Série de TD n°3 d'analyse 1

Exercice 1 :

Montrer que la fonction $f(x) = 3x^4 - 11x^3 + 12x^2 - 4x + 2$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice 2 :

Soit la fonction :

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction f s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]a, a + 2\pi[$.

Exercice 3 :

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \arctan x$, monter que :

$$\forall x > 0 : \arctan x > \frac{t}{1 + t^2}$$

Exercice 4 :

Soit la fonction $f(x) = e^{1/x}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists c \in]x, x + 1[: f(x) - f(x + 1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$

Déterminer : $\lim_{x \to \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

Exercice 5 :

A l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que : $\forall x > 0 :\ \frac{1}{x+1} < \ln(x + 1) - \ln x < \frac{1}{x}$

En déduire que les fonctions $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ et $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ sont monotones.

Exercice 6 :

En utilisant la formule de Leibnitz, calculer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x^2 \ln x$$

Exercice 7 :

Calculer la dérivée énième des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^p (1 + x)^p \ (p \in \mathbb{N}^*)$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$$

Exercice 8 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)\ln x}{x-1}$

Peut-on prolonger f en une fonction continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$? Le prolongement obtenu est-il dérivable en x_0 ?