Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2014-2015
MATH 2 SECTION H

Chapitre 2 : Equations différentielles

On appelle "équation différentielle" toute équation dans laquelle figurent une fonction inconnue d'une variable et ses dérivées de différents ordres. $y'' + y' + 2y = 0$ est une équation différentielle d'ordre 2.

0.1 Généralités

Définition 2.1 On appelle équation différentielle du premier ordre une relation de la forme

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

où y' est la dérivée de y par rapport à x et F une fonction numérique de 3 variables définie sur une partie U de $\mathbb{R}^3$.
Exemple : L'équation différentielle $y' - y^2 - x = 0$ est du premier ordre avec $U = \mathbb{R}^3$ et $F(x, y, y') = y' - y^2 - x$.
Définition 2.2 Une équation différentielle du second ordre est une relation de la forme

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2}$$

où y' et y'' sont les dérivées du premier et du second ordres respectivement de y par rapport à x et F une fonction numérique de 4 variables définie sur une partie U de $\mathbb{R}^4$.
Exemple : L'équation différentielle $y'' + xy + y^3 = 0$ est du second ordre avec $U = \mathbb{R}^4$ et $F(x, y, y', y'') = y'' + xy + y^3$.
Définition 2.3 Une équation différentielle du premier ordre (resp. du second ordre) est dite mise sous forme normale lorsqu'elle s'écrit

$$y' = f(x, y) \text{ (resp. } y'' = f(x, y, y')) \tag{3}$$

où f représente une fonction réelle de 2 (resp. 3) variables.
Définition 2.4 Une solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (1) (resp. (2)) est une fonction numérique u, définie sur un intervalle réel I, dérivable (resp. dérivable deux fois) et telle que $\forall x \in I$, on ait

$$F(x, u(x), u'(x)) = 0 \quad (x, u(x), u'(x)) \in U$$
$$\text{(resp. } F(x, u(x), u'(x), u''(x)) = 0 \quad (x, u(x), u'(x), u''(x)) \in U).$$

Exemple : $y = \cos x$ est une solution définie dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
Définition 2.5 Résoudre (ou intégrer) une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions quand elles existent. Le graphe d'une solution est appelé courbe intégrale de l'équation différentielle.

0.2 Equations différentielles du premier ordre

0.2.1 Equations différentielles à variables séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées (ou séparables) si elle est de la forme

$$g(y)\, y' = f(x) \tag{4}$$

où f et g sont deux fonctions réelles continues sur des intervalles I et J respectivement.

Résolution : On a

$$\begin{array}{rlcl} & g(y)\,y' & = & f(x) \\ \Longleftrightarrow & g(y)\,\dfrac{dy}{dx} & = & f(x) \\ \Longleftrightarrow & g(y)\,dy & = & f(x)dx \\ \Longrightarrow & \int g(y)\,dy & = & \int f(x)dx. \end{array}$$

On obtient

$$G(y(x)) = F(x) + C, \ \ C \ \text{ est une constante}$$

où G est une primitive de g sur J et F est une primitive de f sur I. Enfin, on détermine $y : x \longmapsto y(x)$ comme solution de (4).

Exemple : Considérons l'équation différentielle suivante

$$y' = xy.$$

Remarquons que $y = 0$ est une solution triviale (évidente). On suppose que $y \neq 0$, donc $y'/y = x$ qui est à variables séparées avec $f(x) = x$ et $g(y) = 1/y$.

On a

$$\begin{array}{rlcl} & \frac{dy}{y} & = & xdx \\ \Longrightarrow & \ln|y| + K & = & \frac{1}{2}x^2 \\ \Longrightarrow & e^{\ln|y|+K} & = & e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Longrightarrow & e^K\,|y| & = & e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Longrightarrow & y & = & \pm\frac{1}{e^K}e^{\frac{1}{2}x^2} \\ \Longrightarrow & y & = & C'e^{\frac{1}{2}x^2}, C' \neq 0. \end{array}$$

Finalement, les solutions sont

$$y(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

Elles sont définies sur $\mathbb{R}$.

0.2.2 Equations différentielles homogènes en x et y

C'est une équation de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \ \ x \neq 0 \tag{5}$$

où $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Résolution : On utilise ce changement d'inconnue $z = y/x$ qui donne $y' = z + xz'$. Par suite

$$\begin{array}{rlcl} (5) \Longleftrightarrow & z + xz' & = & f(z) \\ \Longleftrightarrow & z + x\frac{dz}{dx} & = & f(z) \\ \Longleftrightarrow & xdz & = & (f(z) - z)\,dx \\ \Longrightarrow & \int \frac{dz}{f(z)-z} & = & \int \frac{dx}{x}. \end{array}$$

D'où

$$\begin{array}{rlcl} & \ln|x| & = & \phi(z) + K, \ \ \phi \text{ est une primitive de } \frac{1}{f(z)-z} \\ \Longrightarrow & |x| & = & \exp\{\phi(z) + K\} \\ \Longrightarrow & x & = & \pm\exp\{\phi(z)\}.\exp\{K\}, \end{array}$$

puis, on détermine y solution de (5) grâce à la relation $y = xz$.

Exemple : Résoudre $2xyy' = y^2 - x^2$.

Elle est de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, avec $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$. Le changement d'inconnue $= y/x$ conduit à l'équation $z + xz' = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$. En intégrant, on obtient $x = \frac{c}{1+z^2}$. D'où

$$y(x) = \pm c\sqrt{\left|\frac{c}{x} - 1\right|}, \ c \text{ est une constante.}$$

0.2.3 Equations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$y' + a(x)\, y = f(x) \tag{6}$$

où f et a sont deux fonctions réelles définies sur un intervalle J. (6) est dite équation différentielle non homogène (ou avec second membre). l'équation différentielle

$$y' + a(x)\, y = 0 \tag{7}$$

est dite équation différentielle homogène (ou sans second membre). (7) est appelée l'équation homogène associée à l'équation (6).

a) Résolution de l'équation homogène (7) : Soit $y' + a(x)\, y = 0$. Si $y \neq 0$, on a

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx$$

et par suite

$$\ln|y| = -A(x) + C_1$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a sur J. D'où

$$y(x) = C_2 \exp\{-A(x)\},\, C_2 = \pm \exp\{C_1\} \in \mathbb{R}^*.$$

Remarque : $y = 0$ est une solution triviale (évidente) de (7).
Finalement

$$y(x) = C \exp\{-A(x)\},\, C \in \mathbb{R}$$

est la solution générale de (7).

a) Résolution de l'équation avec second membre (6) : Si y_0 est la solution générale de (7) et y_1 est une solution particulière de (6), alors $y = y_0 + y_1$ est la solution générale de (6).

Méthode de la variation de la constante : Soit $y = C \exp\{-A(x)\}$ la solution générale de (7). On fait varier la constante C, et la solution générale de (6) sera : $y(x) = C(x) \exp\{-A(x)\}$. On a $y' = C' \exp\{-A(x)\} - Ca(x) \exp\{-A(x)\}$. En remplaçant y et y' dans (6), on obtient

$$C'(x) \exp\{-A(x)\} - Ca(x) \exp\{-A(x)\} + a(x)C(x) \exp\{-A(x)\} = f(x)$$

qui donne

$$C'(x) = f(x) \exp\{A(x)\},$$

par conséquent

$$C(x) = \int f(x) \exp\{A(x)\} dx.$$

Finalement la solution générale de (6) est

$$y(x) = \exp\{-A(x)\} \int f(x) \exp\{A(x)\} dx.$$

Exemple : Résoudre l'équation différentielle

$$y' - y = e^x .... \; (E)$$

L'équation homogène associée est

$$y' - y = 0 .... \ (E_0)$$

Pour $y \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} = 1 \implies \frac{dy}{y} &= dx \\ \implies \ln|y| &= x + K,\ K \in \mathbb{R} \\ \implies y &= C_1 e^x, C_1 \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0). Finalement, la solution générale de (E_0) est $y(x) = ce^x$, $c \in \mathbb{R}$. On fait varier la constante c et la solution générale de (E) sera $y(x) = c(x)e^x$.
On a $y' = C'e^x + Ce^x$. Par suite

$$\begin{aligned} y' - y = e^x \implies C'e^x + Ce^x - Ce^x &= e^x \\ \implies C'(x) &= 1 \\ \implies C(x) &= x + K,\ \ K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc la solution générale de (E) est $y(x) = x + K,\ K \in \mathbb{R}$.

0.2.4 Equation différentielle de Bernoulli

Soient f, g deux fonctions continues sur un intervalle I. Une équation de la forme

$$y' + f(x)y + g(x)y^\alpha = 0 \quad (\alpha \text{ réel}, \alpha \neq 0, 1) \tag{8}$$

est dite de Bernoulli.
On écarte les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ pour lesquels l'équation est linéaire. La fonction y sera supposée positive si α est non entier et de plus non nulle si α est négatif.
Pour chercher les solutions de l'équation différentielle de Bernoulli (éventuellement en écartant la solution triviale $y = 0$), on divise par y^α puis on fait le changement de la fonction inconnue
$z = y^{1-\alpha}$. On aura

$$\frac{y'}{y^\alpha} + \frac{f(x)}{y^{1-\alpha}} + g(x) = 0$$

et par conséquent

$$y'y^{-\alpha} + f(x)y^{1-\alpha} + g(x) = 0.$$

Cette dernière équation devient en z (du fait que $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$)

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x)z + g(x) = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
Exemple : Soit l'équation différentielle de Bernoulli : $y' + xy + xy^4 = 0$. Elle est de la forme (8) avec $\alpha = 4$, $f(x) = g(x) = x$. En posant $z = y^{-3}$ pour $y \neq 0$, on aura

$$z' - 3xz = 3x \ \ .... \ (E)$$

L'équation homogène associée à (E) est

$$z' - 3xz = 0........ \ (E_0).$$

Résolution de (E_0) :

$$\begin{aligned} (E_0) \implies \frac{z'}{z} &= 3x \\ \implies z &= Ce^{\frac{3}{2}x^2}. \end{aligned}$$

La méthode de la variation de la constante : $z(x) = C(x)e^{\frac{3}{2}x^2}$, par suite
$z' = C'(x)e^{\frac{3}{2}x^2} + 3xC(x)e^{\frac{3}{2}x^2}$.

$$\begin{array}{rlcl} (E) \iff & C'(x)\, e^{\frac{3}{2}x^2} + 3xC(x)e^{\frac{3}{2}x^2} - 3xC(x)e^{\frac{3}{2}x^2} & = & 3x \\ \implies & C'(x) & = & 3xe^{\frac{-3}{2}x^2} \\ & C(x) & = & -e^{\frac{-3}{2}x^2} + K. \end{array}$$

D'où $z(x) = \left(-e^{\frac{-3}{2}x^2} + K\right) e^{\frac{3}{2}x^2} = -1 + Ke^{\frac{3}{2}x^2}$, $K \in \mathbb{R}$.
Par conséquent $\frac{1}{y^3(x)} = -1 + Ke^{\frac{3}{2}x^2}$, $K \in \mathbb{R}$. C'est à dire

$$y\,(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{-1 + Ke^{\frac{3}{2}x^2}}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

0.2.5 Equation de Riccati

Une équation différentielle du premier ordre est dite de Riccati si elle est de la forme

$$y' = f\,(x) + g\,(x)\,y + h\,(x)\,y^2, \tag{9}$$

les fonctions f, g, h sont continues dans un intervalle I. Ce type d'équations différentielles n'est pas toujours résoluble de façon élémentaire. Mais si une solution particulière y_1 pouvait être trouvée, on pourrait alors ramener la résolution de l'équation de Riccati à celle d'une équation différentielle linéaire. En effet, en posant $y = y_1 + z$, donc $y' = y_1' + z'$, on aura

$$\begin{array}{rcl} y_1' + z' & = & f\,(x) + g\,(x)\,(y_1 + z) + h\,(x)\,(y_1 + z)^2 \\ & = & f\,(x) + g\,(x)\,y_1 + g(x)z + h\,(x)\,{y_1}^2 \\ & & +2h(x)y_1 z + h\,(x)\,z^2. \end{array}$$

Donc

$$z' = (2hy_1 + g)\,z + hz^2$$

qui est de type Bernoulli. Comme on l'a vu plus haut, en posant $v = \frac{1}{z}$, on est ramené à une équation linéaire. La solution générale est donnée par $y = y_1 + \frac{1}{v}$, où v est la solution générale de

$$v' + (g + 2hy_1)\,v + h = 0.$$

Exemple : Soit l'équation différentielle de Riccati

$$y' = 1 - x^3 + xy^2 \text{ .... } (*)$$

Il est aisé de vérifier que $y_1 = x$ est une solution particulière de $(*)$.
La solution générale est donné par $y = x + \frac{1}{v}$, où v est la solution générale de

$$v' + 2x^2 v + x = 0.$$

Continuez ! ! Trouver v!!

0.3 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. L'équation différentielle

$$y'' + ay' + by = f\,(x) \tag{10}$$

est dite équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre. On lui associe l'équation sans second membre

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{11}$$

Résolution de l'équation homogène (11) : L'équation

$$r^2 + ar + b = 0 \text{ .... } (C)$$

($r \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite équation caractéristique de l'équation différentielle (11). Il y'a trois cas à envisager

Premier cas : Si (C) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors la solution générale de (11) est de la forme

$$y_0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Deuxième cas : Si (C) admet une racine réelle double r, alors la solution générale de (11) est de la forme

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Troisième cas : Si (C) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \beta + i\omega$ et $r_2 = \beta - i\omega$, alors la solution générale de (11) est de la forme

$$y_0 = (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)\, e^{\beta x}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes réelles.

Un exemple pour chaque cas

Exemple (1)

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \text{ ...... (1)}$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 3 = 0$$

admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. Ainsi, la solution générale de (1) est

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple (2)

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ ...... (2)}$$

L'équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

admet la racine réelle double $r = 2$. Ainsi, la solution générale de (2) est

$$y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple (3)

$$y'' + 4y = 0 \text{ ...... (3)}$$

L'équation caractéristique

$$r^2 + 4 = 0$$

admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$. Ainsi, la solution générale de (3) est

$$\begin{aligned} y_0 &= (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)\, e^{0x} \\ &= C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Résolution de l'équation non homogène (10) :

La solution générale de (10) s'écrit sous la forme

$$y = y_0 + y_1$$

où y_0 est la solution générale de l'équation homogène (11) et y_1 est une solution particulière de l'équation avec second membre.
a) Le second membre est la somme de deux termes
Une solution particulière de
$$y'' + ay' + by = f_1(x) + f_2(x)$$
est la somme d'une solution particulière de l'équation
$$y'' + ay' + by = f_1(x)$$
et d'une solution particulière de l'équation
$$y'' + ay' + by = f_2(x).$$
b) Le second membre est un polynôme de degré n
Soit à résoudre
$$y'' + ay' + by = P_n(x)$$
où P_n est un polynôme de degré n. On cherche une solution particulière polynômiale. On distingue deux cas :
Premier cas : Si $b \neq 0$, on cherche y_1 sous la forme d'un polynôme de degré n.
Deuxième cas : Si $b = 0$ et $a \neq 0$,
$$y_1 = xQ_n(x)$$
avec Q_n un polynôme de degré n.
Exemple : Soit à résoudre
$$y'' + 2y' - 3y = x^3 + 2x + 1.$$
On a $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Comme $b = -3 \neq 0$, on cherche une solution particulière sous la forme
$$y_1 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$
En identifiant, on obtient
$$a_0 = \frac{-1}{3}, a_1 = \frac{-2}{3}, a_2 = \frac{-20}{9} \text{ et } a_3 = \frac{-61}{27}.$$
La solution générale est
$$\begin{array}{rcl} y & = & C_1 e^x + C_2 e^{-3x} \\ & & -\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{9}x - \frac{61}{27}. \end{array}$$
c) Le second membre est de la forme e^{mx} (m est une constante)
Dans la recherche d'une solution particulière y_1, il y a lieu de distinguer trois cas selon les valeurs de m.
Premier cas : m n'est pas une racine de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = ke^{mx}.$$
Deuxième cas : m est une racine simple de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = kxe^{mx}.$$
Troisième cas : m est une racine double de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme
$$y_1 = kx^2 e^{mx}.$$

Exemple (1) : Soit à résoudre

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

On a $y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche y_1 sous la forme

$$y_1 = kx^2 e^{2x}$$

car 2 est une racine double de l'équation caractéristique. En identifiant, on trouve $k = \frac{1}{2}$, donc la solution générale est

$$\begin{array}{rcl} y_g & = & y_0 + y_1 \\ & = & \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2\right) e^{2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Exemple (2) : Soit à résoudre

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x} + e^{4x}.$$

On a $y_g = y_0 + y_1 + y_2$, où y_0 est la solution générale de l'équation homogène

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

y_1 est une solution particulière de

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$$

et y_2 est une solution particulière de

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x}.$$

On trouve

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche y_1 sous la forme $y_1 = k_1 x e^{3x}$. En identifiant, on trouve $k_1 = 2$. On cherche y_2 sous la forme $y_2 = k_2 e^{4x}$. En identifiant, on trouve $k_1 = \frac{1}{2}$. Finalement,

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 2xe^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

d) Le second membre est de la forme $\sin mx$ **(ou** $\cos mx$, m **est une constante)**

Dans cette situation, il y a lieu de distinguer deux cas dans la recherche d'une solution particulière.

Premier cas : im n'est pas une racine de l'équation caractéristique

On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = k_1 \cos mx + k_2 \sin mx$$

et on détermine les constante k_1 et k_2 par identification.

Deuxième cas : im est une racine de l'équation caractéristique

On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = x\,(k_1 \cos mx + k_2 \sin mx)$$

et comme au cas précédent, on détermine les constante k_1 et k_2 par identification.

Exemple (1) : Soit à résoudre

$$y'' + 4y = \cos x$$

On a

$$y_0 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

i n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc

$$y_1 = k_1 \cos x + k_2 \sin x.$$

On trouve $k_1 = \frac{1}{3}$, et $k_2 = 0$. Donc, $y_1 = \frac{1}{3} \cos x$. Finalement,

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \cos x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple (2) : Soit à résoudre

$$y'' + 9y = \sin 3x$$

On a

$$y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$3i$ est une racine de l'équation caractéristique, donc

$$y_1 = x\left(k_1 \cos x + k_2 \sin x\right).$$

On trouve $k_1 = \frac{-1}{6}$, et $k_2 = 0$. Donc, $y_1 = \dfrac{-x \cos 3x}{6}$. Finalement,

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x \cos 3x}{6},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

e) Le second membre est de la forme $P_n(x)\, e^{mx}$ (où P_n est un polynôme de degré n, m est une constante)
Premier cas : m n'est pas une racine de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = Q_n(x)\, e^{mx}$$

où Q_n est un polynôme de degré n
Deuxième cas : m est une racine de multiplicité k $(k = 1, 2)$ de l'équation caractéristique
On cherche alors une solution particulière sous la forme

$$y_1 = x^k Q_n(x)\, e^{mx}$$

où Q_n est un polynôme de degré n.
Exemple : Soit à résoudre

$$y'' - 2y' + y = (x + 2)\, e^x.$$

On a $y_0 = (C_1 + C_2 x)\, e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $m = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique, donc $y_1 = x^2 P_1(x)\, e^x$ avec $P_1(x) = ax + b$. En identifiant, on trouve $a = \frac{1}{6}$ et $b = 1$. D'où

$$\begin{aligned} y_1 &= x^2 \left(\tfrac{1}{6}x + 1\right) e^x \\ &= \left(\tfrac{1}{6}x^3 + x^2\right) e^x. \end{aligned}$$

Finalement,

$$y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{1}{6}x^3 + x^2\right) e^x, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Chargé de cours : A. KHELOUFI