -A,$$

On écrit $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

Ces formulations ne sont utiles, en général, que pour la vérification de certaines limites et les démonstrations de théorèmes.

Exemples :

1. $U_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}: n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors d'après l'axiome d'Archimède, il existe pour le nombre $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$ i.e $\frac{1}{N} < \varepsilon$ par conséquent dès que $n \geq N$ on aura $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.$\blacksquare$

2. $U_n = n^2 \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ i.e $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}: n \geq N \Longrightarrow n^2 > A$. On prend un $A > 0$ quelconque, donc d'après l'axiome d'Archimède, il existe pour ce nombre un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N > A$. Et si $n \geq N$, alors d'une part on a $n^2 \geq N^2$ et d'autre part $N^2 \geq N$puisque $N \geq 1$, on déduit de tout celà que $n^2 \geq N > A$ pour tout $n \geq N$.$\blacksquare$

Certaines conséquences sur les suites découlent immédiatement de la convergence.

1. Toute suite convergente est bornée.

   La réciproque n'est pas toujours vraie(prenez par exemple $U_n = (-1)^n$).

2. Si une suite converge, alors sa limite est unique.

3. Une suite (U_n) converge vers 0 si et seulement si la suite des valeurs absolues $(|U_n|)$ converge vers 0 i.e $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |U_n| = 0$.

4. $\lim_{n\to+\infty} U_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} |U_n| = |l|$.

   La réciproque n'est pas toujours vraie (prenez aussi par exemple $U_n = (-1)^n$).

Maintenant nous allons citer quelques limites de suites simples, et qui seront un exemple de suites de références.

a) Suite arithmétique : $U_n = U_0 + n.r, r \neq 0$.

* Si $r > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
* Si $r < 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.

b) Suite géométrique : $U_n = q^n$.

* Si $q \leq -1$, alors (U_n) n'a pas de limite ;
* Si $-1 < q < 1$, alors (U_n) tend vers 0 ;
* Si $q = 1$, alors (U_n) est constante égale à 1 i.e a pour limite 1 ;
* Si $q > 1$, alors (U_n) tend vers $+\infty$.

c) Suites puissances :$U_n = n^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

* Si $\alpha > 0$, alors (U_n) tend vers $+\infty$;
* Si $\alpha < 0$, alors (U_n) tend vers 0.

Dans la mesure où le calcul direct de limite ne donne rien, nous faisons appel à quelques critères qui permettent de prouver facilement l'existence de la limite (nous souhaitons même d'avoir la valeur de la limite). C'est l'objet de cette section.

Suite encadrée : le résultat suivant indique que lorsqu'une suite (U_n) est cloisonnée entre deux autres suites qui tendent vers la même limite, alors (U_n) va avoir aussi la limite des deux suites.

Résultat 1 : supposons qu'à partir d'un certain entier n : $V_n \leq U_n \leq W_n$.

Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} W_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.

En particulier, pour $n \geq N$: $l \leq U_n \leq V_n$, $l \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = l$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.

Exemple d'application :

Supposons que $|U_n| \leq A.q^n$ où $0 < q < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Soit $U_n = (-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\cdots\left(\frac{1}{2n+1}\right)$, on constate que $|U_n| = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\cdots\left(\frac{1}{2n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Car chaque facteur dans le produit est majoré par $\frac{1}{3}$, par conséquent le produit des facteurs lui aussi majoré par la suite géométrique $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ de raison $0 < \frac{1}{3} < 1$ de limite 0, donc $|U_n| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ et cela aussi entraine que $U_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Dans le même ordre d'idée, en comparant deux suites à partir d'un certain rang, la limite de l'une d'elle permet de déduire la limite de l'autre.

<u>Résultat 2 :</u> Soient (U_n) et (V_n) deux suites telles que $U_n \geq V_n$ à partir d'un certain entier.

1. Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

<u>Exemple :</u> Soit $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k} = n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$.

Chaque terme de la somme est minoré par $\frac{1}{2n}$ i.e $\frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2n}$ pour $1 \leq k \leq n$, cela implique que $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\,fois} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ et par conséquent $U_n \geq \frac{1}{2}n$ où $\frac{1}{2}n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

Quand une suite est monotone, sa convergence est liée à la condition de majoration et minoration de la suite. Cela conduit au résultat suivant :

<u>Résultat 3 :</u> Considérons une suite croissante.

1. Si cette suite est majorée, alors elle converge.
2. Si la suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

Cela signifie que la suite croissante converge si elle est majorée, et si elle ne converge pas, alors elle tend nécessairement vers $+\infty$.

De même pour une suite décroissante,

1. Si cette suite est minorée, alors elle converge.
2. Si la suite n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

<u>Exemple :</u>

....

Le résultat suivant permet de trouver la limite d'un produit de deux suites si l'une est bornée et l'autre tend vers 0.

<u>Résultat 4 :</u> Soit (U_n) une suite s'écrivant comme produit de a_n et b_n i.e $U_n = a_n.b_n$.

Si (a_n) est bornée et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Exemple : Soit $U_n = (-1)^n.\frac{1}{n}$. on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ ce qui signifie que la suite $((-1)^n)$ est bornée, et $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$.

Nom du document : MATHEMATIQUES I (Enregistré automatiquement)
Répertoire : D:\ANALYSE
Modèle : C:\Documents and Settings\sis\Application Data\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Titre :
Sujet :
Auteur : pers
Mots clés :
Commentaires :
Date de création : 10/01/2021 08:55:00
N° de révision : 3
Dernier enregistr. le : 17/10/2021 23:17:00
Dernier enregistrement par : pers
Temps total d'édition : 1 652 Minutes
Dernière impression sur : 17/10/2021 23:18:00
Tel qu'à la dernière impression
Nombre de pages : 15
Nombre de mots : 3 267 (approx.)
Nombre de caractères : 17 970 (approx.)