Exercice1. Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

■$u_n = 2n^2 - 2\sqrt{n} + 1$■$u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+7}$■$u_n = \dfrac{3n^2+2n-1}{5n^2-8}$■$u_n = \dfrac{3^n+(-1)^n}{2(3)^n}$■$u_n = \dfrac{\sqrt{n}-n+1}{2\sqrt{n}+n+2}$

■$u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$■$u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}-\sqrt{n^2-1}}{n+1}$■ $u_n = (-2)^n$■$u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$

Exercice2. Soit la suite (u_n) définie par la relation de récurrence suivante :

$$u_0 = 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}\text{: } u_{n+1} = \frac{4u_n}{3u_n+3}.$$

1. Calculer u_1, u_2.
2. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{3}$.
3. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
4. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
5. Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice3. Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \; et \; u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$$

1. Calculer u_1, v_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < u_n$.
3. Déduire que la suite (u_n) est décroissante et (v_n) est une suite croissante.
4. Montrer que $0 < u_n - v_n < \frac{u_0 - v_0}{2^n}$.
5. Déduire $\lim(u_n - v_n)$.
6. La suite (u_n) et (v_n) sont-elles convergentes? Justifier.
6. Conclure.

Exercice4. Considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(4u_n - u_{n-1}) \\ v_{n+1} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

1. Montrer que (v_n) est géométrique.
2. Calculer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.
3. Déduire la limite de (u_n).