Chapitre 1

Notions de logique

Chapitre 2

Ensembles et Applications

2.1 Ensembles

2.1.1 Définitions et notations

Un ensemble $\mathbf{E}$ est une collection d'objets tous distincts rassemblés d'après une propriété commune. Ces objets sont appelés éléments de $\mathbf{E}$. Un élément x appartenant à $\mathbf{E}$, se note $x \in \mathbf{E}$, sinon $x \notin \mathbf{E}$.

- Certains ensembles auront un nombre fini d'éléments, et seront appelés : ensembles finis.
- Un ensemble peut-être écrit :
  i) **En extension** : On donne la liste de ses éléments. Par exemple : $\mathbf{E} = \{0, 3, 5, 9\}$, $\mathbf{E}$ ensemble des étudiants de première année MI.
  ii) **En compréhension** : On donne la ou les propriétés qui caractérisent ses éléments. $\mathbf{E} = \{x |\ x \text{ vérifie la propriété } \ P(x)\}$.
- Le nombre d'éléments de $\mathbf{E}$ est appelé cardinal de $\mathbf{E}$, on le note par $Card(\mathbf{E})$.

Exemple 2.1.
- *Ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$.
- *Ensemble des entiers relatifs* $\mathbb{Z}$.
- *Ensemble des rationnels* $\mathbb{Q}$.
- *Ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$.
- *Ensembles des nombre complexe* $\mathbb{C}$.
- *L'ensemble qui n'a aucun élément, est appelé ensemble vide, on le note* $\emptyset$.

- *Tout ensemble de la forme* $\mathbf{E} = \{x\}$, *est appelé singleton.*

2.1.2 Sous ensembles

On dit que $\mathbf{F}$ est un sous ensemble de $\mathbf{E}$ et on note $\mathbf{F} \subset \mathbf{E}$, si tout élément de $\mathbf{F}$ appartient à $\mathbf{E}$.

On dit aussi que $\mathbf{F}$ est une partie de $\mathbf{E}$. On écrit

$\mathbf{F} \subset \mathbf{E} \Longleftrightarrow \forall x,\ (x \in \mathbf{F}) \Longrightarrow (x \in \mathbf{E})$.

$\mathbf{F} \not\subset \mathbf{E} \Longleftrightarrow \exists x, (x \in \mathbf{F})$ et $(x \notin \mathbf{E})$.

Exemple 2.2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Ensemble des parties d'un ensemble

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, on note par $\mathcal{P}(\mathbf{E})$, l'ensemble des parties de $\mathbf{E}$. On écrit :

$\mathcal{P}(\mathbf{E}) = \{A,\quad A \subset \mathbf{E}\}$.

Remarque 2.1.

1. $A \in \mathcal{P}(\mathbf{E}) \Longleftrightarrow A \subset \mathbf{E}$
2. $\{x\} \in \mathcal{P}(\mathbf{E}) \Longleftrightarrow x \in \mathbf{E} \Longleftrightarrow \{x\} \subset \mathbf{E}$.
3. $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$, ($\mathcal{P}(\mathbf{E})$ n'est pas vide même si $\mathbf{E}$ est vide).
4. $\mathbf{E} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$.

Exemple 2.3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

De manière générale : si $Card(\mathbf{E}) = n$, *alors* $Card(\mathcal{P}(\mathbf{E})) = 2^n$. *(Démonstration par récurrence sur* n*).*

Egalité de deux ensembles

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles.

$\mathbf{E} = \mathbf{F} \Longleftrightarrow (\mathbf{E} \subset \mathbf{F}$ et $\mathbf{F} \subset \mathbf{E})$

$\mathbf{E} \neq \mathbf{F} \Longleftrightarrow (\mathbf{E} \not\subset \mathbf{F}$ ou $\mathbf{F} \not\subset \mathbf{E})$

2.1.3 Opérations sur $\mathcal{P}(\mathbf{E})$

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$. On définit les parties suivantes de $\mathbf{E}$.

- Complémentaire de A dans $\mathbf{E}$: $\complement_{\mathbf{E}} A = \{x \in \mathbf{E},\ x \notin A\}$.
- Réunion de A et B : $A \cup B = \{x \in \mathbf{E}, (x \in A) \vee (x \in B)\}$.
- Intersection de A et B : $A \cap B = \{x \in \mathbf{E}, (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
- Différence A moins B : $A \setminus B = \{x \in \mathbf{E}, (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
- Différence symétrique de A et B : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Ensembles disjoints

Deux ensembles $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ sont disjoints si et seulement si $\mathbf{E} \cap \mathbf{F} = \emptyset$.

2.1.4 Propriétés

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{E})$

1. $\complement_{\mathbf{E}} \emptyset = \mathbf{E}$, $\complement_{\mathbf{E}} \mathbf{E} = \emptyset$, $\complement_{\mathbf{E}}(\complement_{\mathbf{E}} A) = A$.
2. $A \cup B = B \cup A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup \mathbf{E} = \mathbf{E},$
   $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap A = A, \quad A \cap \mathbf{E} = A,$
   $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$
   $(A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Longrightarrow B = C$
4. $\complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) = \complement_{\mathbf{E}} A \cap \complement_{\mathbf{E}} B, \quad A \cap \complement_{\mathbf{E}} A = \emptyset, \quad \complement_{\mathbf{E}}(A \cap B) = \complement_{\mathbf{E}} A \cup \complement_{\mathbf{E}} B, \quad A \cup \complement_{\mathbf{E}} A = \mathbf{E},$
   $A \subset B \Longleftrightarrow \complement_{\mathbf{E}} B \subset \complement_{\mathbf{E}} A.$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$
   $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
6. $\complement_{\mathbf{E}} A = \mathbf{E} \setminus A, \quad A \setminus \emptyset = A, \quad A \setminus B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset B, \quad A \setminus B = A \cap \complement_{\mathbf{E}} B = A \setminus (A \cap B)$
7. $A \Delta B = B \Delta A, \quad A \Delta \emptyset = A, \quad A \Delta A = \emptyset, \quad A \Delta B = B \Delta A = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$

Preuve. Montrons la $4^{\text{ème}}$ propriété $\complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) = \complement_{\mathbf{E}} A \cap C_{\mathbf{E}}^{B}$ (il suffit de démontrer la double inclusion).

a) $\complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) \subset \complement_{\mathbf{E}} A \cap \complement_{\mathbf{E}} B$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \in \complement_{\mathbf{E}}(A \cup B) &\Longrightarrow x \in \mathbf{E}, x \notin A \cup B \\
&\Longrightarrow x \in \mathbf{E}, (x \notin A \text{ et } x \notin B) \\
&\Longrightarrow (x \in \mathbf{E}, x \notin A) \text{ et } (x \in x \notin B) \\
&\Longrightarrow (x \in \complement_{\mathbf{E}} A)\text{et } (x \in \complement_{\mathbf{E}} B) \\
&\Longrightarrow x \in \complement_{\mathbf{E}}^{A} \cap \complement_{\mathbf{E}} B.
\end{aligned}$$

b) $\complement_{\mathbf{E}} A \cap \complement_{\mathbf{E}} B \subset \complement_{\mathbf{E}}(A \cup B)$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } x \in \complement_{\mathbf{E}} A \cap \complement_{\mathbf{E}} B &\Longrightarrow (x \in \complement_{\mathbf{E}} A)\text{et } (x \in \complement_{\mathbf{E}} B) \\
&\Longrightarrow (x \in \mathbf{E}, x \notin A) \text{ et } (x \in \mathbf{E}, x \notin B) \\
&\Longrightarrow x \in \mathbf{E}, x \notin A \cup B \\
&\Longrightarrow x \in \complement_{\mathbf{E}}(A \cup B).
\end{aligned}$$

$\square$

Partition d'un ensemble

Soit $\mathbf{E}$ un ensemble, $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbf{E}$ constituent une partition de $\mathbf{E}$ si et seulement si $A_i \neq \emptyset, \forall i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j, \quad$ et $\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbf{E}$.

Exemple 2.4. *Soit* $\mathbf{E} = \{1, 2, 3, 4\}, A_1 = \{1\}, \ A_2 = \{2, 3\}$ *et* $A_3 = \{4\}$ *constituent une partition de* $\mathbf{E}$.
$A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4\}$ *est une autre partition de* $\mathbf{E}$.

2.1.5 Produit cartésien de deux ensembles

Définitions

Soit $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux ensembles décrits respectivement par l'élémént x et y.
On appelle **couple** ou **doublet**, un élément tel que :$(x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow (x = x' \wedge y = y')$ ou par négation : $(x, y) \neq (x', y') \Longleftrightarrow (x \neq x' \vee y \neq y')$. x : est la première coordonnée et

y est la deuxième coordonée de (x, y).

On appelle **produit cartésien** de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ l'ensemble noté par $\mathbf{E} \times \mathbf{F}$ décrit par les couples (x, y),où $x \in \mathbf{E}$ et $y \in \mathbf{F}$

$\mathbf{E} \times \mathbf{F} = \{(x, y) : x \in \mathbf{E} \text{ et } \; y \in \mathbf{F}\}$.

Remarque 2.2. $(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$, $\{x, y\} \in \mathcal{P}(\mathbf{E} \cup \mathbf{F})$, $\{x, y\} = \{y, x\}$,

$(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{F}$ et $(y, x) \in \mathbf{F} \times \mathbf{E}$.

Si $\mathbf{E} = \mathbf{F}$, on écrit $(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{E} = \mathbf{E}^2$.

Exemple 2.5. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R}\}$.

$[0, 1] \times \mathbb{R} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \; y \in \mathbb{R}\}$.

$\{1, 2\} \times \{0, 1, 2\} = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$.

Propriétés

Soient $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$ des ensembles.

1. $\mathbf{E} \times \mathbf{F} = \emptyset \Longleftrightarrow (\mathbf{E} = \emptyset \vee \mathbf{F} = \emptyset)$.
2. $\mathbf{E} \times (\mathbf{F} \cap \mathbf{G}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) \cap (\mathbf{E} \times \mathbf{G})$.
3. $\mathbf{E} \times (\mathbf{F} \cup \mathbf{G}) = (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) \cup (\mathbf{E} \times \mathbf{G})$.
4. $(A \subset \mathbf{E} \text{ et } B \subset \mathbf{F}) \Longrightarrow A \times B \subset \mathbf{E} \times \mathbf{F}$.
5. $(\mathbf{G} \neq \emptyset, \mathbf{E} \times \mathbf{G} = \mathbf{F} \times \mathbf{G}) \Longrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{F}$
6. $\mathbf{E} \times \mathbf{F} \times \mathbf{G} = (\mathbf{E} \times \mathbf{F}) \times \mathbf{G} = \mathbf{E} \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G})$.
7. $(\mathbf{E} \times \mathbf{G}) \cap (\mathbf{F} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{E} \cap \mathbf{F}) \times (\mathbf{G} \cap \mathbf{H})$.

Preuve. Démontrons la dernière propriété.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E} \times \mathbf{G}) \cap (\mathbf{F} \times \mathbf{H}) &= \{(x, y) \in \mathbf{E} \times \mathbf{G} \text{ et } \; (x, y) \in \mathbf{F} \times \mathbf{H}\} \\
&= \{(x, y) : (x \in \mathbf{E} \wedge y \in \mathbf{G}) \text{ et } \; (x \in \mathbf{F} \wedge y \in \mathbf{H})\} \\
&= \{(x, y) : (x \in \mathbf{E} \wedge x \in \mathbf{F}) \text{ et } (y \in \mathbf{G} \wedge y \in \mathbf{H})\} \\
&= \{(x, y) : (x \in \mathbf{E} \cap \mathbf{F}) \text{ et } (y \in \mathbf{G} \cap \mathbf{H})\} \\
&= (\mathbf{E} \cap \mathbf{F}) \times (\mathbf{G} \cap \mathbf{H})
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3. $(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H}) = (\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cup(\mathbf{F}\times\mathbf{H})$ n'est pas toujours vraie. Voici un contre exemple : Soit $\mathbf{E}=[-1,1]$, $\mathbf{F}=[0,2]$, $\mathbf{G}=[0,1]$, $\mathbf{H}=[0,2]$
On a $\mathbf{E}\cup\mathbf{F}=[-1,2]$, $\mathbf{G}\cup\mathbf{H}=[0,2]$, $(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H})=[-1,2]\times[0,2]$ représente le réctangle *abcd* (voir la figure ci-dessous).
On a $\mathbf{E}\times\mathbf{G}=[-1,1]\times[0,1]$ et $\mathbf{F}\times\mathbf{H}=[0,2]\times[0,2]=[0,2]^2$.
D'où $(\mathbf{E}\times\mathbf{G})\cup(\mathbf{F}\times\mathbf{H})\subset(\mathbf{E}\cup\mathbf{F})\times(\mathbf{G}\cup\mathbf{H})$.