



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. Mira de Bejaia

Faculté de Technologie

Département de Génie Civil

Polycopié de cours

Plasticité et endommagement

Préparé et présenté par:

M. Sadaoui Omar, enseignant à l'université

A. Mira de Bejaia- Algérie

2019- 2020

Résumé

Le polycopié est destiné aux étudiants en fin de cycle de Master en génie civil option structures. Il traite des lois fondamentales de la plasticité et leurs applications dans l'analyse du comportement des matériaux et des structures. En effet, un rappel succinct des notions élémentaires de l'élasticité linéaire est passé en revue. Le comportement élastoplastique des structures se base sur le principe de la dissipation d'énergie accusée par les déformations plastiques irréversibles. A cet effet, l'ensemble des critères de plasticité les plus utilisés en génie civil ainsi que la loi d'écoulement plastique ont été étudiées. L'application des notions d'élastoplasticité aux calculs des structures à barres (treillis), des poutres continues et des portiques a été effectuée. L'analyse limite et la prédiction des mécanismes de ruine des structures portiques en utilisant les méthodes statique et cinématique est également développée. Enfin, l'endommagement des structures en béton armé et les lois usuelles le régissant sont étudiées en en mettant en exergue leurs vulnérabilités vis à vis des charges cycliques (sismiques). Quelques modèles usuels d'endommagement des ouvrages en béton armé sont développés en dernier chapitre.

1. INTRODUCTION GENERALE.....	10
1. CHAPITRE 1.....	11
1. INTRODUCTION AU COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES STRUCTURES 11	
1.1 INTRODUCTION.....	11
1.2 COMPORTEMENT ELASTIQUE LINEAIRE ISOTROPE.....	11
1.2.1 Loi de Hooke unidimensionnelle (1D).....	12
1.2.2 Loi de Hooke généralisée (3D).....	14
1.2.3 Principe de contraintes planes.....	16
1.2.4 Principe de déformations planes.....	17
1.2.5 Loi de Hooke appliquée aux problèmes axisymétriques.....	17
1.3 INTERPRETATION PHYSIQUE DES COEFFICIENTS D'ELASTICITE POUR LES MILIEUX ISOTROPES.....	20
1.4 EFFET DE LA TEMPERATURE.....	21
1.5 PLASTICITE.....	21
1.5.1 Loi de comportement et conditions expérimentales.....	22
1.5.2 Comportement cyclique des matériaux.....	23
1.5.3 Quelques types de modèles rhéologiques.....	24
1.5.4 Hypothèses et principes de Hill en élastoplasticité.....	25
1.5.5 Loi d'écoulement plastique (loi de normalité).....	27
1.5.6 Critères de plasticité et surfaces de charges.....	28
1.5.7 Elastoplasticité avec écrouissage.....	36
2. CHAPITRE 2.....	44
2.1 INTRODUCTION.....	44
2.2 HYPOTHESES ET COMPATIBILITE DES DEFORMATIONS.....	44
2.3 TRACTION ELASTOPLASTIQUE.....	45
2.3.1 Plasticité d'un d'élément homogène.....	46
2.3.2 Plasticité d'un élément composé.....	46
2.3.3 Exercice1 d'application.....	49
2.3.4 Exercice2 d'application.....	49
2.3.5 Exercice3 d'application.....	55
2.3.6 Traction élastoplastique avec écrouissage linéaire.....	57
2.4 FLEXION ELASTOPLASTIQUE PLANE.....	58
2.4.1 Notion de moment résistant élastique et plastique.....	58
2.4.2 Loi moment-courbure.....	62
2.4.3 Rotule plastique.....	63
3. CHAPITRE 3.....	65
3.1 INTRODUCTION.....	65
3.2 TYPES DE RUINES ET NOTIONS DE CHARGES LIMITES.....	65
3.2.1 Charge limite des structures hyperstatiques simples.....	66
3.2.2 Méthode des travaux virtuels pour l'analyse limite.....	69
3.2.3 Méthode cinématique.....	72
3.3 ASPECTS REGLEMENTAIRES DE CONCEPTION PARASISMIQUE.....	76
4. CHAPITRE 4.....	78
4.1 COMPORTEMENT D'UN MATERIAU SANS COHESION.....	78
4.1.1 Plasticité parfaite, loi associée.....	78
4.1.2 Plasticité avec écrouissage isotrope.....	79

4.1.3	Analyse et conclusion.....	79
4.2	COURS	ERREUR ! SIGNET NON DEFINI.
4.3	COMPORTEMENT D'UNE ARGILE SATUREE EN CONDITION NON DRAINEE	89
5.	CHAPITRE 5.....	111
5.1	INTRODUCTION.....	111
5.2	VARIABLES D'ENDOMMAGEMENT.....	113
5.3	MESURES DE L'ENDOMMAGEMENT.....	114
5.4	ENDOMMAGEMENT DES STRUCTURES EN BETON ARME	114
5.4.1	Endommagement du béton.....	115
5.4.2	Modèle d'endommagement de Mazars (1984)	115
5.5	PLASTICITE COUPLEE A L'ENDOMMAGEMENT	117
5.6	AUTRES MODELES D'ANALYSE DE L'ENDOMMAGEMENT	118
5.6.1	Modèle de Mander et Park pour les structures en béton armé	118
5.6.2	Modèle de Takeda.....	118
5.7	NOTION D'INDICES DE DOMMAGE.....	119
5.8	CONCLUSION	119
6.	BIBLIOGRAPHIE.....	120
7.	ANNEXE A.....	122

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1- Essai de traction uniaxiale simple (élasticité 1D).....	12
Figure 1.2- Principe de contraintes planes (flexion d'une dalle mince).	16
Figure 1.3- Cas d'ouvrages obéissant au principe de déformations planes.	17
Figure 1.4- Modèles axisymétriques usuels.....	19
Figure 1.5- Etat de contrainte isotrope (cas de l'essai triaxial).....	20
Figure 1.6- Types de déformations (volumiques et de cisaillement)	21
Figure 1.7- Principe d'indifférence matérielle (matériau anisotrope).....	22
Figure 1.8- plasticité parfaite.....	24
Figure 1.9- Comportement élastoplastique.....	24
Figure 1.10- Plasticité avec écrouissage linéaire.....	25
Figure 1.11- Hypothèse de Hill en élastoplasticité (surface d'écoulement).....	26
Figure 1.12- Représentation de la fonction de charges.....	28
Figure 1.13- Représentation des critères de Von-Mises de Tresca.	29
Figure 1.14- Courbe intrinsèque (limite) de Mohr- Coulomb.	31
Figure 1.15- Représentation des critères de Mohr Coulomb et de Drucker Prager.....	32
Figure 1.16- Courbe intrinsèque et cercles de Mohr limites des essais de traction et compression.	32
Figure 1.17- Représentation graphique de l'écrouissage isotrope.	37
Figure 1.18- Ecouissage cinématique	38
Figure 1.19- Application du critère de plasticité de Von Mises à la flexion d'une poutre.	40
Figure 1.20- Cas d'une poutre console chargée uniformément.	41
Figure 2.1- Exemples de compatibilité des déformations dans les treillis métalliques.	45
Figure 2.2- Traction élastoplastique sur un élément homogène.	45
Figure 2.3 - Traction élastoplastique parfaite dans le cas d'un élément composé.....	46
Figure 2.4- Evolution élastoplastique de l'effort normal N et de la déformation plastique.	47
Figure 2.5- Evolution élastoplastique parfaite de la charge d'un treillis isostatique en acier.....	49
Figure 2.6- Evolution élastoplastique du chargement d'un treillis hyperstatique	50
Figure 2.7- Système équivalent.....	51
Figure 2.8- Efforts internes pour le calcul du déplacement élastique (méthode Castigliano)	52
Figure 2.9- Redistribution des efforts internes (adaptation plastique) dans le treillis.....	53
Figure 2.10- Vue du déplacement plastique du treillis après déchargement.	54
Figure 2.11- Câble de tirant d'ancrage soumis à une traction élastoplastique parfaite.....	55
Figure 2.12- Distribution des contraintes et des déplacements dans les matériaux.....	56
Figure 2.13- Sollicitation uniaxiale pour un matériau à écrouissage linéaire et isotrope.....	57
Figure 2.14- Flexion élastoplastique d'une poutre (cas d'une section homogène et symétrique).....	59
Figure 2.15- Evolution de M/M_{pl} et influence de la forme de section.....	60

Figure 2.16- Flexion élastoplastique (cas d'une section dissymétrique).....	61
Figure 2.17- Vue d'une section de poutre mixte et bilan des contraintes et des forces.	62
Figure 2.18- Lois moments courbures d'après (Wielgosz, 1999; Fuentes, 2017).....	63
Figure 2.19- Exemple de rotules plastiques et de mécanismes de ruine.....	64
Figure 3.1- Types de ruines et notions de mécanismes d'effondrement.	66
Figure 3.2- Charges limites des systèmes simples (méthode RDM)	67
Figure 3.3- Evolution du moment de flexion en fonction de l'apparition des rotules plastiques.	68
Figure 3.4 - Charge limite et schéma d'évolution du mécanisme de ruine	69
Figure 3.5- Vue d'une poutre hyperstatique ($hyp = 1$) avec chargement ponctuel	70
Figure 3.6- Probabilités de survenue des mécanismes de ruine de la structure.	71
Figure 3.7- Application de la méthode cinématique (principe des travaux virtuels).....	73
Figure 3.8- Vue des portiques auto stables soumis à un chargement statique évolutif	73
Figure 3.9- Mécanismes de ruine sous l'effet du trajet de chargement (cas a).....	74
Figure 3.10- Vue des mécanismes de ruine dominants du cas (b) sous l'effet du trajet de chargement.	75
Figure 3.11- Vérification d'un nœud poteau- poutre dans les portiques d'après le RPA 2003.....	76
Figure 3.12- Influence des moments résistant plastiques sur la distribution des rotules.....	77
Figure 4.1- Résultats d'un essai triaxial axisymétrique.....	80
Figure 4.2- Essai de compression simple.....	90
Figure 5.1. Elément endommagé.....	113
Figure 5.2. Endommagement du béton en compression d'après (Lee et Fenves, 1998).....	115
Figure 5.3. Représentation de la surface seuil du modèle de Mazars dans le plan des contraintes $\sigma_1 - \sigma_2$	116
Figure 5.4. Lois de comportement de l'acier et du béton associées au modèle à fibres (Mander et Parck) ...	118
Figure 5.5. Modèle de Takeda pour le béton armé	119

Liste des tableaux

Tableau 1.1- Quelques valeurs des paramètres mécaniques (E et ν)	13
Tableau 1.2- Calcul des déformations à partir des contraintes	14
Tableau 4.1- Déformations plastique et valeurs de $R(\alpha)$	96
Tableau 4.2- Modélisation de l'érouissage isotrope: courbe $\sigma_1 = f(\epsilon_1)$	97

- A : Section droite (aire) d'une barre/poutre,
 A_s : Section d'acier de ferrailage d'un élément en béton armé,
 \tilde{A} : Section droite (aire) équivalente,
 c_c : Coefficient de compressibilité d'un sol (mesuré à l'oedomètre),
 c_s : Coefficient de gonflement d'un sol (mesuré à l'oedomètre),
 c : Cohésion d'un géomatériau,
 $[C]$: Matrice de complaisance (souplesse),
 $[d]$: Matrice d'élasticité (des raideurs),
 c_u : Cohésion non drainée (apparente) d'un sol,
 d_{ijkl} : Tenseur d'élasticité (d'ordre 4),
 $e, (e_0)$: Indice des vides d'un sol, (initial),
 E : Module d'Young (déformation élastique) d'un matériau élastique,
 EI : Rigidité flexionnelle d'un élément poutre,
 E_t : Module de déformation élastique tangent d'un matériau élastique,
 E_{50} : Module sécant à 50% du déviateur de rupture,
 E_{oed} : Module oedométrique d'un sol,
 E' : Module d'Young effectif d'un géomatériau (sol),
 E_M : Module de déformation pseudo-élastique mesuré au pressiomètre L. Menard,
 f_{c28} : Résistance caractéristique à la compression d'un béton à 28 jours d'âge,
 f_e : Nuance (limite élastique) de l'acier de construction,
 F_{el} : Charge élastique d'un élément (d'une structure),
 F_{pl} : Charge plastique d'un élément (d'une structure),
 F_s : Coefficient de sécurité,
 G : Module de déformation transversale (cisaillement),
 H : Module d'écrouissage linéaire,
 I : Moment d'inertie d'une section droite,
 K : Module de déformation volumique,
 K_a : Coefficient de poussée (active) d'un sol,
 K_p : Coefficient de butée (passive) d'un sol,
 L : Longueur de d'un élément,
 m : Nombre de mécanismes de ruine indépendants,
 m_p : Nombre de mécanismes de ruine possibles,
 M_z : Moment de flexion,
 M_{el} : Moment élastique d'une section,
 M_{pl} : Moment plastique d'une section,
 n : Coefficient d'équivalence entre deux matériaux (acier et béton par exemple),

n_θ : Nombre de rotules plastiques par mécanisme,
 N_u : Effort normal pondéré (ELU),
 N_s : Effort normal en service (ELS),
 r : Rayon d'un domaine circulaire,
 p : Pression isotrope,
 p_l : Pression limite mesurée au pressiomètre L. Menard,
 p_0 : Pression totale horizontale des terres au repos dans un massif de sol homogène et isotrope,
 p_l^* : Pression limite nette mesurée au pressiomètre L. Menard ($p_l^* = p_l - p_0$),
 q : Déviateur de contraintes ($q = \sigma_1 - \sigma_3$, si $\sigma_2 = \sigma_3$),
 s : Contrainte déviatoire ($\sigma^{(d)}$),
 S : Section (aire) des barres dans les treillis,
 s_{ij} : Tenseur déviatoire de contraintes ($\sigma_{ij}^{(d)}$),
 $(\overline{\Delta h})$: Tassement admissible par l'ouvrage, défini par les DTU et/ou le CPS,
 t : Temps,
 u : Déplacement dans la direction horizontale, u_{el} (élastique), u_{pl} (plastique),
 u_r : Déplacement radial en coordonnées polaires,
 v_j : Déplacement direction verticale, v_{el} (élastique), v_{pl} (plastique),
 y_e : Ordonnée de l'axe neutre élastique, y_p : Ordonnée de l'axe neutre plastique,
 W_{el} : Module élastique d'une section,
 W_{pl} : Module plastique d'une section,
 α' : Coefficient rhéologique du sol, donné par L. Menard pour le passage au module oedométrique,
 α : Coefficient de dilatation thermique,
 ΔL : Allongement ou raccourcissement d'un élément/d'une barre,
 ΔH : Tassement d'un solide (massif),
 ΔQ : Incrément de charge,
 ΔT : Variation (incrément) de température,
 ΔV : Variation (incrément) de volume,
 $\Delta \sigma$: Incrément de contrainte,
 $\Delta \varepsilon$: Incrément de déformation,
 ε_{ij} : Tenseur de déformation (d'ordre 2),
 ε : Déformation,
 $\varepsilon^{(e)}$: Déformation élastique,
 $\varepsilon^{(p)}$: Déformation plastique,
 $\{\varepsilon\}$: Vecteur des déformations,
 $\varepsilon_i (i = 1 \text{ à } 3)$: Déformations principales suivant (OX, OY et OZ) dans un solide,
 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$: Déformations respectivement suivant les directions (xx), (yy) et (zz),

ε_{rr} : Déformation radiale,
 $\varepsilon_{\theta\theta}$: Déformation tangentielle,
 ε_v : Déformation volumique,
 γ : Force de volume,
 γ_h : Poids volumique humide d'un sol,
 ν : Coefficient de Poisson,
 μ : Coefficient de Lamé ($\mu = G$),
 λ : Coefficient de Lamé,
 λ_p : Multiplicateur plastique,
 φ : Angle de frottement d'un géomatériau,
 ψ : Angle de dilatance d'un géomatériau,
 θ : Rotation d'une rotule plastique (en radian)
 σ : Contrainte normale,
 $\{\sigma\}$: Vecteur des contraintes,
 σ_{ij} : Tenseur de contraintes (d'ordre 2),
 σ_{kk} : Trace du tenseur de contraintes (scalaire),
 $\sigma_i (i= 1 \text{ à } 3)$: Contraintes principales suivant les axes (OX, OY et OZ) dans un solide (massif),
 σ_e : Limite élastique (écoulement plastique),
 $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$: Contrainte radiale, tangentielle et verticale en coordonnées polaires,
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$: Contrainte radiale, tangentielle et verticale principales en coordonnées polaires,
 σ_{re} : Contrainte résiduelle,
 σ_h : Contrainte horizontale dans un massif de sol,
 σ'_{v0} : Contrainte effective verticale régnant dans le sol,
 τ : Contrainte de cisaillement (tangentielle),
 τ_{ij} : Tenseur de contrainte de cisaillement (tangentielle),
 ψ : Courbure, ψ_e (courbure élastique),

1 Introduction générale

Le présent polycopié s'adresse aux étudiants de Master2 et aux ingénieurs en génie civil en vue d'approfondir leurs connaissances théoriques dans le calcul des ouvrages tenant compte de leur comportement élastoplastique. L'utilisation des outils numériques pour la résolution des problèmes aux limites notamment dans le domaine non linéaire requiert un niveau de connaissance des lois de comportement inélastique.

Le chapitre1 traite le comportement élastoplastique des ouvrages. Une synthèse des principales notions de l'élasticité qui sont nécessaires pour aborder la modélisation élastoplastique est effectuée. Ensuite les théorèmes fondamentaux et les critères la plasticité parfaite ainsi que la loi d'écoulement plastique sont traités. Quelques applications de la plasticité dans l'analyse du comportement des géomatériaux et des structures sont exposées. L'ensemble des aspects liés au potentiel plastique, fonctions de charge, principales hypothèses de la plasticité ont été étudiées en s'appuyant sur des cas phénoménologiques réels.

Le chapitre2 traite de la traction et la flexion plastique des structures barres. Il est dédié à la méthodologie de calcul des charges limites élastique et plastique des treillis en acier, des moments plastiques des sections homogènes et mixtes et l'établissement de relations moment-courbure. Des exemples d'application étayent l'intérêt d'un calcul plastique notamment dans la charpente métallique et la construction mixte.

Le chapitre3 s'intéresse à l'analyse limite des poutres continues et des portiques ainsi que la prédiction des mécanismes de ruine sous trajets de chargement monotones. Les théorèmes de la statique, des travaux virtuels et de cinématique sont développés avec des applications pour la détermination des charges limites et des mécanismes d'effondrement. Quelques recommandations sur la conception parasismique des portiques sont établies et discutées.

Le chapitre4 fait une introduction à la mécanique de l'endommagement. L'endommagement des structures en béton armé sous charges cycliques et monotone et les modèles de comportement usuels les régissant sont développés. Les notions d'indice de dommage et de vulnérabilité des structures en zones sismiques sont également traitées.

Introduction au comportement élastoplastique des structures

1.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse au calcul élastoplastique des ouvrages. Il s'agit de la prise en compte de la plasticité et de l'érouissage dans l'évaluation des charges limites et des déformations irréversibles des structures.

Le comportement des matériaux de génie civil est complexe. On s'intéresse souvent à la partition élastique linéaire en prenant des hypothèses idéalisées de continuité, d'homogénéité et d'isotropie de la matière. La réalité expérimentale est tout à fait différente. En effet, les matériaux de construction constitués d'un mélange d'agrégats de diverses granulométries liées par une matrice cimentaire ou gypseuse et les géomatériaux (sols) de composition tri-phasique (grains, air et eaux) sont un parfait exemple. Bien que la plupart des solides présentent un comportement élastique (réversible) sous l'effet de faibles charges. L'étendue de ce domaine est variable selon le type de matériau. Dans le cas des métaux, la limite élastique est atteinte pour des seuils de déformations de l'ordre de 0.1%, par contre pour les sols le seuil de déformations élastique est inférieur à 10^{-4} d'après (Mestat, 1993; Bahar, 2004). Par conséquent, certains modélisateurs supposent que ce domaine élastique initial n'existe pas. Toutefois, il est crée par érouissage au cours des sollicitations.

Au delà de la limite élastique, le matériau développe un comportement inélastique (plastique), la déformation est irréversible au déchargement. Quand le niveau de chargement dépasse (σ_e), la résistance évolue en fonction des sollicitations appliquées: c'est le phénomène d'érouissage.

L'objectif d'un calcul plastique est la prévision des déformations permanentes ainsi que la ruine d'une structure. La plasticité permet également d'optimiser les performances des matériaux en vue d'un dimensionnement économique. Par ailleurs, certains ouvrages de charpente métallique mixte (acier -béton) présentent un palier de plasticité élevé permettant un érouissage de leurs matériaux, elles offrent alors des possibilités d'adaptation plastique tout en se prémunissant de la rupture.

Ce chapitre s'intéresse au calcul élastoplastique. La loi de Hooke est passée en revue de manière synthétique en abordant par la suite la notion de fonction de charges, potentiel plastique et de critères de plasticité les plus couramment utilisé dans la modélisation en génie civil appuyés par des exemples d'application.

1.2 Comportement élastique linéaire isotrope

Un matériau est réputé élastique linéaire s'il existe une relation linéaire entre les tenseurs de contraintes (σ_{ij}) et de déformations (ε_{ij}), ce qui se traduit par la relation (1.1). Un problème d'élasticité peut être traité en appliquant tous les chargements externes dans un seul et unique palier de calcul. Cependant dans le cas d'un comportement non linéaire (cas des massifs en géomatériaux), la

matrice d dépend de la contrainte actuelle et de son histoire, ce qui nécessite l'application du chargement externe en incréments consécutifs et d'adopter un schéma de résolution non linéaire adéquat.

$$\sigma_{ij} = d_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rightarrow \sigma = d : \varepsilon \tag{1.1}$$

$d_{ijkl} = \text{constante} \rightarrow$ élasticité linéaire, $d_{ijkl} = f(\varepsilon) \rightarrow$ élasticité non linéaire

Le symbole $(:)$ signifie la double contraction de tenseur.

σ et ε : Sont respectivement les tenseurs de contrainte et de déformations et d est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. La symétrie des tenseurs σ et ε et l'hypothèse de continuité et d'isotropie des matériaux consistant à considérer les mêmes propriétés matérielles (E, ν) dans les trois directions de l'espace, on simplifie l'expression de d à un tenseur d'ordre 2 défini positif. Les propriétés de continuité et d'isotropie ne concernent en réalité que quelques matériaux standards tels que les aciers et les alliages. En revanche, la majorité de matériaux de construction et de géomatériaux sont caractérisés par l'hétérogénéité et l'anisotropie et l'orthotrope.

1.2.1 Loi de Hooke unidimensionnelle (1D)

On soumet une barre d'acier à un essai de traction (Figure 1-1), tant que la limite d'élasticité (σ_e) n'est pas atteinte, la déformation qui en résulte est réversible, la barre revient par le même chemin à son état initial après déchargement.

La relation entre les contraintes et les déformations se traduit comme suit:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} ; \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \tag{1.2}$$

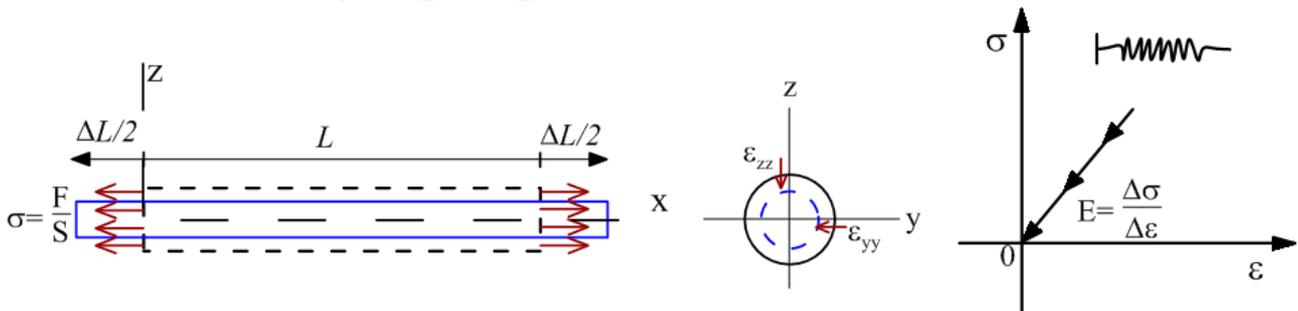


Figure 1-1- Essai de traction uniaxiale simple (élasticité 1D).

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} ; \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx}$$

E et ν : Paramètres mécaniques de la loi élastique, dénommés respectivement module d'Young et coefficient de Poisson, ils sont mesurés en général en laboratoire à partir des échantillons soumis à la traction, compression ou aux essais triaxiaux dans le cas des géomatériaux. Le matériau est complètement défini quand les valeurs des deux paramètres E et ν sont connues. D'après (Sidoroff, 1992; Frey, 1994), les valeurs usuelles des paramètres E et ν sont données à titre indicatif (tableau 1.1).

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \approx \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} > 0, \quad -1 < \nu < 0.5$$

Tableau 1-1- Quelques valeurs des paramètres mécaniques (E et v)

Matériaux	E (MPa)	v
Acier	205 000	0.26- 0.30
Béton	32 000	0.18- 0.20
Aluminium	70 000	0.32 - 0.34
Verre	60 000	0.21- 0.27
Sols	1- 100	0.25 - 0.49 (0.33)
Cuivre	120 000	0.33 - 0.36
Caoutchouc	2	(0.4999.....) ≈ 0.5
Granit	60 000	0.27

1.2.1.1 Exemple d'application

Une cage d'ascenseur est maintenue par un câble en acier de paramètres élastiques (E, v) et de limite d'élasticité ($\sigma_e=400$ MPa). La cage de poids propre 800 kgs est prévue pour transporter au maximum 10 personnes de 80 kgs chacun. Le poids propre du câble est négligeable.

- 1) Déterminer le diamètre D du câble pour assurer une meilleure sécurité de fonctionnement
- 2) Supposant que la longueur maximale du câble est $l_0= 25$ m, calculer son l'allongement

Solution

1. Critère de résistance

Charges pondérées: $\begin{cases} \text{ELS: } N_s = G + Q = 800 + 10 \times 80 = 1600 \text{ kgs} = 16 \text{ kN} \\ \text{ELU: } N_u = 1.35G + 1.5Q = 1.5 \times 800 + 1.5 \times (10 \times 80) = 2280 \text{ kgs} = 22.8 \text{ kN} \end{cases}$

$$\sigma = \frac{N_u}{S} \leq \sigma_e$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{N_u}{\sigma_e} \Rightarrow \phi \geq \sqrt{\frac{4N_u}{\pi\sigma_e}} = \sqrt{\frac{4 \times 22.8}{\pi \times 400 \times 10^3}} = 8.52 \times 10^{-3} \text{ m} = 8.52 \text{ mm}$$

Les diamètres couramment commercialisés (mm):
(6- 8- 10- 12- 14- 16- 18- 20; ...etc.)

On choisit un diamètre ($\phi = 10$ mm)

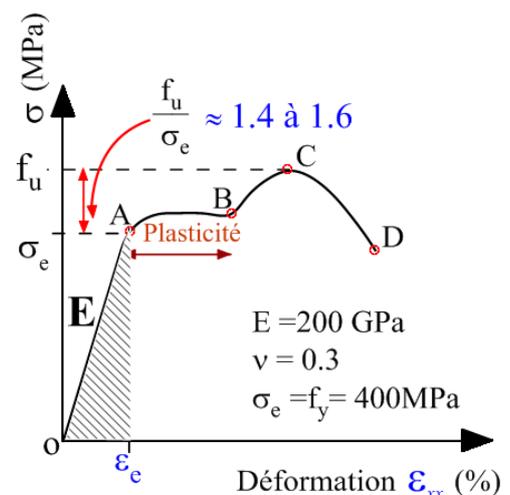
La courbe suivante représente la relation contrainte- déformation de l'acier jusqu'à la rupture. La partie du comportement élastique est caractérisée par une droite (OA).

$$S = \pi\phi^2 / 4 = 0.785 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\sigma_u = N_u / S = 290,33 \text{ MPa} < \sigma_e$$

2. Allongement du câble dans le domaine élastique linéaire (EL).

$$\sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = \frac{N_s}{S} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{N_s}{ES} \Rightarrow \Delta L = \frac{N_s}{ES} L$$



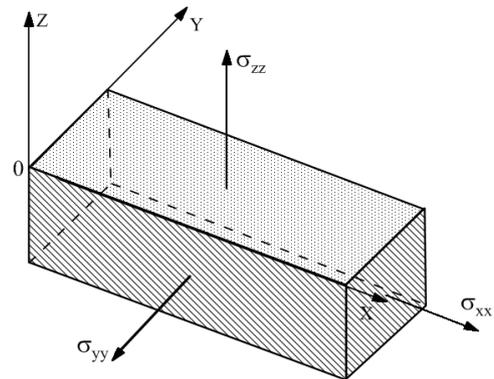
$$\Delta L = \frac{N_s}{ES} L = \frac{16 \times 25}{2 \times 10^8 \times (0.7853 \times 10^{-4})} = 2.55 \times 10^{-2} m = 2.55 cm$$

Après le déchargement, le câble revient à sa longueur initiale ($\epsilon_p = 0$).

1.2.2 Loi de Hooke généralisée (3D)

On considère un solide (Ω) homogène et isotrope soumis à l'état de contrainte (σ_{ij}), le comportement élastique du matériau permet de superposer les effets des contraintes dans les différentes directions en vue de calculer les déformations (ϵ_{ij}). Les déformations suivant les directions principales et les déformations de cisaillement sont données par les expressions (1.2). Le tableau 1.2 montre les valeurs des déformations en fonction des contraintes.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}); & \epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} = 2\gamma_{xy} \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}); & \epsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} = 2\gamma_{yz} \\ \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}); & \epsilon_{zx} = \frac{\sigma_{zx}}{2G} = 2\gamma_{zx} \end{cases} \quad (1.3)$$

Tableau 1-2- Calcul des déformations à partir des contraintes

Actions	ϵ_{xx}	ϵ_{yy}	ϵ_{zz}
σ_{xx}	$\frac{\sigma_{xx}}{E}$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_{xx}$
σ_{yy}	$-\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$	$\frac{\sigma_{yy}}{E}$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_{yy}$
σ_{zz}	$-\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$	$-\frac{\nu}{E} \sigma_{zz}$	$\frac{\sigma_{zz}}{E}$

L'expression des déformations peut s'écrire sous la forme indicielle _____ comme suit:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}; \text{ soit sous forme matricielle: } \epsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma)I \quad (1.4)$$

(δ_{ij}) est le symbole de Kronecker de matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

L'écriture explicite sous forme matricielle se traduit par l'expression (1.5) suivante:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1+\nu) \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

La matrice de souplesse (complaisance) C est symétrique, elle relie les déformations aux contraintes par la combinaison des paramètres d'élasticité (E, ν).

En inversant la loi de comportement (1.4), on obtient les relations entre les contraintes et les déformations par le biais d'une matrice d'élasticité positive et symétrique ($d = C^{-1}$), donnée par l'expression (1.7). La loi de comportement élastique linéaire de Hooke s'écrit donc sous la forme indicielle et matricielle comme suit:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} ; \text{ soit sous forme matricielle: } \sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda\text{tr}(\varepsilon)I \quad (1.6)$$

μ et λ. Sont les coefficients de Lamé données par: $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$

L'expression (1.6) peut se mettre sous la forme matricielle: $\{\sigma\} = [d]\{\varepsilon\}$, G est le module de cisaillement. Les termes de la matrice d'élasticité (d) constituent une combinaison linéaire des coefficients de Lamé.

$$d = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} ; \quad \lambda + 2\mu = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Les paramètres d'élasticité E et ν sont reliés aux coefficients de Lamé μ et λ par les relations suivantes:

$$E = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda + \mu} ; \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

1.2.3 Principe de contraintes planes

Les calculs par éléments finis des structures tridimensionnelles notamment dans le domaine non linéaire sont très couteux en temps et nécessitent souvent des machines robustes. Des hypothèses simplificatrices permettent parfois de ramener l'étude en 3D à des problèmes plans à deux dimensionnes (2D) à savoir l'état de contraintes planes, de déformations planes et l'état axisymétrique.

L'étude s'effectue en contraintes planes quand l'épaisseur(e) est très faible devant les autres dimensions en plan (xy) dont le chargement leur est perpendiculaire (cas des dalles de plancher). Les plans perpendiculaires à Z Figure 1-2) ne sont pas chargés.

En vertu de la formule de Cauchy, les tenseurs de contraintes et de déformations sont donnés comme suit:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

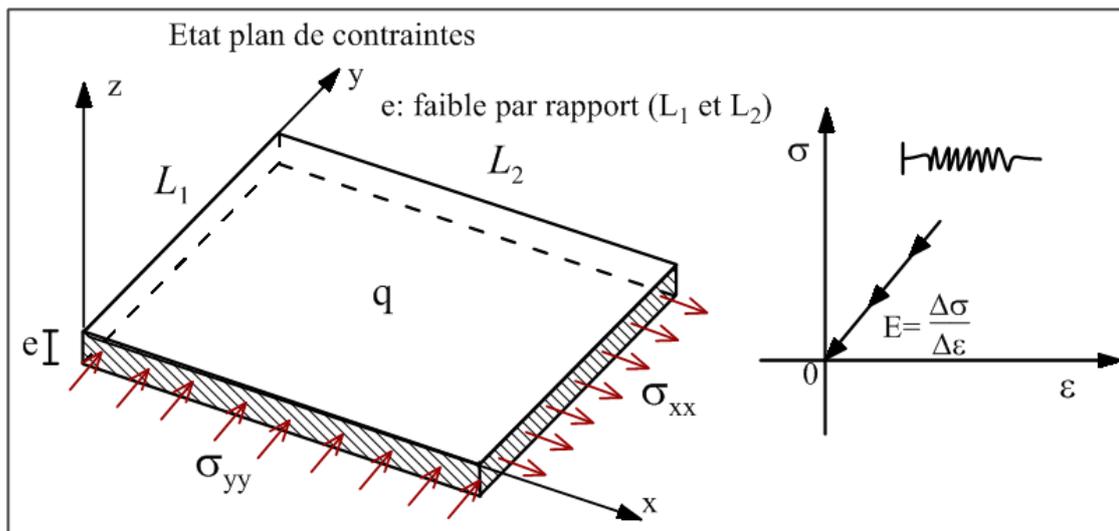


Figure 1-2- Principe de contraintes planes (flexion d'une dalle mince).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} ; \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \frac{\sigma_{yy}}{E} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy}$$

Il en résulte le système d'équations:
$$\begin{cases} \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} = E \varepsilon_{xx} \\ -\nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{xy}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

1.2.4 Principe de déformations planes

Quand l'une des dimensions du problème est importante suivant z par rapport aux autres et que le chargement est invariant dans tout plan qui lui est perpendiculaire, l'étude en trois dimensions (3D) peut se ramener en déformations planes ($\epsilon_{zz}=0$). Il en résulte alors que le cisaillement et les composantes des déformations sont nuls le long de la grande dimension. Le principe de déformations planes s'applique en général aux ouvrages linéaires fondés dans un massif homogène et isotrope et soumis à un chargement invariant dans le sens de la grande dimension. La Figure 1-3 montre les différents cas d'

Le tenseurs des contraintes et des déformations sont donnés par:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{11} = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}$$

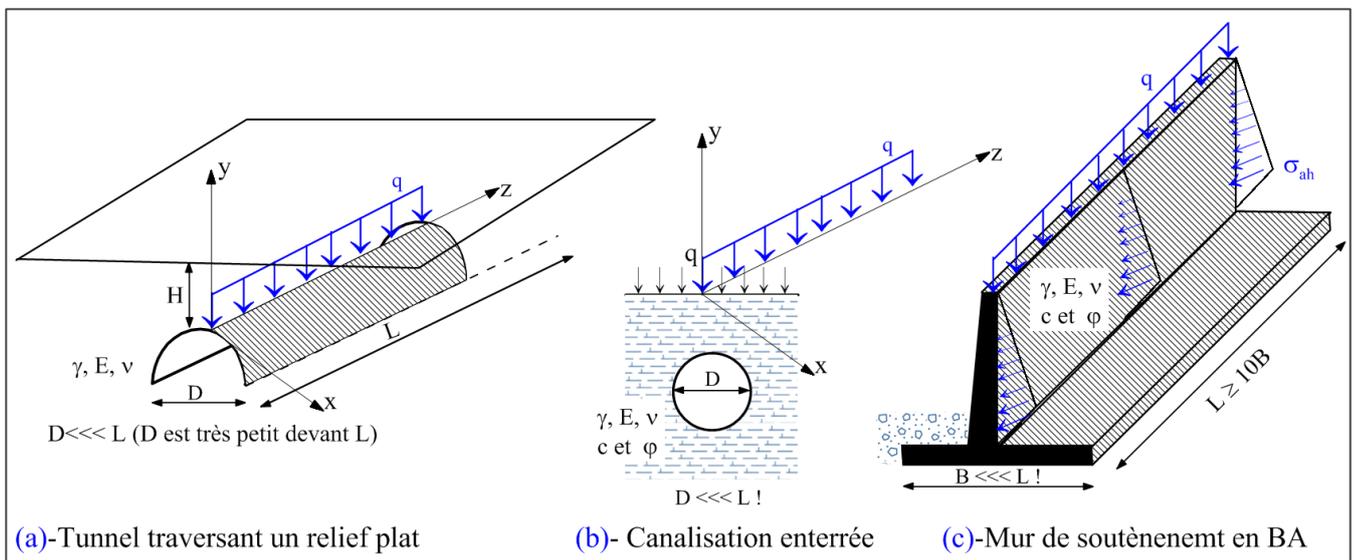


Figure 1-3- Cas d'ouvrages obéissant au principe de déformations planes.

A partir la loi de Hooke généralisée (équation-1.6), on déduit la relation $\{\sigma\} = [d]\{\epsilon\}$

$$d = \begin{pmatrix} 2\mu+\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 2\mu+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu) \end{pmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}} \quad (1.9)$$

1.2.5 Loi de Hooke appliquée aux problèmes axisymétriques

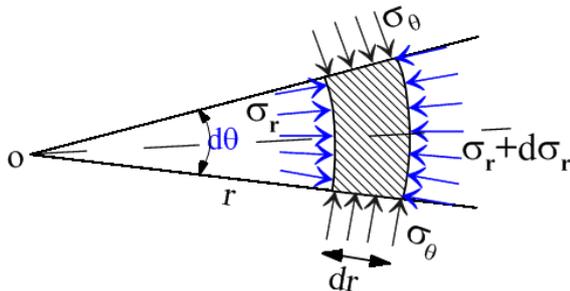
Quand la géométrie du problème est cylindrique autour d'un axe central et que les conditions de contraintes ou de chargement sont invariants dans toute section passant par cet axe, les composantes

du déplacement sont indépendantes de l'angle (θ). Il en résulte que les déformations et les contraintes perpendiculaires à l'axe de révolution sont radiales. La Figure 1-4 montre des cas d'axisymétrie (puits, silo de stockage, pieu, dilatation d'une sonde pressiométrique dans un forage,...etc.).

Les tenseurs des déformations et des contraintes ont alors la forme suivante:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & \varepsilon_{rz} \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ \varepsilon_{rz} & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & \sigma_{rz} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{rz} & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

L'équation différentielle régissant l'équilibre d'un élément en coordonnées cylindriques est donnée dans le plan (r, θ) par l'expression (1.10). Cette expression décrit l'expansion d'une cavité cylindrique dans un milieu élastique isotrope semi infini (exemple d'un essai pressiométrique L. Menard).



Equilibre d'un élément de volume

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \tag{1.10}$$

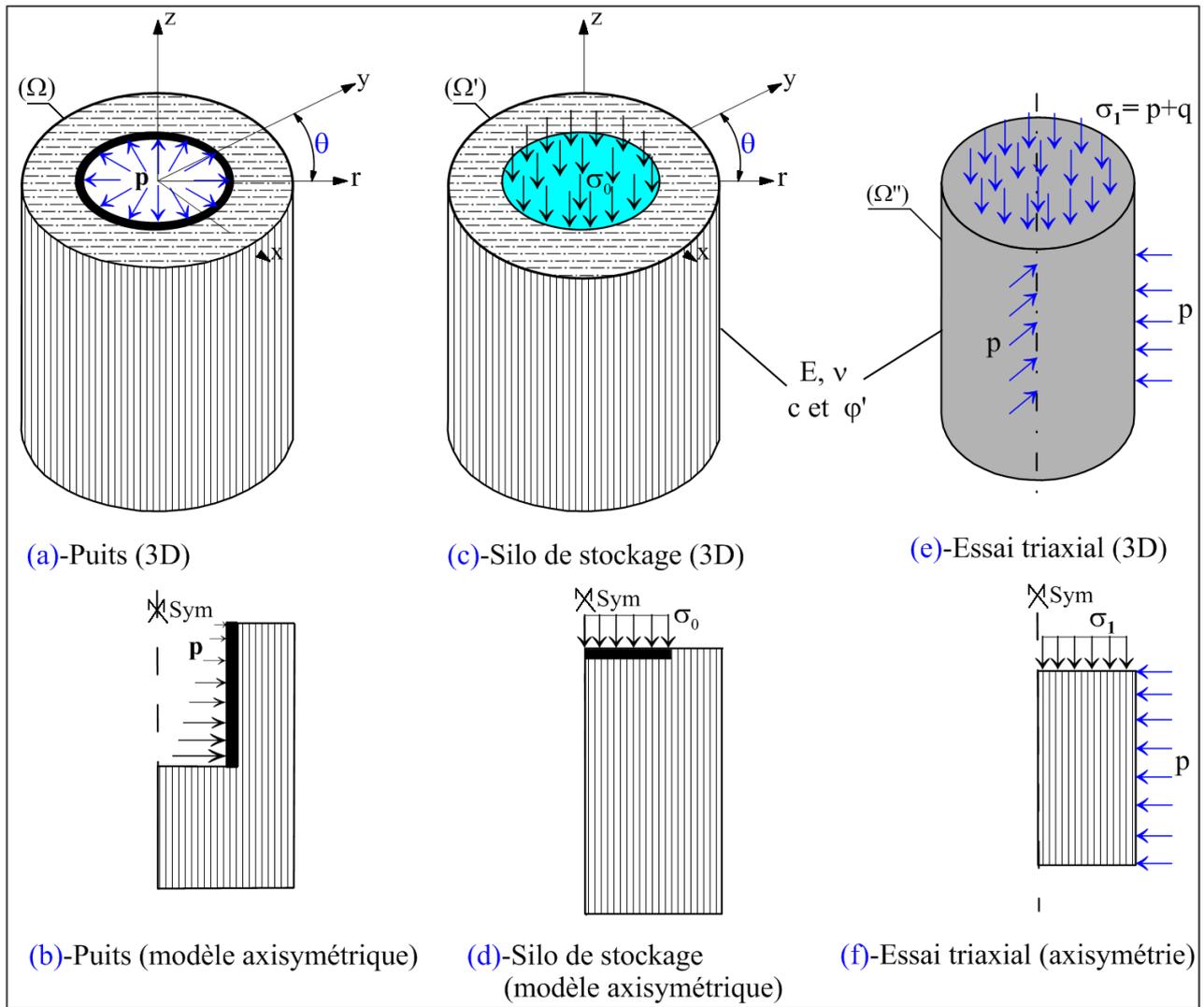


Figure 1-4- Modèles axisymétriques usuels.

$$\sigma_{rr} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} + \lambda\epsilon_{zz} ; \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda\epsilon_{rr} + (2\mu + \lambda)\epsilon_{\theta\theta} + \lambda\epsilon_{zz} ; \quad \sigma_{zz} = \lambda\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta} + (2\mu + \lambda)\epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{rz} = 2\mu\epsilon_{rz} = G\epsilon_{rz} = \frac{E}{(1 + \nu)} \epsilon_{rz}$$

Il en résulte:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{matrix} \right\} = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{pmatrix} (1 - \nu) & \nu & \nu & 0 \\ \nu & (1 - \nu) & \nu & 0 \\ 0 & \nu & (1 - \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 2\nu \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{matrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{rz} \end{matrix} \right\} \quad (1.11)$$

1.2.5.1 Exemple d'application

Un échantillon d'argile raide et saturée ($\phi=7\text{cm}, h=10\text{cm}$) est soumis à une pression de consolidation isotrope ($p=2\text{bars}$) dans une cellule triaxiale. Calculer la variation de volume après dissipation totale de la pression interstitielle ($\Delta u_w = 0$) sachant que ces paramètres élastiques sont ($E'=40\text{bars}, \nu = 0.35$)

L'échantillon va-il se rompre? Expliquez?

a) $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} \Rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\varepsilon = ??$ $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$; $\sigma_{kk} = 3p$

On retrouve: $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \frac{1-2\nu}{E'}p = \varepsilon$; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$

Déformation volumique: $\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = -\frac{\Delta V}{V} = \frac{3(1-2\nu)}{E'}p \Rightarrow p = \frac{E'}{3(1-2\nu)}\varepsilon_v = K\varepsilon_v$

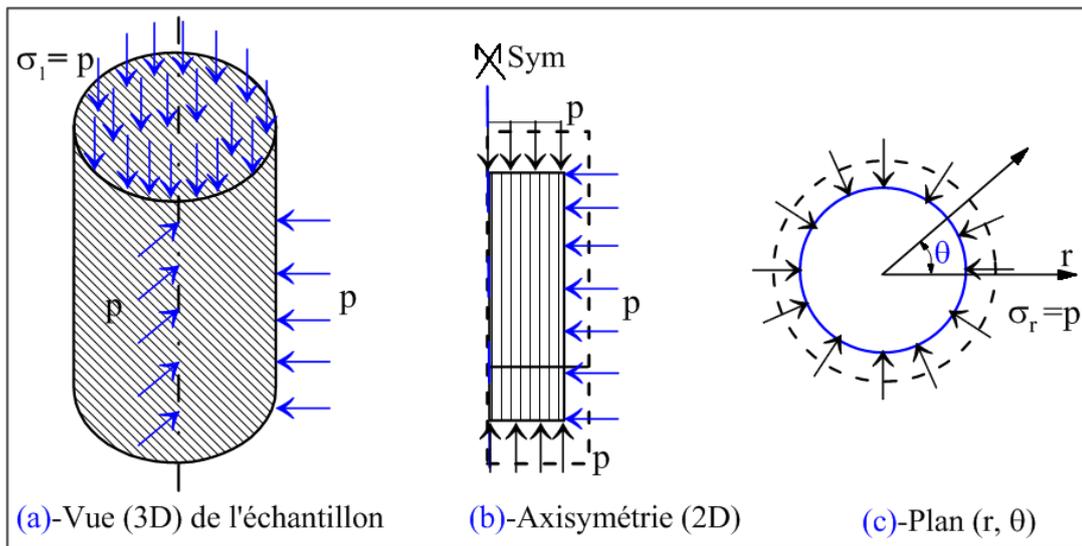


Figure 1-5- Etat de contrainte isotrope (cas de l'essai triaxial).

K : Module de rigidité volumique (dilatation uniforme).

$\varepsilon_v = -\frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \Delta V = -\varepsilon_v V$; $\varepsilon_v = \frac{3(1-2\nu)}{E'}p = \frac{3(1-2 \times 0.35)}{40}p = 4.5\%$

$V = \pi\phi^2 h/4 = \pi \times 7^2 \times 10 / 4 = 384.77 \text{ cm}^3$ $\Delta V = -\varepsilon_v V = -0.045 \times 384.77 = -17.3 \text{ cm}^3$

Il s'agit d'un raccourcissement (perte de volume) à la fin de la consolidation primaire.

b) L'échantillon va t-il se rompre ??

$\sigma = \sigma^{(d)} + \sigma^{(s)} \Rightarrow \sigma^{(d)} = s = \sigma - \sigma^{(s)} = p\delta_{ij} - \frac{\text{Tr}(\sigma)}{3}\delta_{ij} = p\delta_{ij} - \frac{3p}{3}\delta_{ij} = p\delta_{ij} - p\delta_{ij} = 0$

$s = 0 \Rightarrow$ Il n'aurait pas de rupture par cisaillement de l'échantillon car le déviateur de contraintes est nul.

1.3 Interprétation physique des coefficients d'élasticité pour les milieux isotropes

Les paramètres d'élasticité (E, ν) sont primordiaux pour la prévision des déformations d'un milieu continu. Dans le cas des matériaux standards, leurs mesures se font en laboratoire par des essais de traction et de compression sur échantillons intacts. Cependant, dans le domaine de la géotechnique, la mesure du module de déformation se fait en laboratoire à partir d'un essai triaxial et in situ en utilisant le pressiomètre Menard.

Le module de cisaillement (G) relie les contraintes de cisaillement τ aux distorsions γ (variation d'angle droit), il caractérise donc le changement de forme de l'élément (Figure 1-6). Dans le cas d'une

variation de volume (ΔV) sous l'effet d'une pression isotrope p , le module de déformation volumique K relie la contrainte à la déformation par la relation (1.12).

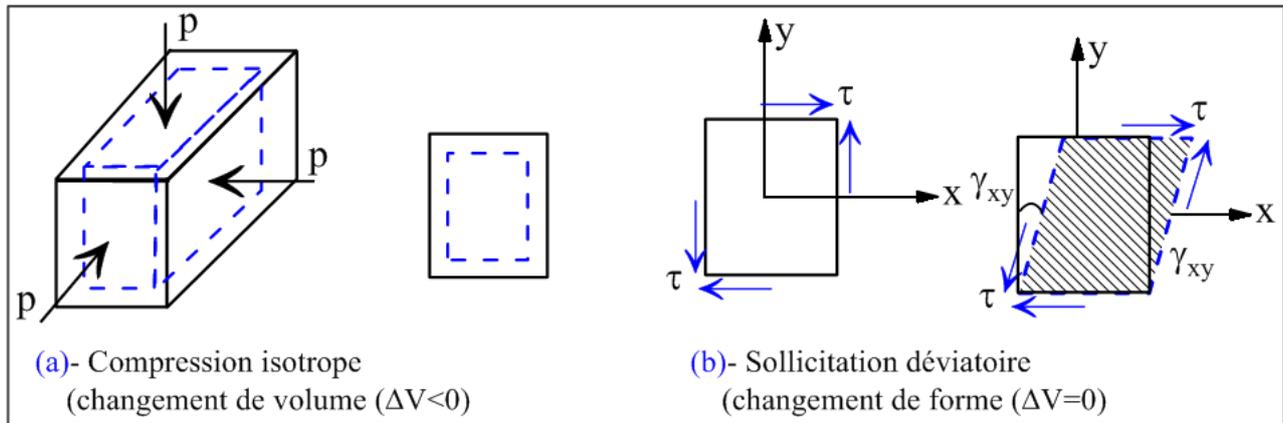


Figure 1-6- Types de déformations (volumiques et de cisaillement)

$$\epsilon_v = -\Delta V/V = \frac{1-2\nu}{E} p \Rightarrow p = \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_v = (3\lambda+2\mu)\epsilon_v = 3K\epsilon_v$$

$p = 3K\epsilon_v$

(1.12)

1.4 Effet de la température

Lorsque qu'un solide élastique et isotrope est soumis à un gradient de température ($\theta=\Delta T$), les effets thermiques (dilatation) se superposent aux effets de l'élasticité et la loi de comportement thermo-élastique de Duhamel-Neumann s'écrit comme suit:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} - 3K\alpha\theta\delta_{ij}; \text{ Soit en écriture matricielle:}$$

$$\sigma = 2\mu\epsilon + \lambda\text{Tr}(\epsilon)\mathbf{I} - 3K\alpha\theta\mathbf{I}$$
(1.13)

Soit en déformations: $\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}\delta_{ij} + \alpha\theta\delta_{ij}$

α est le coefficient dilatation linéique, $3K\alpha$ est le coefficient de dilatation volumique.

La thermoélasticité linéaire isotrope correspond à une variation de température ($\theta=\Delta T$) sous l'effet d'un état de contrainte nulle, on obtient l'expression de la déformation ($\epsilon_{ij} = \alpha\theta\delta_{ij}$)

1.5 Plasticité

Le comportement plastique est caractérisé par des déformations irréversibles (ϵ_p) indépendantes du temps après déchargement (retour par le même chemin initial). Ces déformations apparaissent au delà d'un certain seuil de déformations élastiques (ϵ_e). On atteint un état de plasticité quand des déformations de glissement intercrystallin (mouvements de dislocation) commencèrent à apparaître dans le matériau sans décohésions endommageant la matière d'après (Lemaitre et Chaboche, 1988), il s'agit d'un nouvel équilibre microstructurale de la matière se traduisant par une dissipation d'énergie. La plasticité d'un matériau est réputée parfaite lorsque son domaine d'élasticité (σ_e) reste fixe, le comportement est indépendant de la vitesse de sollicitation (absence de viscosité) et que les déformations plastiques ne s'accompagnent pas d'écrouissage. Le phénomène de plasticité a été observé expérimentalement sur plusieurs matériaux (acier, béton, sols grenus,...etc.). Dans le cas d'un massif de sols soumis au chargement, la plasticité commence dès le début d'apparition des surfaces de

glissement, cependant les déformations irréversibles sont essentiellement dues aux microfissures dans le cas des bétons, d'où la nécessité d'un couplage élasticité-endommagement pour l'analyse de leur comportement.

1.5.1 Loi de comportement et conditions expérimentales

La loi de comportement est un ensemble de relations tensorielles entre les contraintes (σ_{ij}) et les déformations (ε_{ij}) lesquelles ne dépendent pas du chemin de sollicitation suivi. Généralement, des restrictions sont imposées à ces lois en vue de respecter les principes de la localisation et d'indifférence matérielle. Pour définir les relations de comportement expérimentalement, on réalise des essais mécaniques homogènes au laboratoire (traction, compression, oedomètre, triaxial,...etc.). En se basant sur l'approche expérimentale, un développement théorique (modélisation) est mené en satisfaisant certains principes généraux en vue d'aboutir à une loi générale reflétant la réalité physique reliant les variables mis en jeu. Une fois le modèle est mis au point, les expériences servent en général à l'identification de ces paramètres. La modélisation permet la prédiction du comportement d'un ouvrage dans un certains nombre de cas dont il est couteux voire impossible de réaliser des expériences sur des modèle réduits.

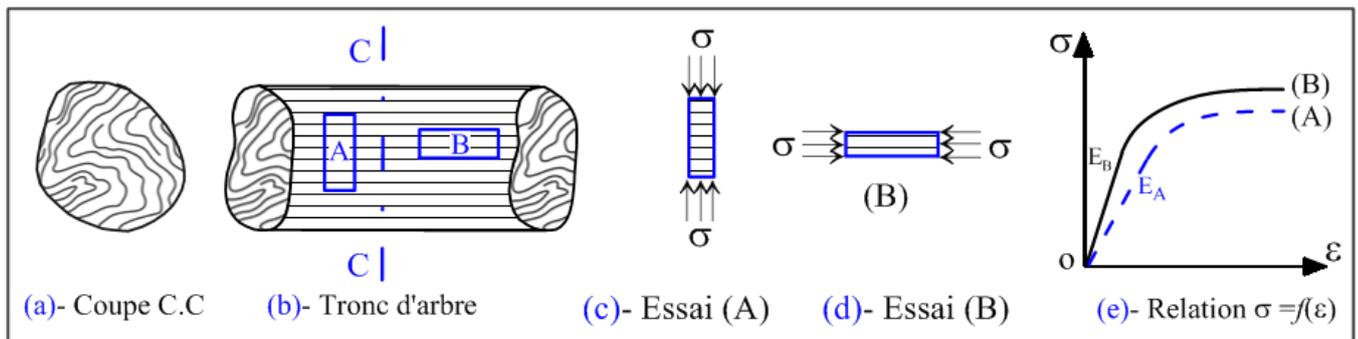


Figure 1-7- Principe d'indifférence matérielle (matériau anisotrope)

- Principe de localisation: La loi de comportement ne dépend que de ce qui se passe au voisinage du point considéré.
- Principe d'objectivité (indifférence matérielle): Les équations de comportement sont indépendantes de l'observateur et de son mouvement. Ce principe édicte que les résultats des essais sur les échantillons (A) et (B) sont identiques. Toutefois, la structure interne du matériau peut renfermer un certain type de symétrie de formation matérielle qui aura une influence sur le comportement suivant les directions principales de l'échantillon et le chemin de sollicitation suivi (Figure 1-7).

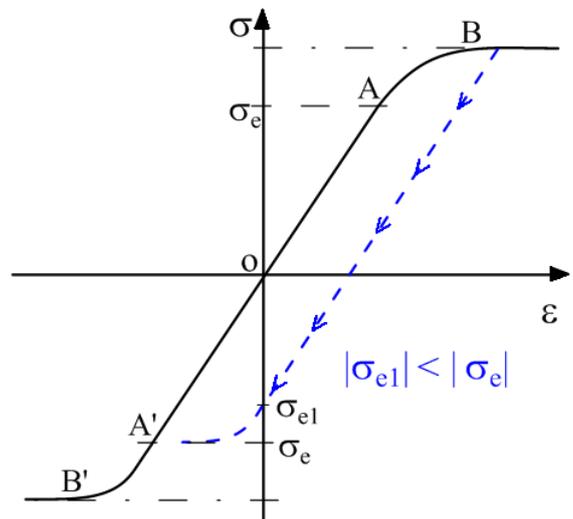
Un milieu continu est isotrope quand ces propriétés mécaniques sont similaires suivant les trois directions de l'espace, cette hypothèse est très bien vérifiée pour les matériaux métalliques. L'isotropie dépend intrinsèquement du processus de formation ou de fabrication du matériau. La réalité expérimentale met en évidence que la plupart des matériaux de génie civil sont anisotropes (composition différentes dans les deux directions) et orthotropes. La composition du béton influe par exemple sur l'homogénéité lors du coulage d'un poteau, par conséquent les résistances à la compression mesurées sur éprouvettes prélevées respectivement dans les sens vertical et horizontal ne donnent pas forcément un même résultat. Ce qui affecte l'hypothèse d'isotropie considérée dans le domaine d'élasticité.

1.5.2 Comportement cyclique des matériaux

La plupart des métaux et alliages subissent des variations de leurs propriétés d'érouissage (adoucissement ou durcissement) lors des sollicitations cycliques traction-compression (Lemaitre et Chaboche, 1988). Le retour d'expérience sur certains ouvrages sollicités par des charges sismiques (ponts, bâtiments, structures offshore,...) ainsi que des expériences effectuées en laboratoire traduisent certaines notions de comportement des matériaux dont les principales sont les suivantes:

a) Effet Bauschinger :

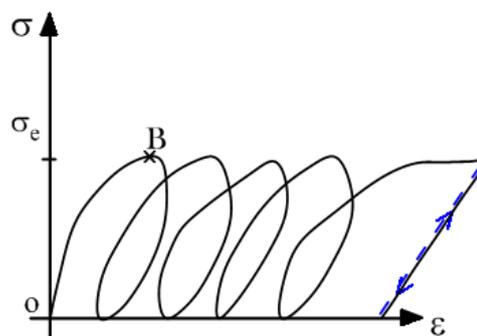
La limite élastique (σ_e) peut décroître en valeur absolue pour des contraintes de signes opposés (déchargement). La figure. (a) montre que le matériau est éroui dans le sens de la traction (\overline{AB}) et que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression. Les matériaux élastoplastiques à érouissage cinématique se rapprochent le plus de ce type de comportement d'après (Cardou, 2006; Lemaitre et Chaboche, 1988).



(a)- Effet Bauschinger

b) Adaptation (cycles adaptés):

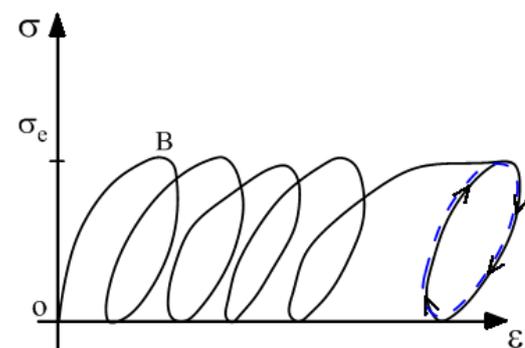
Après avoir atteint un certain nombre de cycles de chargement-déchargement (figure.(b)), la courbe $\sigma = f(\epsilon)$ se stabilise et devient biunivoque c.à.d. le chemin en chargement est confondu avec celui en déchargement.



(b)- Cycles adaptés

c) Accommodation (cycles accommodés):

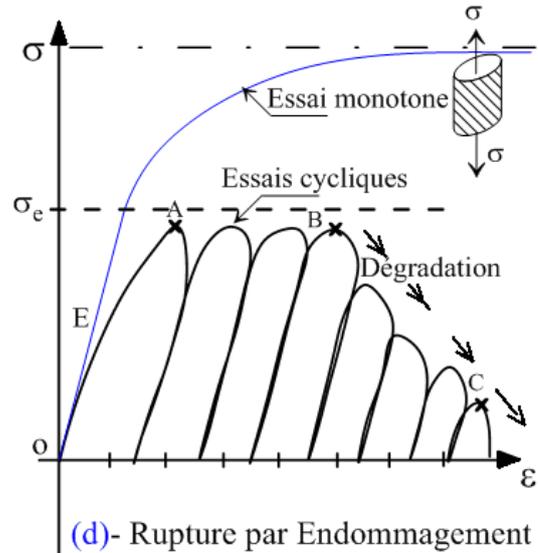
La courbe se stabilise sous forme de boucle d'Hystérésis après un certain nombre (N) de cycles de chargement- déchargement (figure.(c)).



(c)- Cycles accommodés

d) Endommagement (fatigue des matériaux):

La répétition des chargements cycliques (séismes par exemple) sur un ouvrage peut entraîner la rupture brutale du matériau sous l'effet d'un seuil de contraintes inférieur à celui mesuré dans le cas d'un essai monotone (figure.(d)). Il s'agit d'une diminution progressive (dégradation) des caractéristiques mécaniques du matériau jusqu'à la ruine, phénomène dénommé endommagement. On distingue diverses ruptures par endommagement en l'occurrence, endommagement macro-fragile, plastique ductile et viscoplastique fragile (Lemaitre et Chaboche, 1988).



1.5.3 Quelques types de modèles rhéologiques

a) Modèle rigide plastique parfait

La plasticité parfaite est schématisée en monodimensionnel par un patin de seuil σ_e faisant apparaître des déformations plastiques irréversibles, son équation est la suivante:

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_e \Rightarrow \varepsilon = 0 \\ \sigma = \sigma_e \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon^{(p)} \end{cases}$$

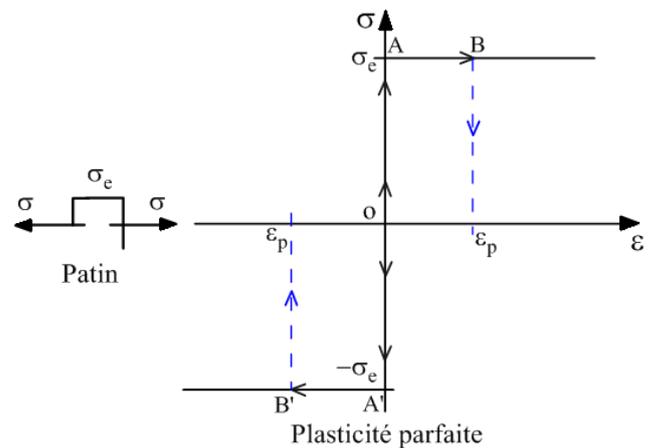


Figure 1-8- plasticité parfaite

b) Modèle élastoplastique

Tant que la limite élastique σ_e n'est pas dépassée, le comportement est élastique. Quand cette limite est atteinte, il se produit des déformations plastiques irréversibles limitées généralement à environs la moitié ou les trois quarts de la déformation de rupture (ε_r) d'après (Lemaitre et Chaboche, 1988).

$$\begin{cases} \sigma < \sigma_e \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon^{(e)} \\ \sigma = \sigma_e \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(p)} \end{cases}$$

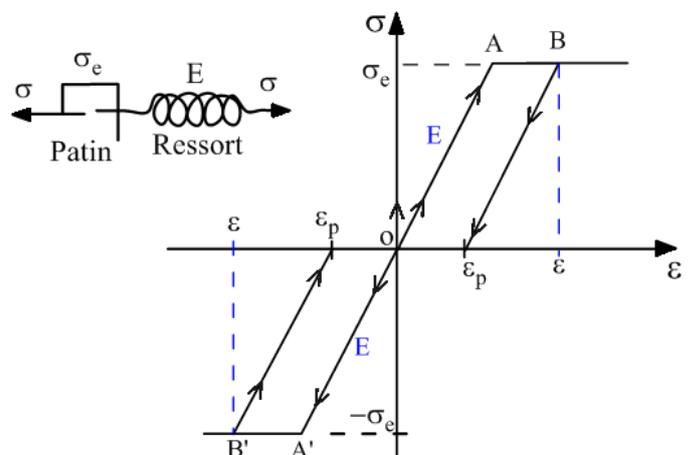


Figure 1-9- Comportement élastoplastique

c) Plasticité avec écrouissage

Après dépassement du seuil d'élasticité initiale, le matériau rentre en écrouissage. À cet effet, Il se produit une évolution de la structure interne par apparition de déformations de glissement (dislocations) irréversibles qui ont tendance à s'enchevêtrer de manière dense. Il s'en suit alors une augmentation de la limite d'élasticité (surface de charge en 3D) avec une décroissance de la raideur. La figure.1.10 montre le cas d'un écrouissage linéaire, pouvant se généraliser en multi-branches (modèle de Prag).

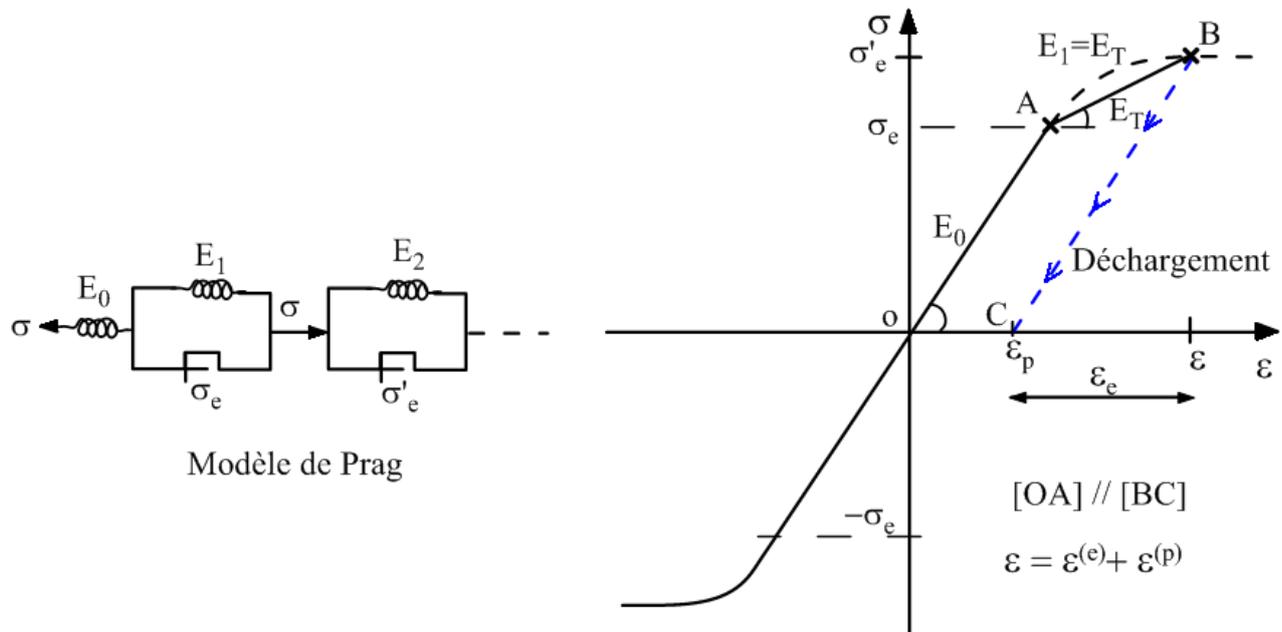


Figure 1-10- Plasticité avec écrouissage linéaire

d) Modèle visqueux

La contrainte est proportionnelle à la vitesse de déformation ($\dot{\epsilon}$). La viscosité newtonienne (η) est caractérisée un amortisseur. Le modèle de Maxwell par exemple prend en compte le comportement des matériaux vis à vis du phénomène de fluage qui est l'évolution des déformations en fonction du temps sous l'effet d'un chargement constant.

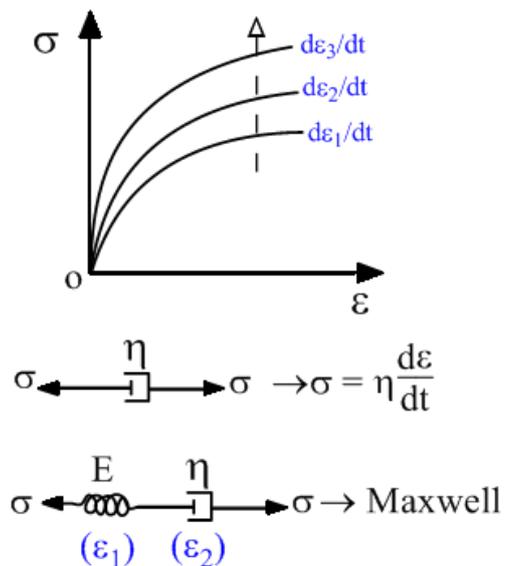
$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} = \eta \frac{d\epsilon}{dt}$$

Modèle de Maxwell:

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \Rightarrow \dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Equation différentielle:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$



1.5.4 Hypothèses et principes de Hill en élastoplasticité

Tous les matériaux possèdent un domaine de l'espace des contraintes à l'intérieur duquel une variation des sollicitations n'engendre qu'une variation des déformations élastiques réversibles (de

l'ordre de 0.5 à 2% pour les matériaux métalliques, les bétons et les bois). Cependant, dans le cas des sols, ce domaine d'élasticité est très négligeable ($\epsilon \approx 10^{-4}$) car les liaisons entre les grains de sol de divers diamètres (cohésion) sont dans la plupart des cas faibles (Dhouib, 2016), les déformations sont souvent liées au mouvement de glissement entre les grains.

Dans le cas des problèmes tridimensionnels (3D), le domaine d'élasticité initial ou actuel est en général défini par un scalaire $f(\sigma_{ij})$ appelé fonction de charges du matériau représentée par une surface d'écoulement (Ω). Pour les états de contraintes σ contenus à l'intérieur de cette surface (Ω), le comportement est entièrement élastique, il se traduit par la condition $f(\sigma_{ij}) < 0$. Les hypothèses de la plasticité d'après Hill (Wielgosz, 1999) sont les suivantes:

- a. Le domaine d'élasticité (Ω) est une partie convexe fermée de l'espace des contraintes $f(\sigma_{ij})$, admettant l'origine comme point intérieur (Temam, 1983; Wielgosz, 1999). Tout état de contraintes σ vérifiant $[\sigma \subset (\Omega)]$ est considéré comme plastiquement admissible.
- b. Dans le cadre de l'élastoplasticité, le principe de partition des déformations élastique et plastique est adopté. Cette hypothèse est liée à l'existence d'une configuration intermédiaire relâchée en plasticité (apparition de dislocations et de glissements inter grains dans le cas des sols).

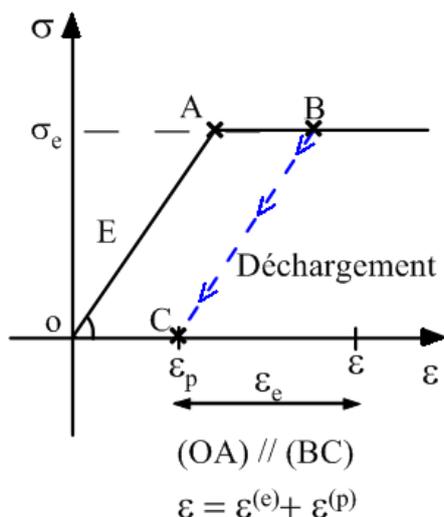
$$\epsilon = \epsilon^{(e)} + \epsilon^{(p)}$$

- c. La loi de Hooke s'applique pour la partition élastique des déformations (réversibles).

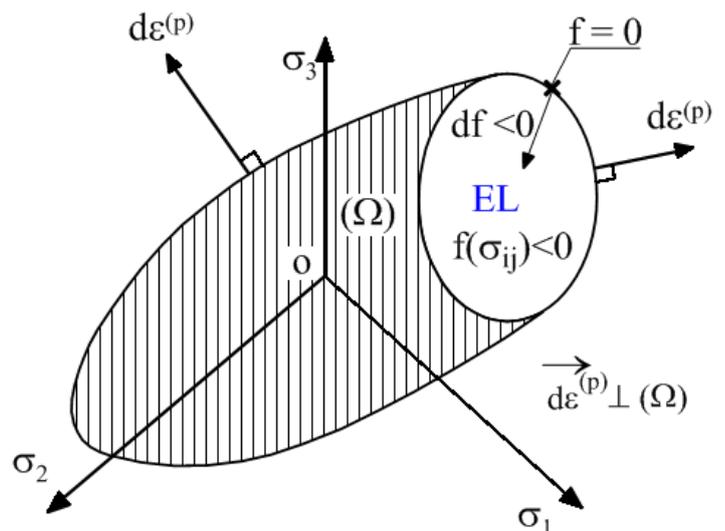
$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \epsilon_{kl} \rightarrow \sigma = d : \epsilon^{(e)}$$

L'énergie due à la déformation élastique est restituée (système conservatif), par contre la déformation plastique est dissipative, il en résulte à cet effet un travail plastique dissipé donné par l'expression:

$$W^{(p)} = \int_0^{\epsilon^p} \sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^{(p)}$$



(a)- Loi de comportement



(b)- Surface de charge

Figure 1-11- Hypothèse de Hill en élastoplasticité (surface d'écoulement).

d. L'expérience montre que la déformation plastique n'engendre pas de variation de volume (incompressible), les tenseurs (ε_p et ε_p^\bullet) peuvent être représentés par des tenseurs déviateurs, il en résulte la propriété:

$$\varepsilon_v^{(p)} = \varepsilon_{kk}^{(p)} = \text{tr}(\varepsilon^{(p)}) = -\Delta V/V = 0$$

D'après (Hapthen et Salençon, 1987), la déformation plastique (ε_p) s'effectue à volume constant pour tous les matériaux standards dont la fonction de charges est indépendante de la contrainte moyenne.

1.5.5 Loi d'écoulement plastique (loi de normalité)

Le principe de Hill édicte que le vecteur déplacement plastique $\overrightarrow{\varepsilon_p^\bullet}$ est perpendiculaire à la surface frontière de la fonction de charges $f(\sigma_{ij})$ (Figure 1-11). Dans le cas de la plasticité associée (appliquée aux matériaux standards), la surface d'écoulement f est confondue avec le potentiel de dissipation plastique g (surface équipotentielle). La loi de comportement est construite dans le cadre de la dissipativité normale (loi de normalité) par l'expression (1.14), cette hypothèse n'est pas vérifiée en général dans le cas de la mécanique des sols (plasticité non associée) nécessitant l'emploi de surface limite d'écoulement f et d'un potentiel plastique g ($f \neq g$).

L'hypothèse de normalité associée aux phénomènes dissipatifs indépendant du temps se traduit par la loi incrémentale en plasticité parfaite comme suit:

$$d\varepsilon_p = \varepsilon_p^\bullet = \lambda^\bullet \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda^\bullet \overrightarrow{\text{grad} f} ; \text{ avec: } f(\sigma_{ij}) \leq 0 \tag{1.14}$$

λ^\bullet est un scalaire appelé multiplicateur plastique: $\lambda^\bullet \geq 0$

$$\begin{aligned} f(\sigma) < 0 : & \text{ comportement élastique, } \varepsilon_{ij}^{(p)} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij} = a_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \\ f(\sigma) = 0 \text{ et } df = 0 : & \text{ comportement plastique } \Rightarrow d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{(e)} + d\varepsilon_{ij}^{(p)} \\ f(\sigma) = 0 \text{ et } df < 0 : & \text{ décharge élastique: } \varepsilon_{ij}^{(p)} = 0 \end{aligned}$$

1.5.5.1 Exemple d'application

Soit le domaine (C) représenté par la fonction de charges $f(\sigma_1, \sigma_2) \leq 0$ tel que:

$$f = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2 = 0$$

La loi de normalité est-elle vérifiée dans ce cas?

$$f < 0 \Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2 < 0 \Rightarrow$$

L'état de contrainte à l'intérieur du cercle, le comportement est élastique,

$$f = 0 \Rightarrow \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - r^2 = 0,$$

$$df = f^\bullet = 2(\sigma_1 d\sigma_1 + \sigma_2 d\sigma_2) = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$d\varepsilon^{(p)} = \lambda^\bullet \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda^\bullet \overrightarrow{\text{grad}(f)} = 2\lambda^\bullet \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} ;$$

Ce vecteur est perpendiculaire au cercle (C)

$\overrightarrow{d\varepsilon^{(p)}} \perp (\Omega)$ (Figure 1-12), la loi de normalité est vérifiée.

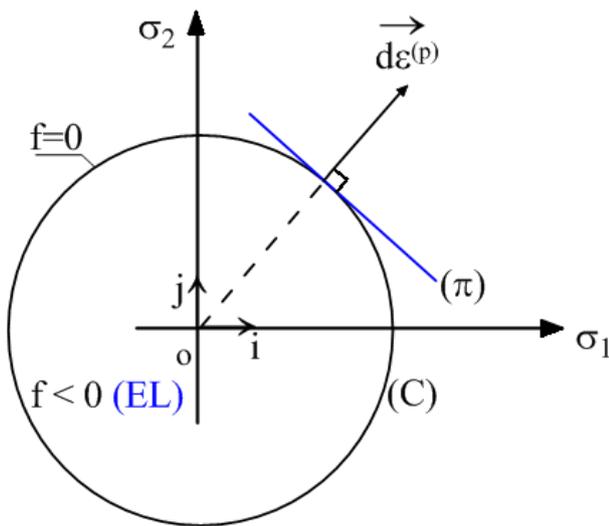


Figure 1-12- Représentation de la fonction de charges.

1.5.6 Critères de plasticité et surfaces de charges

Un critère de plasticité signifie la définition mathématique de la forme du domaine tridimensionnel d'élasticité représenté par la fonction de charge $f(\sigma_{ij})$. Cette fonction est définie en général par la combinaison linéaire ou non linéaire des invariants des déviateurs de contrainte et de déformation plastique. Elle est représentée dans l'espace des contraintes $(o, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ par une surface (Ω) convexe et fermée. Nous nous intéressons dans ce qui suit aux critères usuels utilisés dans l'analyse des structures constituées de matériaux homogènes et isotropes et nous nous placerons dans le cas des milieux continus tridimensionnels.

1.5.6.1 Critère de Von-Mises (1913)

Dans l'espace des contraintes $(o, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, la surface de rupture de Von-Mises est un cylindre de révolution (Figure 1-13) ayant pour axe la trisectrice $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ et de section circulaire de rayon r du plan déviatoire (π) d'équation $(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0)$. La fonction de charges est donnée par l'expression (1.15):

$$f(\sigma_{ij}) = s_{II} - k^2 = 2J_2 - k^2 = 0 = s_{ij} \cdot s_{ij} - k^2 = 0 \quad ; \quad (1.15)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij}^{(d)} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\text{tr}(\sigma_{ij})}{3} \delta_{ij}$$

Dans l'espace des contraintes à 6 dimensions (σ_{ij}) , le critère s'écrit:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 \right] + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) - k^2 = 0$$

Dans l'espace des contraintes principales à 3 dimensions $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] - k^2 = 0 \quad ; \quad (1.16)$$

k : est un paramètre mécanique dont l'identification s'effectue en se ramenant à un essai simple sous sollicitation unidimensionnelle jusqu'à la limite d'écoulement σ_e (traction-compression):

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{2}{3}(\sigma_1^2) - k^2 = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma_e| = r$$

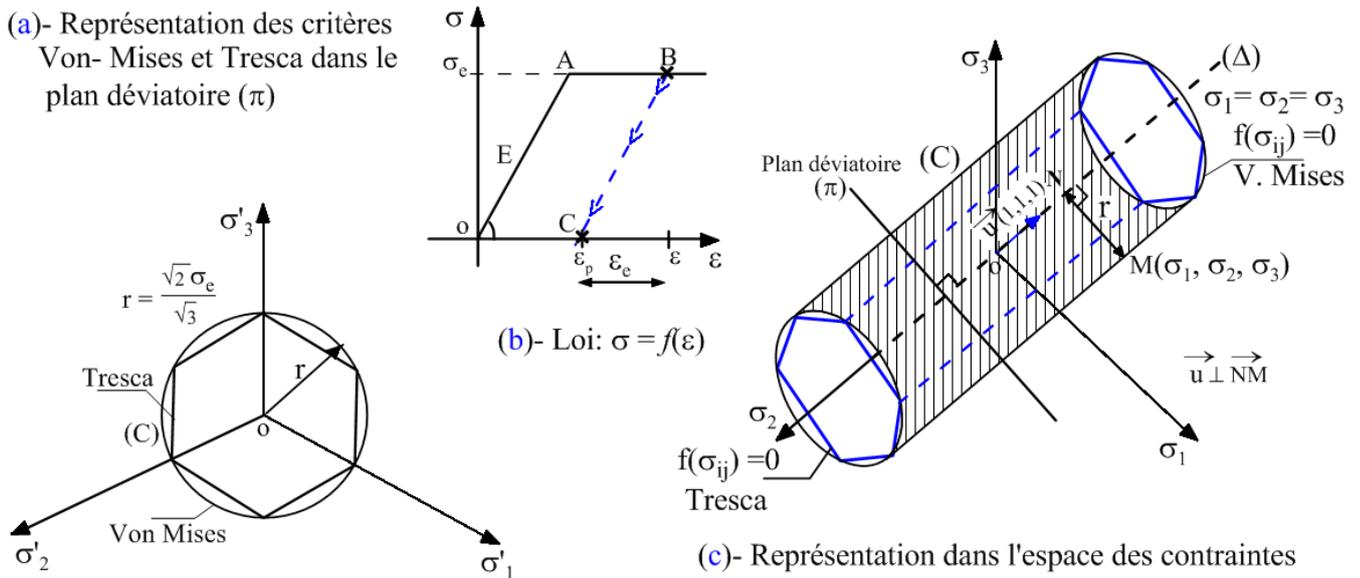


Figure 1-13- Représentation des critères de Von-Mises de Tresca.

Démonstration:

$$\{M \in (C) : M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightarrow \overline{OM} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T ; \vec{u} = (1, 1, 1)^T ; \|\vec{u}\| = \bar{u} = \sqrt{3}$$

On se place dans une base orthonormée $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, r est le rayon du cylindre (Figure 1-13).

$$\overline{OM} \wedge \vec{u} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\sigma_2 - \sigma_3)\vec{i} + (\sigma_3 - \sigma_1)\vec{j} + (\sigma_1 - \sigma_2)\vec{k}$$

$$\|\overline{OM} \wedge \vec{u}\| = \overline{OM} \cdot \bar{u} \times \sin(\overline{OM}, \vec{u}) = \overline{OM} \cdot \sqrt{3} \times \frac{r}{\overline{OM}} = r\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right) - r^2 = 0, \quad r = k$$

Déformations plastiques

$$\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial (s_{II} - k^2)}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{s_{ij}}{s_{II}} = d\lambda \frac{s_{ij}}{2J_2} ; d\lambda = \lambda' > 0$$

1.5.6.2 Critère de Tresca (1864)

Après des essais sur le plomb, l'auteur conclut que la plastification n'est pas liée l'énergie, mais à la contrainte de cisaillement maximale lorsqu'elle atteint une certaine limite. Le critère de Tresca est largement utilisé, il ne s'exprime qu'en contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ par plusieurs fonctions f_i (plans) formant un prisme droit à base hexagonale de six (6) coins, circonscrite dans le cercle de Von Mises.

$$C = \{f_i(\sigma_{ij}) = 0, f_1 = |\sigma_1 - \sigma_2| = b ; f_2 = |\sigma_1 - \sigma_3| = b ; f_3 = |\sigma_2 - \sigma_3| = b\} \quad (1.17)$$

b: est un paramètre mécanique dont la signification est obtenue en se plaçant dans une dimension
 $\Rightarrow (b = \sigma_e)$

Dans le cas des sols, le critère se décline en fonction la cohésion non drainée (c_u) du sol par l'expression (1.18) suivante:

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - 2c_u = 0 ; \sigma_1 > \sigma_3 \text{ et } \sigma_2 = \sigma_3 \text{ :en conditions triaxiales} \quad (1.18)$$

Remarque: La différence entre les critères Von Mises et de Tresca est de l'ordre de 15% d'après (Wielgosz, 1999). La loi de Von Mises est plus favorable car on atteint la limite d'élasticité plus tard, sauf au niveau des coins d'intersection avec l'hexagone de Tresca.

1.5.6.3 Critère de Mohr-Coulomb (1900)

Ce critère élastoplastique s'applique aux premières déformations plastiques des matériaux ductiles et à la rupture des matériaux raides, il est basé sur une approche simplifiée de la courbe intrinsèque (Figure 1-14). Mohr a mis en évidence à travers des expériences que la rupture apparait par glissement lorsque la contrainte de cisaillement (τ_{\max}) s'exerçant sur une facette atteint une valeur limite $f(\sigma)$ qui dépend de la contrainte normale σ . L'enveloppe de ces limites constitue la courbe intrinsèque $|\tau|$ du matériau dont les cercles de Mohr à la rupture lui sont tangents.

$$|\tau| = f(\sigma) = c - \sigma \tan \varphi, \text{ Avec } c \text{ et } \varphi: \text{ Cohésion et angle de frottement du matériau.}$$

Pour établir la courbe intrinsèque, des essais (03) de traction et compression jusqu'à la rupture permettent de tracer dans le plan (σ, τ) des cercles de Mohr limites. Cette courbe sépare le domaine des contraintes supportables (intérieur de la courbe) du domaine interdit causant sa ruine, généralement son approximation par une droite tangente aux cercles est suffisante. Le critère de Mohr-Coulomb est adapté pour analyser le comportement à la rupture des matériaux raides (fonte, céramiques porcelaines, bétons, bitumes, graves traitées...) ainsi que les massifs de sols (pulvérulents et cohérents) à court et long terme (Frey, 1994; Hicher et Shao, 2002). En mécanique des sols, la droite limite $|\tau|$ est obtenue à partir des essais de cisaillement rectiligne et/ou triaxiaux après détermination des paramètres de résistance au cisaillement (c, φ). Dans l'espace des contraintes ($\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), le critère de Mohr-Coulomb est une pyramide (Figure 1-15) centrée sur la trisectrice, de section hexagonale dans le plan déviatoire ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) et sa fonction de charges est donnée en contraintes principales par l'expression (1.19) suivante:

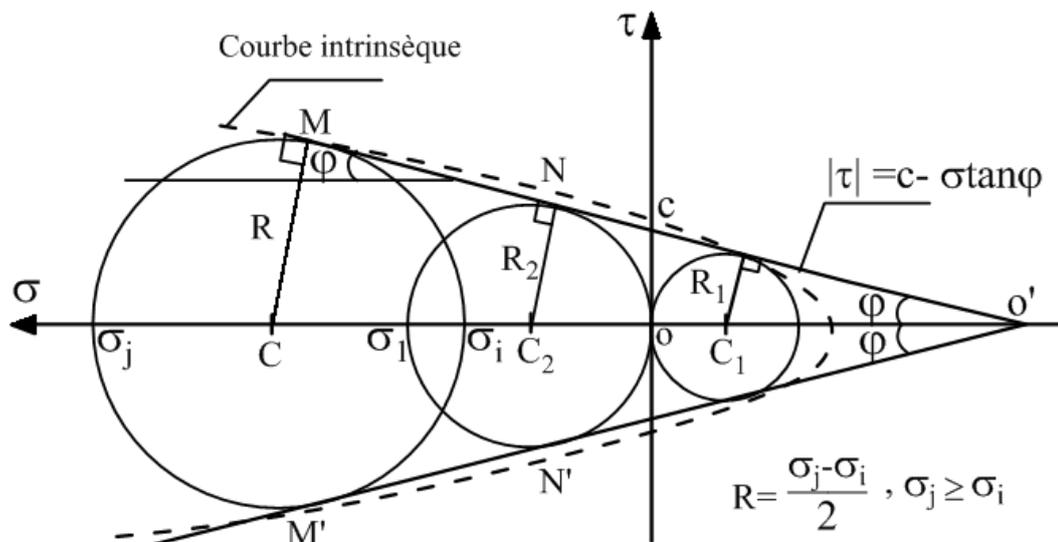


Figure 1-14- Courbe intrinsèque (limite) de Mohr- Coulomb.

$$\sin \varphi = \frac{R}{oo'+oc} = \frac{(\sigma_j - \sigma_i) / 2}{c \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{|\sigma_j + \sigma_i|}{2}} \Rightarrow \sigma_j - \sigma_i = 2c \times \cos \varphi + |\sigma_j + \sigma_i| \sin \varphi, \text{ d'ou l'expression de } f :$$

$$f_i(\sigma_{ij}) = |\sigma_i - \sigma_j| - (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = q - p \sin \varphi - c \times \cos \varphi = 0 \quad (1.19)$$

q et p: Sont respectivement le déviateur de contraintes et la contrainte moyenne exprimés par:

$$q = (\sigma_i - \sigma_j) / 2 ; \quad p = (\sigma_i + \sigma_j) / 2 ; \quad i, j = 1, 2 \text{ et } 3 ; \quad (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

En mécanique des sols, on a souvent ($\sigma_2 = \sigma_3$) dans les milieux isotropes, la contrainte intermédiaire σ_2 est souvent cachée par les conditions de réalisation des essais de compression triaxiale. Il en résulte les expressions de la fonction de charge f et du potentiel plastique g pour ($\sigma_1 \geq \sigma_3$) comme suit:

$$\begin{cases} f = (\sigma_1 - \sigma_3) - |\sigma_1 + \sigma_3| \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = 0 \\ g = (\sigma_1 - \sigma_3) - |\sigma_1 + \sigma_3| \sin \psi + cte = 0 \end{cases}$$

ψ : Angle de dilatance, donné empiriquement par la relation: $\psi = \varphi - 30^\circ$, lorsque ($\psi = \varphi$); le matériau est dit "standard" et la règle d'écoulement est associée ($f = g$). La partie élastique du modèle de Mohr- Coulomb est définie par les paramètres mécaniques (E, ν).

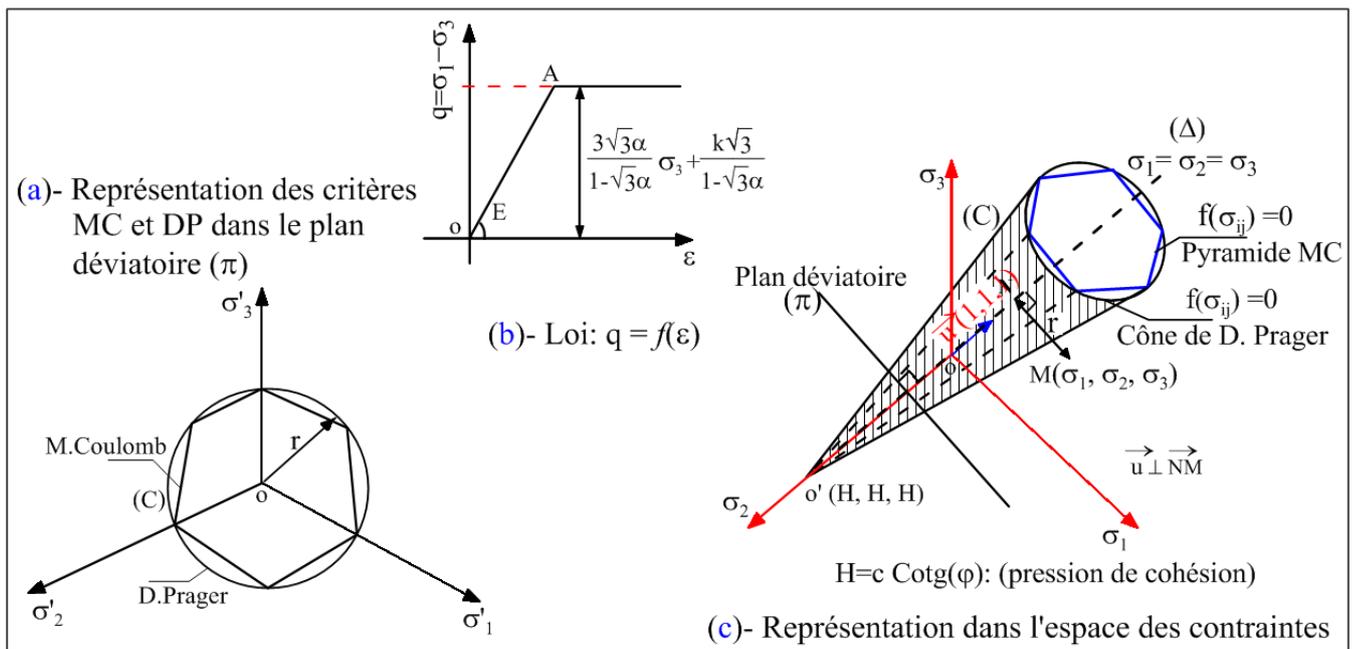


Figure 1-15- Représentation des critères de Mohr Coulomb et de Drucker Prager.

a) Evaluation des paramètres de cisaillement en fonction de σ_u^c et σ_u^t

La courbe intrinsèque d'un matériau réputé fragile (raide) peut être déterminée à partir des résistances ultimes uniaxiales à la traction et compression (σ_u^t et σ_u^c). On obtient deux cercles de Mohr limites qui sont alors tangents à la courbe intrinsèque (Figure 1-16).

Les relations entre les résistances ultimes ($\sigma_u^c \geq \sigma_u^t$) et les paramètres de cisaillement (c et φ) du matériau sont données comme suit:

$$\begin{cases} \sigma_u^c - \sigma_u^c \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = 0 \\ \sigma_u^t + \sigma_u^t \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

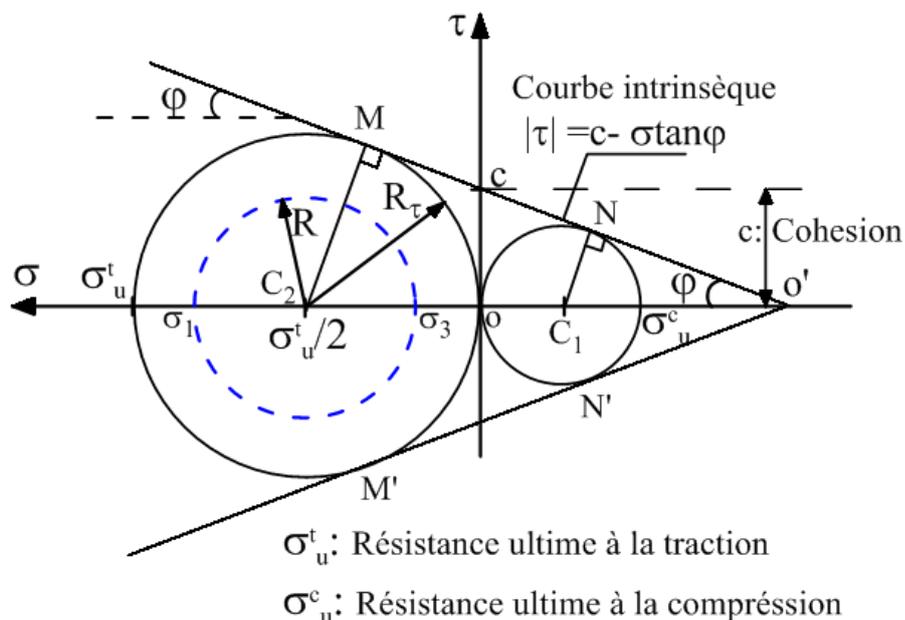


Figure 1-16- Courbe intrinsèque et cercles de Mohr limites des essais de traction et compression.

Il en résulte après développement:
$$c = \frac{\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{2} \quad ; \quad \tan \varphi = f_r = \frac{|\sigma_u^c - \sigma_u^t|}{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}} \quad (1.20)$$

Démonstration

Les deux cercles de Mohr sont limites, d'où ils vérifient la fonction de charges (Fig.1-16): $f = 0$

Essai de traction (Fig.1-16):
$$\sin \varphi = \frac{\overline{C_2 M}}{OO' + OC_2} = \frac{\frac{\sigma_u^c}{2}}{c \times \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} + \frac{\sigma_u^c}{2}} \Rightarrow \frac{\sigma_u^c}{2} = c \times \cos \varphi + \frac{\sigma_u^c}{2} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_u^c = 2c \times \cos \varphi + \sigma_u^c \sin \varphi \rightarrow \sigma_u^c - \sigma_u^c \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = 0 \quad (a)$$

Essai de compression:
$$\sin \varphi = \frac{\overline{C_1 N}}{OO' - OC_1} = \frac{\frac{\sigma_u^t}{2}}{c \times \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{\sigma_u^t}{2}} \Rightarrow \frac{\sigma_u^t}{2} = c \times \cos \varphi - \frac{\sigma_u^t}{2} \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \sigma_u^t = 2c \times \cos \varphi - \sigma_u^t \sin \varphi \rightarrow \sigma_u^t + \sigma_u^t \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = 0 \quad (b)$$

$$(a) - (b) = 0 \Rightarrow \sigma_u^c - \sigma_u^t - (\sigma_u^c + \sigma_u^t) \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sigma_u^c - \sigma_u^t}{(\sigma_u^c + \sigma_u^t)}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_u^c - \sigma_u^t}{\sigma_u^c + \sigma_u^t} \right)^2} = \frac{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{\sigma_u^c + \sigma_u^t} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{\sigma_u^c + \sigma_u^t}$$

$$f_r = \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sigma_u^c - \sigma_u^t}{(\sigma_u^c + \sigma_u^t)} \frac{(\sigma_u^c + \sigma_u^t)}{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}} = \frac{|\sigma_u^c - \sigma_u^t|}{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}} \Rightarrow f_r = \tan \varphi = \frac{|\sigma_u^c - \sigma_u^t|}{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}$$

f_r est le coefficient de frottement interne, il caractérise la résistance d'adhérence du matériau.

Remplaçons les expressions de ($\sin \varphi$ et $\cos \varphi$) dans l'équation (a):

$$\sigma_u^c - \sigma_u^c \sin \varphi - 2c \times \cos \varphi = 0 \Rightarrow \sigma_u^c - \sigma_u^c \left(\frac{\sigma_u^c - \sigma_u^t}{\sigma_u^c + \sigma_u^t} \right) - 2c \left(\frac{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{\sigma_u^c + \sigma_u^t} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(\sigma_u^c)^2 + \sigma_u^t \sigma_u^c - (\sigma_u^c)^2 + \sigma_u^c \sigma_u^t - 4c\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{\sigma_u^c + \sigma_u^t} = 0 \Rightarrow 2\sigma_u^t \sigma_u^c = 4c\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{2}$$

$$c = \frac{\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{2}$$

Application: Paramètres de plasticité d'un béton de classe C (25/30): $f_{c28} = \sigma_u^c = 25 \text{ MPa}$

$f_{t28} = \sigma_u^t = 0.06f_{c28} + 0.6 \text{ MPa} = 2.1 \text{ MPa}$

$$c = \frac{\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}}{2} = \frac{\sqrt{25 \times 2.1}}{2} = 3.62 \text{ MPa} \quad ; \quad f_r = \tan \varphi = \frac{|\sigma_u^c - \sigma_u^t|}{2\sqrt{\sigma_u^c \sigma_u^t}} = \frac{|25 - 2.1|}{2\sqrt{25 \times 2.1}} = 1.58 \Rightarrow \varphi = 57.67^\circ$$

$$\Rightarrow c = 3.6 \text{ MPa et } \varphi = 57.7^\circ$$

b) Facteur de sécurité

Quand un matériau élastoplastique est soumis à un état de contraintes s'inscrivant à l'intérieur de la courbe limite, on définit d'après (Bazergui et al., 2002) un facteur de sécurité par rapport à la rupture fragile comme étant le rapport du rayon du cercle tangent à la courbe intrinsèque par rapport au rayon du cercle de Mohr sollicitant (déviateur $\sigma_1 - \sigma_3 \geq 0$).

$$F_s = \frac{R_\tau}{R} = \frac{2R_\tau}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2c \times \cos\varphi - |\sigma_1 + \sigma_3| \sin\varphi}{(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

1.5.6.4 Critère de Drucker Prager (1952)

Le critère élastoplastique de Drucker Prager prend en compte le premier invariant I_1 du tenseur de contraintes et le deuxième invariant du tenseur déviatorique des contraintes J_2 . La partie élastique du comportement est définie par l'élasticité linéaire isotrope de Hooke de paramètres (E, ν) . Le modèle de Drucker Prager comprend au total cinq (5) paramètres $(E, \nu, \alpha, \beta \text{ et } k)$ qui sont couramment déterminés au laboratoire à partir des essais simples sur matériaux standards (acier, bétons,...) et oedomètre et triaxial pour le cas des sols. La surface d'écoulement du critère n'admet pas des angles de frottement supérieur à 37° d'après (Mestat, 1993; Desrues, 2002), d'où la nécessité d'utiliser avec précaution ce critère dans l'analyse des matériaux pulvérulents (sables grossiers, graviers).

La fonction de charges du critère est donnée par:

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - \alpha I_1 - k = 0 = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}} - \alpha \text{tr}(\sigma) - k = 0 \quad (1.21)$$

$$J_2 = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2} = \frac{(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)}{2} = -(s_1s_2 + s_1s_3 + s_2s_3); \quad s_{ij} = \sigma_{ij}^{(d)} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}$$

$$\text{En contraintes principales: } J_2 = \frac{1}{6} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right)$$

Dans le cas de la loi non associée ($f \neq g$), le potentiel plastique g s'écrit:

$$g(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - \beta I_1 + \text{cte} = 0 = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}} - \beta \text{tr}(\sigma) + \text{cte} = 0$$

Dans l'espace des contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, le critère de Drucker Prager est un cône d'axe la trisectrice et de plan déviatoire (π) ($\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$). Pour ($\alpha = 0$), le critère rejoint Von Mises et le cône se dégénère en un cylindre. Dans le cas des sols, la contrainte intermédiaire est souvent cachée ($\sigma_2 = \sigma_3$) en conditions triaxiales, il en résulte les expressions de la fonction de charges et du potentiel plastique en contraintes principales:

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sqrt{3}} - \alpha(\sigma_1 + 2\sigma_3) - k = 0 \\ g(\sigma_{ij}) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sqrt{3}} - \beta(\sigma_1 + 2\sigma_3) = 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Par identification des coefficients, on traduit les paramètres du modèle de Drucker Prager en fonction de ceux de Mohr- Coulomb dans l'hypothèse de sollicitations triaxiales ($\sigma_2 = \sigma_3$).

$$f(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sqrt{3}\alpha(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \sqrt{3}k = (1 - \sqrt{3}\alpha)\sigma_1 - (1 + 2\sqrt{3}\alpha)\sigma_3 - \sqrt{3}k = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{(1 + 2\sqrt{3}\alpha)}{(1 - \sqrt{3}\alpha)}\sigma_3 - \frac{\sqrt{3}k}{(1 - \sqrt{3}\alpha)} = 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = q = \frac{3\sqrt{3}\alpha}{(1 - \sqrt{3}\alpha)}\sigma_3 - \frac{\sqrt{3}k}{(1 - \sqrt{3}\alpha)} \quad (1.23)$$

Modèle de Mohr- Coulomb: $f(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\varphi - 2c\cos\varphi = 0$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\sigma_3 - \frac{2c\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = q = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\sigma_3 - \sigma_3 - \frac{2c\cos\varphi}{1 - \sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi}\sigma_3 - \frac{2c\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (1.24)$$

Par identification des coefficients des équations (1.23) et (1.24), il en résulte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3\sqrt{3}\alpha}{(1 - \sqrt{3}\alpha)} = \frac{2\sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \Rightarrow \alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} ; \\ \frac{\sqrt{3}k}{(1 - \sqrt{3}\alpha)} = \frac{2c\cos\varphi}{1 - \sin\varphi} \Rightarrow k = \frac{2c \times \cos\varphi(1 - \sqrt{3}\alpha)}{\sqrt{3}(1 - \sin\varphi)} = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} \end{array} \right.$$

De la même manière, on retrouve β à partir de l'expression du potentiel plastique ($\varphi \neq \psi$):

$$g(\sigma_{ij}) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sqrt{3}\beta(\sigma_1 + 2\sigma_3) = 0 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{3\sqrt{3}\beta}{(1 - \sqrt{3}\beta)}\sigma_3 \Rightarrow \beta = \frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}(3 - \sin\psi)}$$

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} ; \quad k = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin\varphi)} ; \quad \beta = \frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}(3 - \sin\psi)} \quad (1.25)$$

1.5.6.5 Critère anisotrope de Hill (1950)

Il s'agit d'une généralisation du critère de Von Mises correspondant à une anisotropie particulière qui conserve trois plans de symétrie dans l'état d'écroutissage du matériau. D'après (Hapthen et Salençon, 1987; Wielgosz, 1999), la fonction de charge du critère de Hill est donnée par l'expression générale suivante :

$$f = a_1(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + a_2(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_3(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2a_4\sigma_{12}^2 + 2a_5\sigma_{23}^2 + 2a_6\sigma_{13}^2 - k^2 \leq 0 \quad (1.26)$$

k : Paramètre mécanique identique à celui de Von Mises, les coefficients (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 et a_6) sont des paramètres scalaires réels qui caractérisent l'état d'écroutissage anisotrope. Ils se déterminent expérimentalement par des essais de caractérisation (traction et cisaillement simples). Le critère de Hill rejoint celui de Von Mises quand ($a_1 = a_2 = a_3 = 1/3$) et ($a_4 = a_5 = a_6 = 1$).

1.5.6.6 Critère de Matsuoka-Nakai (1974)

Il est dédié à l'étude du comportement des sables. Sa validation s'est basée sur de essais tridimensionnels (triaxiaux) effectués sur différents types de sables. Les angles de frottement

déterminés par des essais triaxiaux à partir des modèles Mohr-Coulomb et Matsuoka sont identiques (Hicher et Shao, 2002). La fonction de charges est donnée par:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{I_1 I_2}{I_3} - k = 0 \quad (1.27)$$

k : est un paramètre mécanique du modèle, (I_1, I_2, I_3) sont les invariants du tenseur de contraintes σ_{ij} .

1.5.7 Elastoplasticité avec écrouissage

L'écrouissage est l'évolution de la surface de charges en fonction du tenseur des contraintes et de l'évolution des déformations plastiques. Il se traduit généralement par l'adoucissement ou le durcissement du matériau ou bien leurs combinaisons (Cazenave, 2013). Il s'exprime par l'intermédiaire de variables internes (forces thermodynamiques) notés X et R . On distingue généralement l'écrouissage isotrope et anisotrope (cinématique).

1.5.7.1 Plasticité avec écrouissage isotrope

Il s'agit d'une expansion (gonflement) axisymétrique par rapport aux axes principaux de la surface de charge f . Il caractérise une évolution de la limite d'élasticité σ_c du matériau en considérant l'effet de la température négligeable. D'après (Lemaitre et Chaboche, 1988; François et al., 1999), cette évolution est gouvernée par une seule variable scalaire: soit le travail plastique dissipé W_p , soit la déformation plastique cumulée p . La Figure 1-17 indique schématiquement l'évolution du critère dans l'espace des contraintes et la courbe contrainte-déformation plastique.

La fonction de charges s'exprime sous la forme:

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}, \alpha) &= f_y(\sigma) - R(\alpha) = 0 ; \\ df &= f' = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \end{aligned} \quad (1.28)$$

$f_y(\sigma)$: Traduit la forme du critère de la limite d'élasticité et $R(\alpha)$ est' un scalaire qui prend en compte l'écrouissage isotrope par le biais de la force thermodynamique α , il s'exprime selon deux hypothèses:

a) Travail de déformation plastique

$$d\alpha = \alpha' = dW^{(p)} = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \Rightarrow \alpha = W^{(p)} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p \quad (1.29)$$

b) Incrément de déformation plastique

$$d\alpha = \alpha' = d\varepsilon^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p ; \alpha = \int_0^{\varepsilon_{ij}} d\varepsilon^{(p)} \quad (1.30)$$

Dans certaines analyses du comportement des matériaux, on introduit le principe de la contrainte et de la déformation équivalente de Von Mises, notés respectivement σ_{eq} et ε_{eq} . L'application de l'écrouissage isotrope au critère de Von Mises se définit par:

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_l = 0 \rightarrow \begin{cases} \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} S_{ij} S_{ij} = \sqrt{3J_2} \\ \sigma_l = \sigma_e + H \varepsilon_{eq}^p = \sigma_e + H \sqrt{\frac{2}{3}} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p \end{cases} \quad (1.31)$$

H est' un paramètre d'écrouissage.

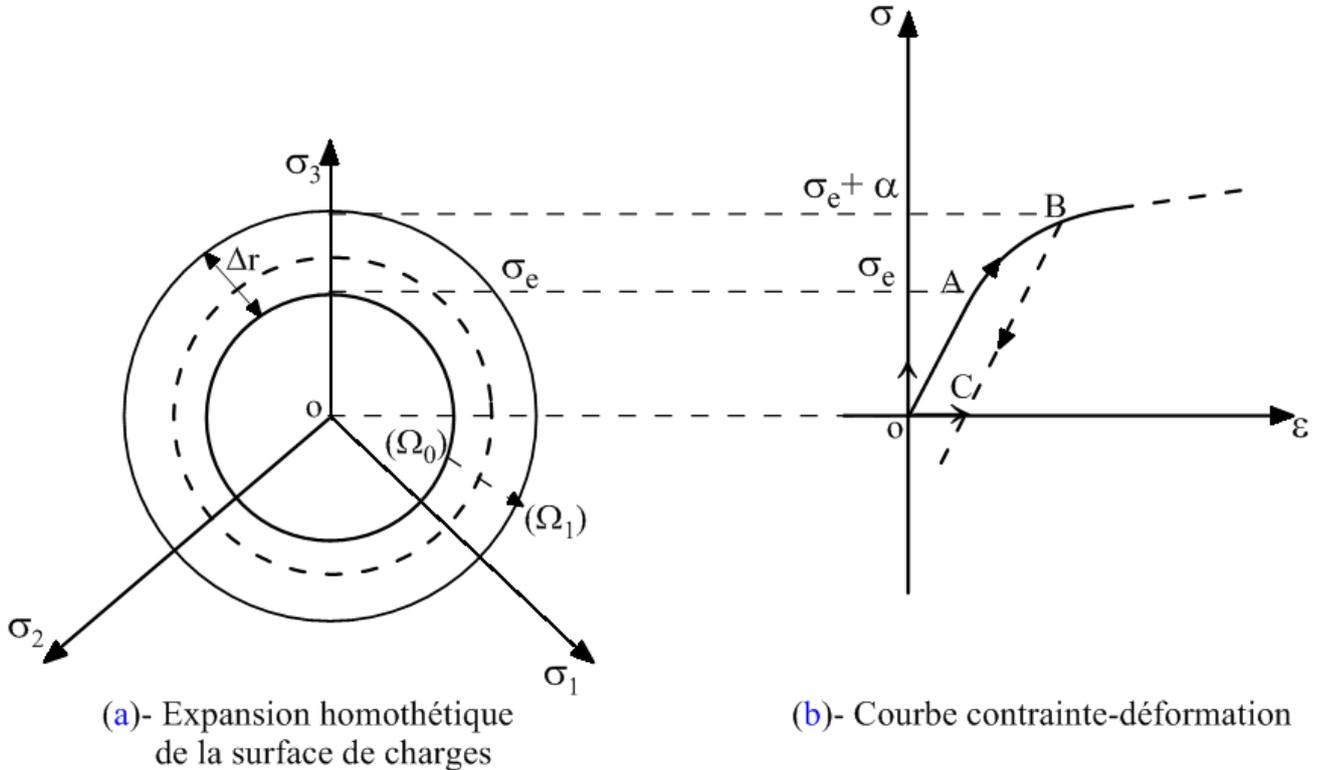


Figure 1-17- Représentation graphique de l'écrouissage isotrope.

1.5.7.2 Plasticité avec écrouissage cinématique (loi de Prager)

L'écrouissage cinématique est caractérisé par une amplitude constante du domaine élastique (fonction de charges) qui se déplace par translation de la surface de charges dans l'espace des contraintes. Cette loi (Figure 1-18) introduit partiellement l'effet Bauschinger ainsi que l'anisotropie du matériau, produite par des déformations plastiques.

L'écrouissage cinématique introduit une variable tensorielle X qui indique la position actuelle de la surface de charges (Lemaitre et Chaboche, 1988; Hapthen et Salençon, 1987):

$$f(\sigma_{ij}, X_{ij}) = f_y(\sigma - X) - k = 0 \quad (1.32)$$

Dans le cas d'un écrouissage cinématique linéaire de paramètre α, généralement observé dans les essais cycliques, tenant compte de la loi de normalité, la variable d'écrouissage X est donnée par:

$$dX = c_0 d\alpha ; \quad d\alpha = -\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial X} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} = d\varepsilon^p \quad (1.33)$$

La loi d'écrouissage cinématique de Prager utilise le formalisme: $dX = c_0 d\varepsilon^p$, il en résulte :

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial X} dX = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma - c_0 \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\varepsilon^p \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : d\sigma - c_0 \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda = 0$$

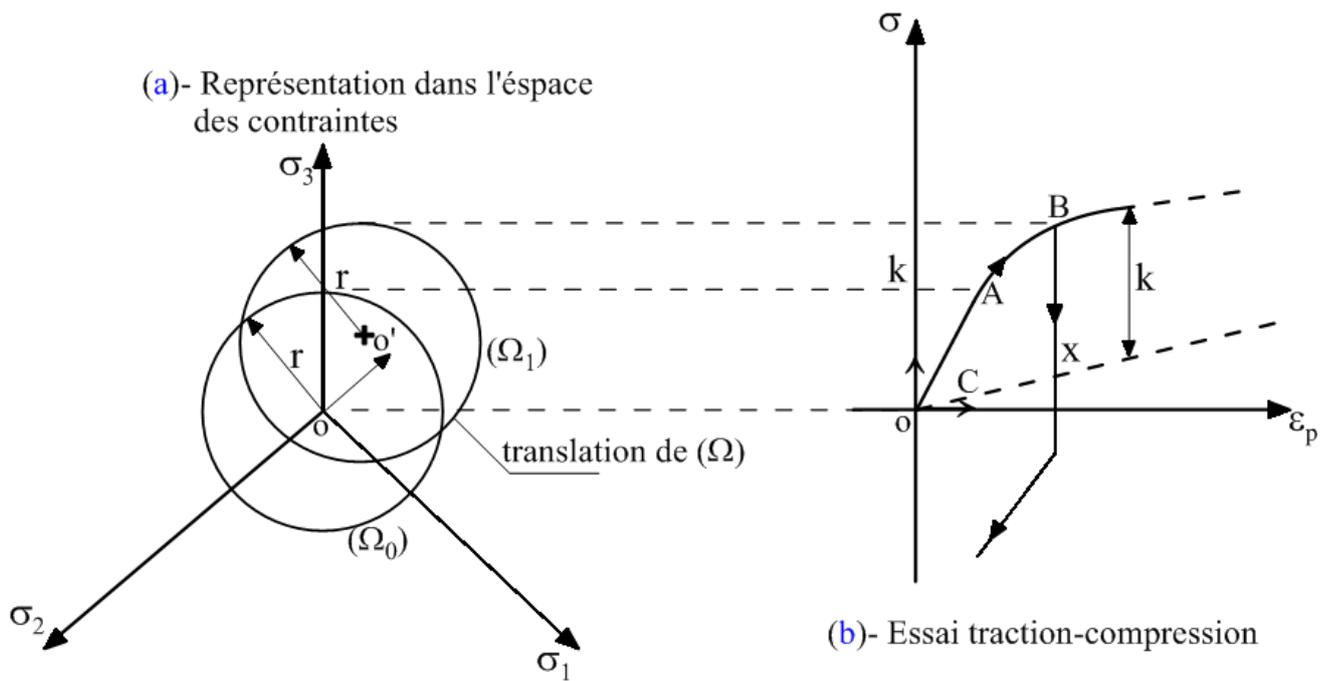


Figure 1-18- Ecrouissage cinématique

Le multiplicateur plastique est donné par:

$$\lambda' = d\lambda = \frac{H(f)}{c_0} \frac{\left\langle \frac{\partial f}{\partial \sigma} : df \right\rangle}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} : \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (1.34)$$

$H(f)$ est la fonction d'Heaviside: $H(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 1 & \text{si } f = 0 \end{cases} \quad (1.35)$

a) Cas du critère de Von Mises

L'application de la loi d'écrouissage cinématique pour le critère de plasticité de Von Mises s'écrit en introduisant le second invariant du tenseur déviatorique, il est donné par la formulation suivante:

$$f = \frac{3}{2}(s_{ij} - X_{ij})(s_{ij} - X_{ij}) - k^2 = 0 \rightarrow f = \frac{3}{2}(s - X) : (s - X) - \sigma_0^2 = 0 \quad (1.36)$$

Le tenseur X est utilisé pour représenter les déformations plastiques (Wielgosz, 1999), il suit la loi suivante:

$$dX = \frac{H(\sigma - X)}{\sigma_{eq}} d\epsilon_{eq}^p ; H \text{ est un paramètre d'écrouissage du matériau.}$$

L'écrouissage cinématique renferme beaucoup de difficultés pour son introduction dans les codes de calculs numériques. Les modèles prenant en compte l'écrouissage cinématique sont utilisés en général pour résoudre les problèmes de plasticité cyclique. Il est très coûteux à effectuer avec les codes d'EF classiques et pour lesquels on essaie de trouver des méthodes simplifiées de calcul.

Exercice 1 d'application

Un matériau raide obéit au critère élastoplastique de Von-Mises de fonction de charges $f(\sigma_{ij})$:

$$f(\sigma_{ij}) = 2J_2 - k^2 = s_{ij}s_{ij} - k^2 = 0 ; s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} ; k: \text{ paramètre mécanique.}$$

Sachant que ce critère est très utilisé pour la vérification des éléments de charpente métallique, démontrer que ce critère se traduit par la relation suivante dans le cas d'un état de contraintes planes et déduire ensuite l'expression du critère dans le cas d'une poutre soumise à la flexion simple en donnant un exemple.

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sigma_e$$

Solution

a) En **contraintes planes**, les tenseurs de contraintes et de déformations sont donnés par:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Par simplicité dans le développement des écritures indicielles, on utilise les indices chiffrés 1, 2 et 3 en remplacement de x, y et z. On applique la règle d'Einstein relative à la sommation sur les indices muets (répétés deux fois) dans les monômes.

$$2J_2 = \underline{s} : \underline{s} = s_{ij}s_{ij} = (\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij}) = (\sigma_{ij})^2 - 2\sigma_m \sigma_{ij}\delta_{ij} + \sigma_m^2 (\delta_{ij})^2$$

$$\sigma_m = \text{Tr}(\sigma) / 3 = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3 ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0 ; \delta_{ij}: \text{ tenseur de Kroncker}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} \rightarrow I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma_{ij})^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{1j}\sigma_{1j} + \sigma_{2j}\sigma_{2j} + \sigma_{3j}\sigma_{3j} = (\sigma_{11}\sigma_{11} + \sigma_{12}\sigma_{12} + \sigma_{13}\sigma_{13}) + (\sigma_{21}\sigma_{21} + \sigma_{22}\sigma_{22} + \sigma_{23}\sigma_{23}) + (\sigma_{31}\sigma_{31} + \sigma_{32}\sigma_{32} + \sigma_{33}\sigma_{33})$$

$$(\sigma_{ij})^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{1j}\sigma_{1j} + \sigma_{2j}\sigma_{2j} + \sigma_{3j}\sigma_{3j} = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) + (\sigma_{12}^2 + \sigma_{22}^2) = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2$$

$$\boxed{(\sigma_{ij})^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2}$$

$$\sigma_{ij}\delta_{ij} = \sigma_{1j}\delta_{1j} + \sigma_{2j}\delta_{2j} + \sigma_{3j}\delta_{3j} = \sigma_{11}\delta_{11} + \sigma_{22}\delta_{22} + \sigma_{33}\delta_{33} = (\sigma_{11} \times 1) + (\sigma_{22} \times 1) + (\sigma_{33} \times 0) = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

$$\Rightarrow \sigma_m \sigma_{ij}\delta_{ij} = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22})^2$$

$$(\delta_{ij})^2 = \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = (\delta_{11}\delta_{11} + \delta_{12}\delta_{12} + \delta_{13}\delta_{13}) + (\delta_{21}\delta_{21} + \delta_{22}\delta_{22} + \delta_{23}\delta_{23}) + (\delta_{31}\delta_{31} + \delta_{32}\delta_{32} + \delta_{33}\delta_{33})$$

$$\boxed{(\delta_{ij})^2 = (\delta_{11}^2 + \delta_{22}^2 + \delta_{33}^2) = 3} ; \rightarrow \sigma_m^2 (\delta_{ij})^2 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{3^2} \times 3 = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{3}$$

On remplace l'expression des monômes dans la fonction de charges, il en résulte:

$$f(\sigma_{ij}) = 2J_2 - k^2 = (\sigma_{ij})^2 - 2\sigma_m \sigma_{ij}\delta_{ij} + \sigma_m^2 (\delta_{ij})^2 - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{12}^2) - \frac{2}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2}{3} - k^2 = 0$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{(3\sigma_{11}^2 + 3\sigma_{22}^2 + 6\sigma_{12}^2) - (2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + 4\sigma_{11}\sigma_{22}) + (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22})}{3} - k^2$$

$$= \frac{2\sigma_{11}^2 + 2\sigma_{22}^2 + 6\sigma_{12}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22}}{3} - k^2 = \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) - k^2 = 0$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) - k^2 = 0$$

Pour l'identification du paramètre mécanique k , on se ramène à une sollicitation uniaxiale jusqu'à la limite d'écoulement (élasticité σ_e):

$$\sigma_{11} = \sigma_e ; \sigma_{22} = 0 ; \sigma_{12} = 0 ;$$

$$f = \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2) - k^2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}(\sigma_e^2) - k^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\sigma_e| \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|\sigma_e|$$

Il en résulte que:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) - \frac{2}{3}(\sigma_e)^2 = 0$$

$$\Rightarrow f(\sigma_{ij}) = (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) = (\sigma_e)^2$$

$$\sqrt{(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})} = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + 3\tau_{xy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy})} = |\sigma_e|$$

b) Cas d'une poutre en flexion simple:

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{M_z(x)}{I_{zz}} y^{\max} = \pm \frac{M_z(x)}{w_{zz}} \neq 0 ; T_z = \frac{\partial M_z}{\partial x} \neq 0 ; \tau_{xy} = \frac{T_z}{A} ; \sigma_{yy} = 0$$

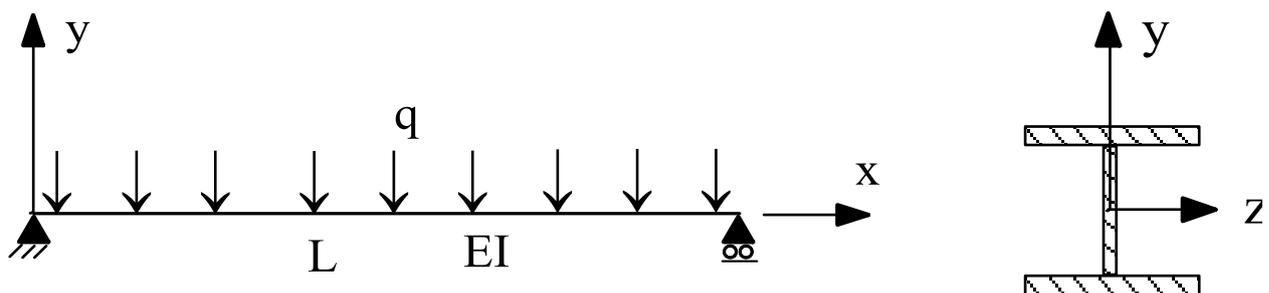


Figure 1-19- Application du critère de plasticité de Von Mises à la flexion d'une poutre.

$$\Rightarrow \text{Le critère se traduit par l'expression: } \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} = |\sigma_e|$$

Dans le cas d'une poutre console, les contraintes maximales de flexion et de cisaillement sollicitent un même point (A), d'où la pertinence d'application du critère de résistance de Von-Mises.

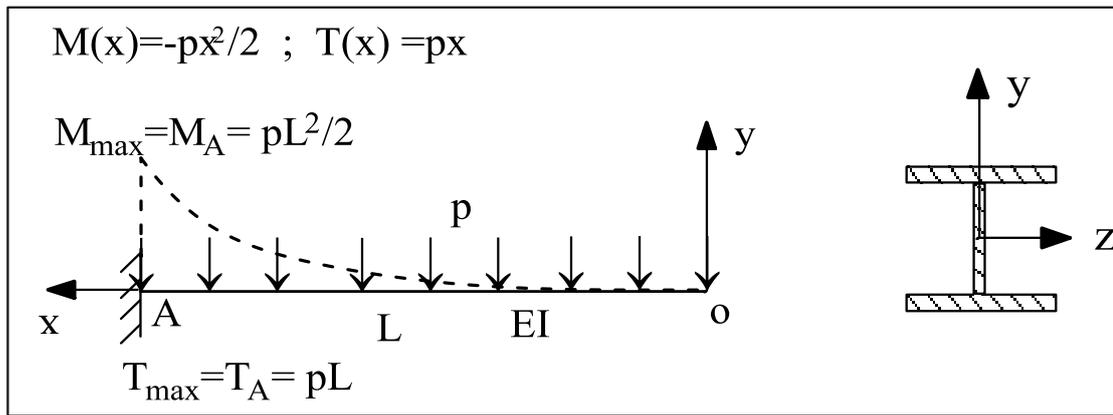


Figure 1-20- Cas d'une poutre console chargée uniformément.

Calcul de la charge limite p (on suppose que le déversement est négligeable):

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{M_z^{\max}}{I_{zz}} y^{\max} \pm \frac{M_z^{\max}}{I_{zz}/y^{\max}} = \pm \frac{M_z^{\max}}{w_{zz}} = \frac{pL^2}{2} \frac{1}{w_{zz}} \Rightarrow \sigma_{xx}^2 = \frac{p^2 L^4}{4} \frac{1}{(w_{zz})^2} ;$$

$$T_z^{\max} = pL ; \tau_{xy} = \frac{pL}{A} \Rightarrow \tau_{xy}^2 = \frac{p^2 L^2}{A^2} ;$$

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq |\sigma_e| \Rightarrow \sigma_{xx}^2 + 3\tau_{xy}^2 \leq \sigma_e^2$$

$$\frac{p^2 L^4}{4} \frac{1}{(w_{zz})^2} + 3 \frac{p^2 L^2}{A^2} = p^2 L^2 \left(\frac{L^2}{4(w_{zz})^2} + \frac{3}{A^2} \right) \leq \sigma_e^2 \Rightarrow p \leq \frac{\sigma_e}{L \sqrt{\frac{L^2}{4w_{zz}^2} + \frac{3}{A^2}}}$$

Condition de flèche (ELS): $f \leq \bar{f} \Rightarrow \frac{pL^4}{8EI_{zz}} \leq \bar{f}$

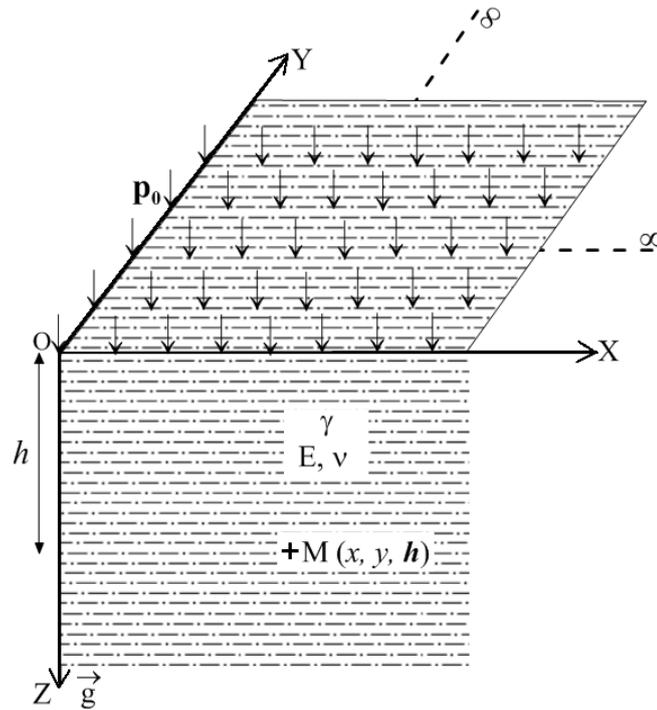
Problème

On s'intéresse au comportement élastoplastique d'un massif de sol semi infini à surface horizontale (TN) libre. La loi de comportement élastique isotrope est définie par les paramètres mécaniques (E, ν) . La loi plastique est définie à partir du critère de Mohr- Coulomb caractérisé par les paramètres de cisaillement (c, ϕ) . On suppose que le milieu est soumis uniquement à l'état de contrainte géostatique de poids volumique γ . (NB: En MDS, l'axe \bar{oz} est orienté dans le sens de la gravitation).

a)- En comportement élastique linéaire (EL) : déterminer les expressions des tenseurs de contraintes et de déformation s'exerçant au point M situé à une profondeur h /TN. Déduire alors la contrainte de cisaillement maximale τ_{max} et la profondeur h_r à partir de laquelle le sol se fissure:

$$(\gamma = 20\text{kN/m}^3, \nu = 0.33, \bar{\tau} = 3\text{bars})$$

b)- Au delà du comportement EL, le matériau rentre en plasticité parfaite sans écrouissage, Déterminer alors la profondeur limite h_r au delà de laquelle le sol se fissure ($c = 20\text{kPa}, \phi = 25^\circ$).



Corrigé abrégé

a) Tenseurs de contraintes et de déformations σ et ε

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \end{cases} ; \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} = 0 ; \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial x} + \gamma = 0$$

Il en résulte que: $\sigma_{xx} = k_1 \in \mathfrak{R}$, $\sigma_{yy} = k_2 \in \mathfrak{R}$ et $\sigma_{zz} = -\gamma h$: en MDS $\rightarrow \sigma_{zz} = |-\gamma h| = \gamma h$

Le problème se résume à l'étude en déformations planes ($\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda\varepsilon_{zz} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} = \lambda\varepsilon_{zz} = \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{zz} \end{cases} \rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = \sigma_{yy}}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk} \times 1 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}(2\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) = 0 \Rightarrow \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu}\gamma h$$

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0 ; \varepsilon_{zz} = \frac{\Delta h}{h} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \times \gamma h = \frac{\gamma h}{E_{\text{oed}}} ; E_{\text{oed}} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\text{Tenseurs de contraintes et déformations : } \sigma = \begin{pmatrix} \frac{\nu}{1-\nu}\gamma h & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu}{1-\nu}\gamma h & 0 \\ 0 & 0 & \gamma h \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma h}{E_{oed}} \end{pmatrix}$$

Profondeur de rupture du sol: $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$, $\nu = 0.33$, $\bar{\tau} = 3 \text{ bars} = 300 \text{ kPa}$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{xx}}{2} = \frac{\gamma h}{2} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \leq \bar{\tau} \rightarrow h_r \leq \frac{2\bar{\tau}}{\gamma} \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} \right) = 59 \text{ m}$$

La profondeur de rupture dans le domaine élastique est de 59m par rapport à la cote du terrain naturel.

b) Y'aura-t-il rupture du sol dans l'hypothèse d'un comportement plastique du massif de sol ?

Fonction de charges (Critère de Mohr- Coulomb) :

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - 2c \cos \varphi \rightarrow \sigma_1 = \sigma_{zz} = \gamma h, \quad \sigma_3 = \sigma_{xx} = \frac{\nu}{1-\nu} \gamma h = \frac{\gamma h}{2}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \gamma h - \frac{\gamma h}{2} - \left(\gamma h + \frac{\gamma h}{2} \right) \sin \varphi - 2c \cos \varphi = \frac{\gamma h}{2} - \frac{\gamma h}{2} \times 3 \sin \varphi - 2c \cos \varphi$$

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{\gamma h}{2} (1 - 3 \sin \varphi) - 2c \cos \varphi = -(2.67h + 36.25) < 0 \quad (\text{kPa})$$

$$\boxed{f(\sigma_{ij}) = -(2.67h + 36.25) < 0 \Rightarrow \text{Pas de rupture du sol !}}$$

2 Chapitre 2

Calcul élastoplastique des structures (Barres et poutres)

2.1 Introduction

L'objectif de cette partie est d'appréhender le **comportement des structures** au **delà de leurs limites élastiques**. Le dépassement du seuil d'élasticité d'un élément constitutif d'un ouvrage monolithique engendre des **déplacements et des contraintes résiduelles** (Cardou, 2006; Mimoune et al., 2015), d'où un transfert de charge vers d'autres éléments juxtaposés (**adaptation plastique**). Les structures en treillis (métalliques) et les portiques (poteaux poutres) sont souvent soumis à ce genre de comportement élastoplastique. Pour appréhender ce genre de problèmes, nous utiliserons l'hypothèse **des petites déformations** en phase élastique en tenant compte de la plasticité des éléments barres (avec ou sans écrouissage). Par ailleurs, la plasticité permet d'évaluer avec sûreté l'état limite ultime d'une construction, au sens de la méthode semi-probabiliste de la sécurité (Frey, 1994).

On s'intéresse dans ce qui suit à l'analyse de **l'évolution élastoplastique du chargement** des structures en **barres et des poutres** avec calcul des charges limites élastique et plastique (F_{el} ; F_{pl}), des **déplacements plastiques** u_{pl} (résiduels), **moments plastiques (limites)** M_{pl} et l'établissement de lois **moment-courbure**.

2.2 Hypothèses et compatibilité des déformations

Dans le cas de l'étude des structures en treillis hyperstatique, on fait souvent recours au principe de compatibilité des déplacements pour la résolution des inconnues surabondants. Dans le cas des systèmes hyperstatiques relativement simples (Figure 2-1), les relations de compatibilité des déformations se traduisent par des relations simples et utiles pour la détermination des efforts internes dans les barres (Wielgosz, 1999). En outre, l'application du théorème du potentiel minimum permet également la détermination des efforts internes.

Dans le cas d'une évolution élastoplastique ($0 \leq F \leq F_{pl}$) d'un élément de structure, l'amorce de la plasticité s'effectue dès que la limite d'élasticité σ_e (écoulement plastique) est atteinte. Ce phénomène se traduit par des **déformations permanentes théoriquement indéfinies**, mais **limitées en pratique à certaines valeurs**.

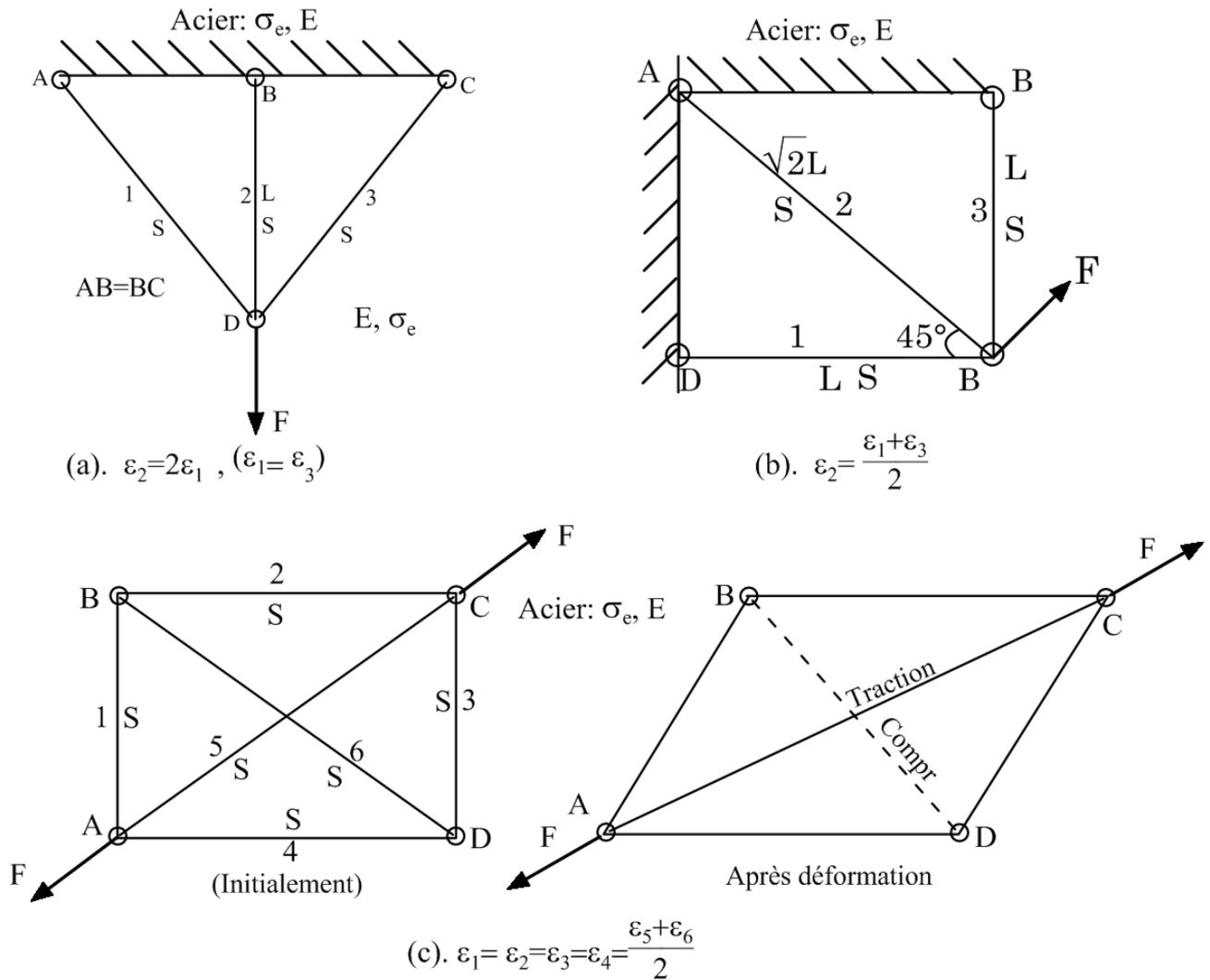


Figure 2-1- Exemples de compatibilité des déformations dans les treillis métalliques.

2.3 Traction élastoplastique

On s'intéresse à l'étude des structures en treillis, soumises uniquement aux efforts de traction-compression. On **néglige** dans ce qui suit les **effets d'instabilité** des pièces soumises à la **compression critique** (flambement).

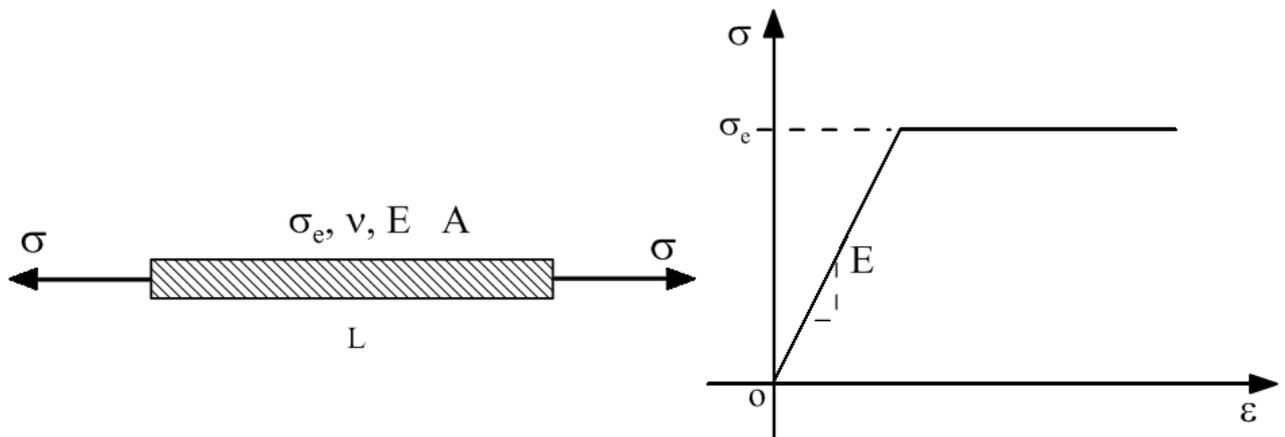


Figure 2-2- Traction élastoplastique sur un élément homogène.

2.3.1 Plasticité d'un d'élément homogène

On soumet une pièce à une traction évolutive N suivant la courbe de comportement (Figure 2-2). On remarque que la charge limite élastique N_e est équivalente à celle plastique N_{pl} .

$$N_e = \sigma_e A \equiv N_{pl} \quad (EL \approx \text{Plasticité})$$

2.3.2 Plasticité d'un élément composé

Les éléments constitués de plusieurs matériaux de seuils d'élasticité (σ_{ei}) différents subissent un comportement différentiel (Frey, 1994). Le principe de conservation des sections planes de Navier Bernoulli (avant et après déformation) demeure valable, cela se décline par la relation (2.1):

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n \quad (2.1)$$

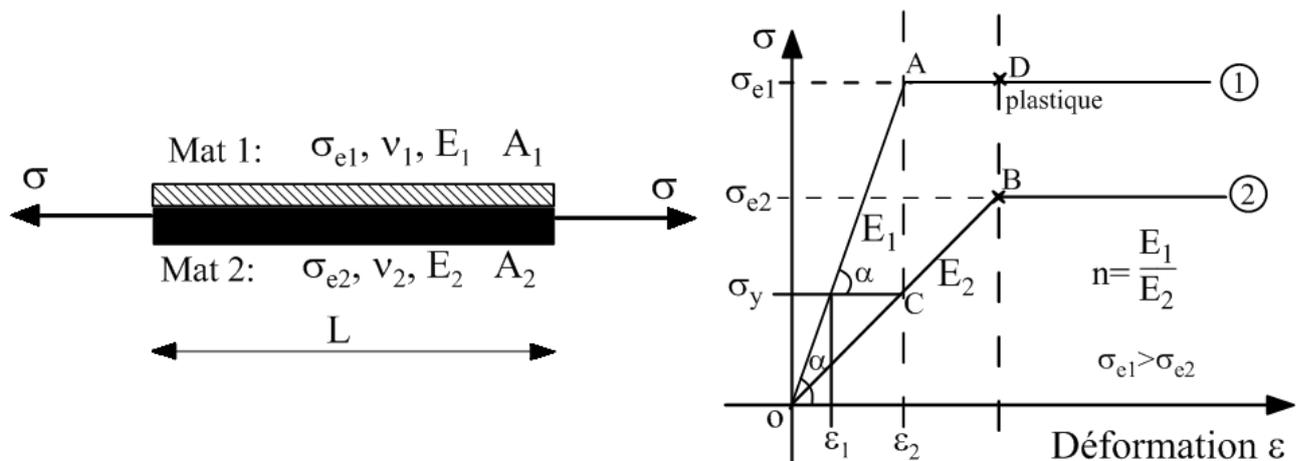


Figure 2-3 - Traction élastoplastique parfaite dans le cas d'un élément composé.

Soient deux (2) éléments composés de **matériaux différents** (Figure 2-3), soumis à la traction jusqu'à plastification totale. On suppose un comportement élastoplastique parfait.

$$\text{Matériau 1: } \left\{ \begin{array}{l} E_1, \sigma_{e1}, \nu_1 \\ A_1 \text{ et } L \end{array} \right. ; \text{ Matériau 2: } \left\{ \begin{array}{l} E_2, \sigma_{e2}, \nu_2 \\ A_2 \text{ et } L \end{array} \right. ; \left. \begin{array}{l} E_1 > E_2 \\ \sigma_{e1} > \sigma_{e2} \end{array} \right\} \rightarrow n = \frac{E_1}{E_2} > 1$$

n est un coefficient d'équivalence entre les deux matériaux.

a) En comportement élastique linéaire

$$\text{Compatibilité des déformations} \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

D'après la courbe ($\sigma = f(\varepsilon)$), on remarque que barre 1 se plastifie la première. Il en résulte l'état de contraintes suivant:

$$\left| \begin{array}{l} N_1 = \sigma_{e1} A_1 \\ N_2 = \sigma_y A_2 \end{array} \right. \Rightarrow N_e = N_1 + N_2 = \sigma_{e1} A_1 + \sigma_y A_2 \quad : \text{ charge élastique}$$

$$N_e = \sigma_{e1} A_1 + \sigma_y A_2 \quad (2.2)$$

$$\text{Tan} \alpha = E_1 = \frac{\overline{AC}}{\Delta \varepsilon} = \frac{\sigma_{e1} - \sigma_y}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \frac{\sigma_{e1} - \sigma_y}{\frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\sigma_y}{E_1}} \Rightarrow \sigma_{e1} - \sigma_y = E_1 \left(\frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\sigma_y}{E_1} \right) = \cancel{E_1} \sigma_y \frac{E_1 - E_2}{\cancel{E_1} E_2}$$

$$\sigma_{e1} = \sigma_y + \frac{\sigma_y(E_1 - E_2)}{E_2} = \sigma_y \frac{E_1}{E_2} = n\sigma_y \Rightarrow \sigma_y = \frac{\sigma_{e1}}{n}$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{e1}}{n} \tag{2.3}$$

Remplaçons dans l'équation (2.2): $N_e = \sigma_{e1} \left(A_1 + \frac{A_2}{n} \right) = \sigma_{e1} \tilde{A}$ (2.4)

b. En comportement plastique parfait

En comportement plastique parfait, les deux (2) barres atteignent leurs limites d'écoulement (points B et D). Après déchargement, l'élément1 subi des déformations plastiques irréversibles (trajet \overline{DCE}), par contre l'élément2 fera un retour élastique sur le chemin initial \overline{OB} (Figure 2-4-b).

Après plastification complète de l'élément composé, le diagramme ($N=f(u)$) présente trois branches (tri-linéaire) à cause de la perte de linéarité matérielle.

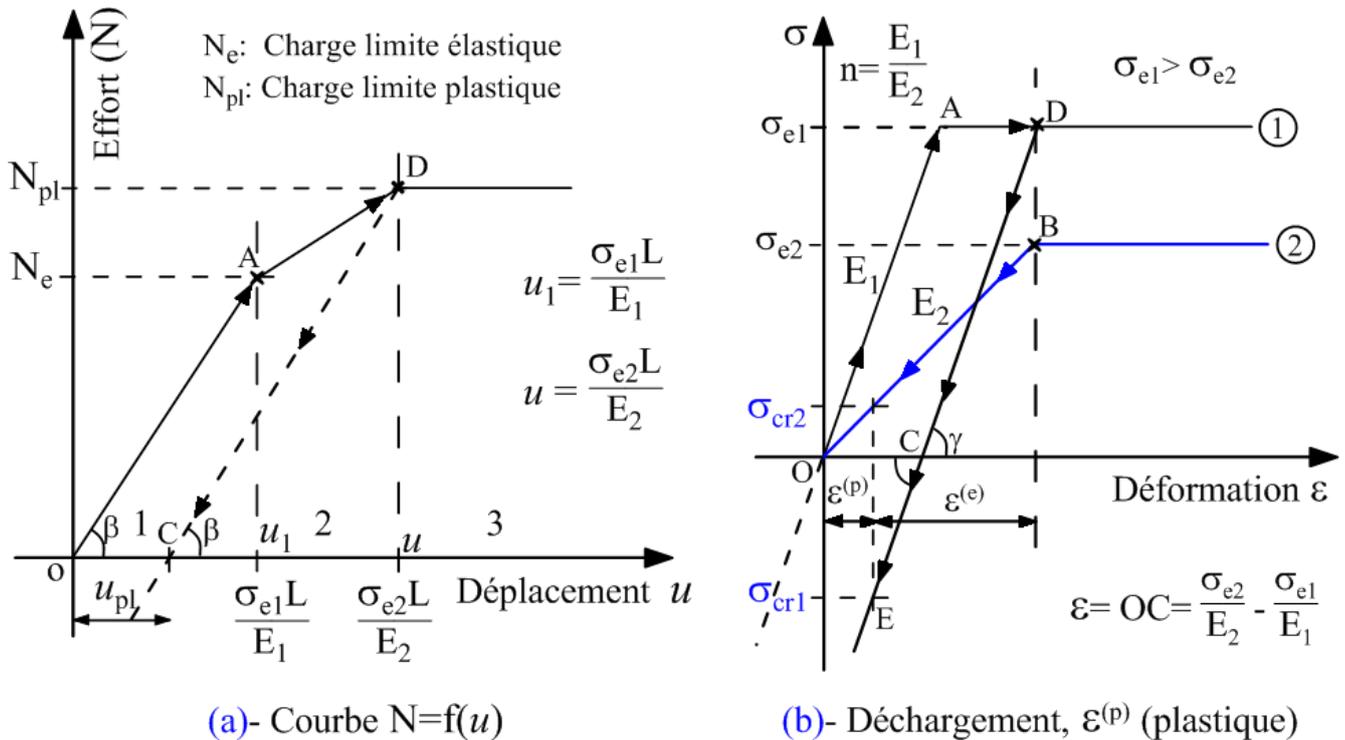


Figure 2-4- Evolution élastoplastique de l'effort normal N et de la déformation plastique.

La charge plastique est donnée par la relation suivante:

$$N_{pl} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ei} A_i \Rightarrow N_{pl} = \sigma_{e1} A_1 + \sigma_{e2} A_2 \tag{2.5}$$

D'après la courbe ($N=f(u)$) de la Figure 2-4-a, le déplacement plastique (résiduel) est donné par:

$$\tan(\beta) = \frac{N_e}{u_1} = \frac{N_{pl}}{u - u_{pl}} \Rightarrow u_{pl} = u - \frac{N_{pl}}{N_e} u_1 = u - u_{el} \rightarrow u_{pl} = u - u_{el} \tag{2.6}$$

$\varepsilon = \varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(p)} \Rightarrow \varepsilon^{(p)} = \varepsilon - \varepsilon^{(e)}$; $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u}{L} \Rightarrow u = \varepsilon L$, remplaçons dans (2.5):

$$\varepsilon^{(p)} L = \frac{\sigma_{e2} L}{E_2} - \frac{N_{pl}}{\sigma_{e1} \tilde{A}} \frac{\sigma_{e1} L}{E_1} = L \left(\frac{\sigma_{e2}}{E_2} - \frac{N_{pl}}{\sigma_{e1} \tilde{A}} \frac{\sigma_{e1}}{E_2 n} \right) = \frac{L}{E_2} \left(\sigma_{e2} - \frac{N_{pl}}{\tilde{A}} \frac{1}{n} \right) \Rightarrow \frac{\sigma_{r2}}{E_2} L = \frac{L}{E_2} \left(\sigma_{e2} - \frac{N_{pl}}{\tilde{A}} \frac{1}{n} \right)$$

$$\sigma_{r2} = \sigma_{e2} - \frac{N_{pl}}{n \tilde{A}} \tag{2.7}$$

$$\text{Tan}(\gamma) = E_1 \frac{|\sigma_{r1}|}{\varepsilon - \varepsilon^{(p)}} = \frac{|\sigma_{r1}|}{\left(\frac{\sigma_{e2}}{E_2} - \frac{\sigma_{e1}}{E_1} \right) - \frac{\sigma_{r2}}{E_2}} = \frac{|\sigma_{r1}|}{\left(\frac{\sigma_{e2}}{E_2} - \frac{\sigma_{e1}}{E_1} \right) - \frac{1}{E_2} \left(\sigma_{e2} - \frac{N_{pl}}{n \tilde{A}} \right)} = \frac{|\sigma_{r1}|}{-\frac{\sigma_{e1}}{E_1} + \frac{N_{pl}}{E_2 n \tilde{A}}}$$

$$\Rightarrow |\sigma_{r1}| = E_1 \left(-\frac{\sigma_{e1}}{E_1} + \frac{N_{pl}}{E_2 n \tilde{A}} \right) = -\sigma_{e1} + \frac{N_{pl}}{\tilde{A}} \quad ; \quad \sigma_{r1} < 0 \text{ (compression) d'ou: } |\sigma_{r1}| = -\sigma_{r1}$$

$$\Rightarrow \sigma_{r1} = \sigma_{e1} - \frac{N_{pl}}{\tilde{A}} \tag{2.8}$$

La déformation plastique engendre des contraintes résiduelles de compression et de traction dans les matériaux (σ_{r1} ; σ_{r2}), ce qui confère un équilibre interne à l'élément (autocontrainte).

Condition d'équilibre interne (autocontrainte):

$$N = \iint_{(\Omega)} \sigma dA = \sum_{i=1}^n \sigma_{ri} A_i = \sigma_{r1} A_1 + \sigma_{r2} A_2 = 0 \tag{2.9}$$

2.3.2.1 Coefficient de sécurité vis à vis de la plasticité

Le coefficient de sécurité (F_s) entre la plasticité et l'élasticité est donné par la relation (2.10), il exprime le gain réalisé par la plastification de la section droite, il est variable selon les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs et de la géométrie de la structure.

$$F_s = \frac{N_{pl}}{N_{el}} \tag{2.10}$$

Exemple: Soit un élément composé de l'acier et de l'aluminium soumis à la traction jusqu'à plastification totale.

$$\sigma_e^{(Al)} = \sigma_e^{(Acier)} = \sigma_e \quad ; \quad E_a = 3E_{Al} \quad (n = 3) \quad ; \quad A_1 = A_2 = A$$

$$N_e = \sigma_{e1} \left(A_1 + \frac{A_2}{n} \right) = \sigma_e \left(A + \frac{A}{3} \right) = \frac{4\sigma_e A}{3}$$

$$N_{pl} = \sigma_{e1} A_1 + \sigma_{e2} A_2 = \sigma_e (A + A) = 2\sigma_e A$$

$$F_s = \frac{N_{pl}}{N_e} = \frac{2\sigma_e A}{4\sigma_e A / 3} = \frac{6}{4} = 1.5 \Rightarrow F_s = 1.5$$

Soit un gain de sécurité de 50% entre les calculs élastique et plastique.

2.3.3 Exercice1 d'application

Soit le treillis en acier de propriétés (σ_e, E) représenté sur la Figure 2-5. Calculer les efforts internes dans les barres ainsi que les charges limites élastique (F_{el}) et plastique (F_{pl}) .

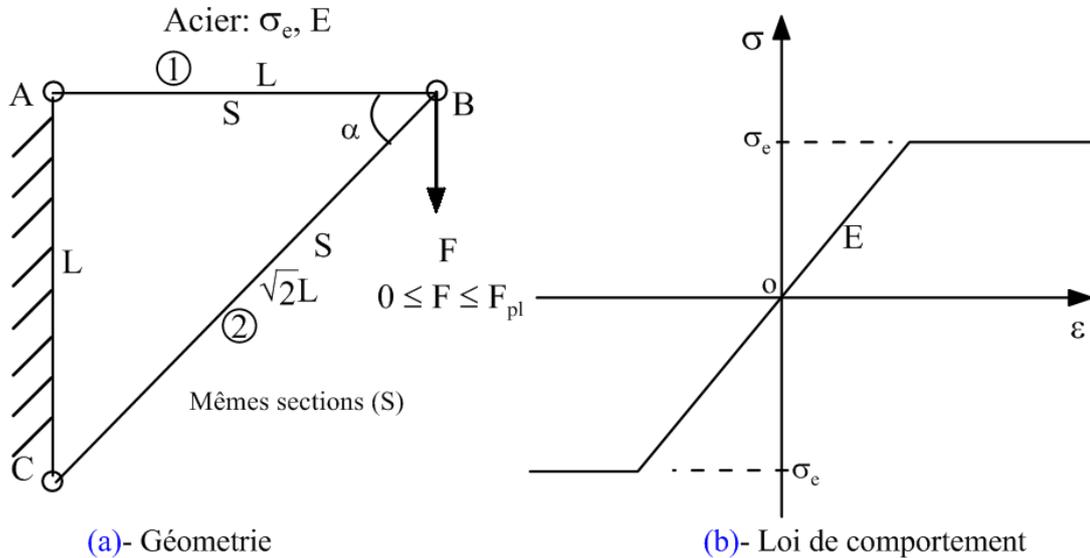


Figure 2-5- Evolution élastoplastique parfaite de la charge d'un treillis isostatique en acier.

Equilibre du nœud B:

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow N_2 \sin \alpha + F = 0 \Rightarrow N_2 = \frac{-F}{\sin \alpha} = -\sqrt{2}F \text{ (compression)}$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow N_2 \cos \alpha + N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = -N_2 \cos \alpha = -\frac{N_2 \sqrt{2}}{2}$$

$$N_1 = N_2 \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}F\sqrt{2}}{2} = F \text{ (traction)}$$

La première barre qui se plastifie est la n°2 car $(N_2 > N_1)$

$$N_2 = \sigma_e A = \sqrt{2}F \Rightarrow F_e = \frac{\sigma_e A}{\sqrt{2}} = 0.71\sigma_e A$$

La plastification de la barre 1 donne: $N_1 = \sigma_e A = F \Rightarrow F_{pl} = \sigma_e A$

$$F_{el} \leq F \leq F_{pl} \quad F_s = \frac{F_{pl}}{F_{el}} = 1.41$$

2.3.4 Exercice2 d'application

Soit le treillis hyperstatique soumis à un chargement élastoplastique évolutif (Figure 2-6), calculer les efforts internes, charges élastique et plastique ainsi que les déplacements élastique et plastique du point B $(\sigma_e = 235\text{MPa} ; E = 200 \text{ GPa}; S=2\text{cm}^2 ; L = 3\text{m})$

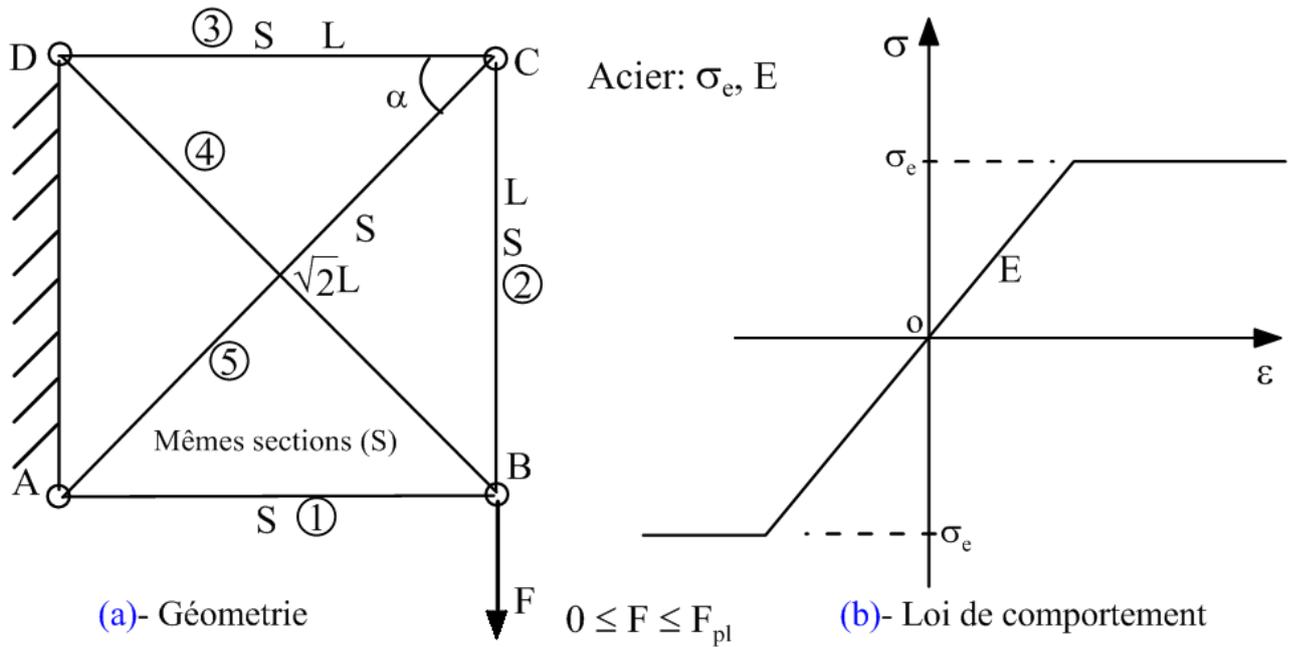


Figure 2-6- Evolution élastoplastique du chargement d'un treillis hyperstatique

1) Calcul des efforts internes N_i dans le treillis

Degrés d'hyperstaticité de la structure:

Nombre d'équation: $N_{eq} = 8$

Nombre d'inconnues: internes: ($n_i = 5$) ; externes: ($n_e = 4$) $\Rightarrow N = n_i + n_e = 9$

Nombre d'inconnues surabondants (degrés d'hyperstaticité): $H = N - N_{eq} = 1$

Le calcul des efforts internes nécessite l'application de la méthode énergétique ou celle de Castiglino:

a) Méthode énergétique (théorème de **Ménabréa**)

On supprime et on remplace la barre surabondante (BD) par l'inconnue hyperstatique N (Figure 2-7), on obtient deux systèmes réel (a) et virtuel (b).

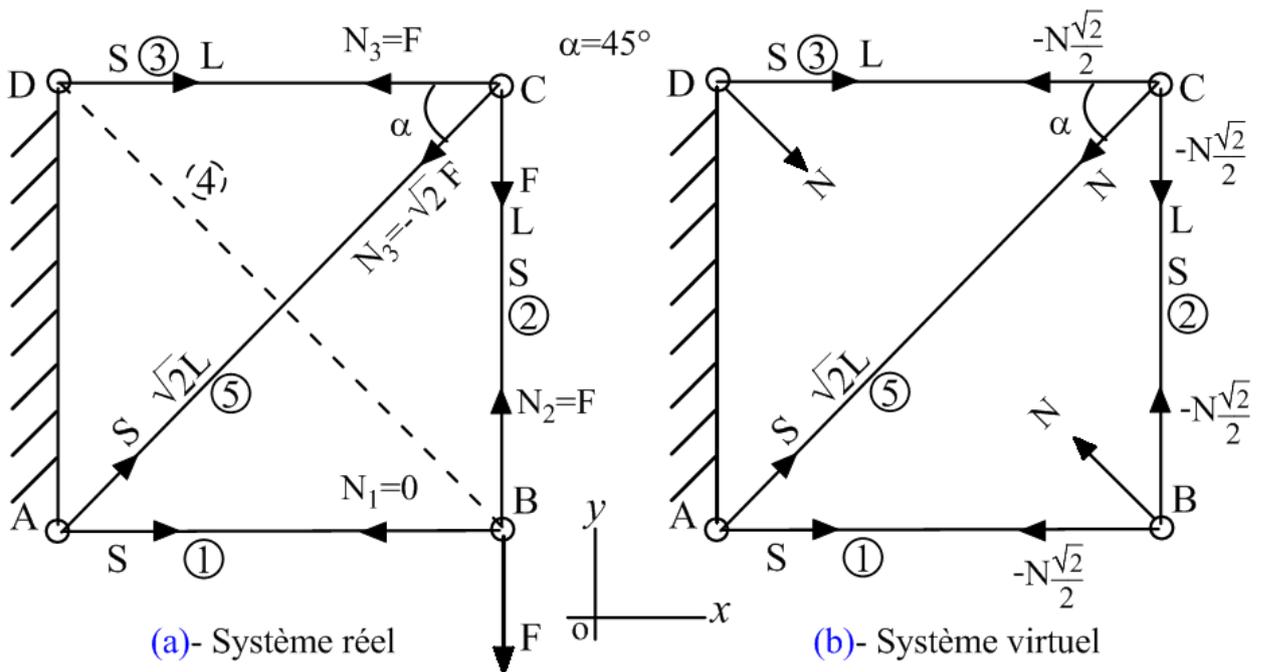


Figure 2-7- Système équivalent.

Equilibre du système (a)

$$\text{Noeud (B): } \sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 = 0 \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_2 - F = 0 \rightarrow N_2 = F \quad (\text{eq.1})$$

$$\text{Noeud (C): } \sum F_x = 0 \Rightarrow -N_3 - N_5 \sqrt{2}/2 = 0 \Rightarrow N_3 = -N_5 \sqrt{2}/2 \quad ; \quad (\text{eq.2})$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -N_5 \sqrt{2}/2 - F = 0 \Rightarrow N_5 = -\sqrt{2}F \quad (\text{eq.3})$$

L'étude de l'équilibre du système virtuel (b) aboutit aux efforts internes (Figure 2-7-b).

L'énergie de déformation interne (E_d) est donnée par:

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{(\Omega)} \frac{N^2}{ES} dx = \frac{1}{2ES} \sum_{i=1}^n N_i^2 L_i \quad (\text{eq.4})$$

$$= \frac{1}{2ES} \left[2 \left(F - N \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 L + \left(-\sqrt{2}F + N \right)^2 \sqrt{2}L + \left(-N \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 L + N^2 \sqrt{2}L \right] \quad (\text{eq.5})$$

La minimisation de cette énergie (théorème du potentiel minimum de Ménébréa) permet le calcul de l'inconnue hyperstatique (N):

$$\frac{\partial E_d}{\partial N} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial N} \left(\int_{(\Omega)} \frac{N^2}{ES} dx \right) = \frac{1}{2ES} \frac{\partial}{\partial N} \left(\sum_{i=1}^n N_i^2 L_i \right) = 0 \quad (\text{eq.6})$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2ES} \left[4 \left(F - N \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2 \left(-\sqrt{2}F + N \right) \sqrt{2} + 2 \left(-N \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2N \sqrt{2} \right] = 0$$

$$-2\sqrt{2}F + 2N - 4F + 2\sqrt{2}N + N + 2\sqrt{2}N = (3 + 4\sqrt{2})N - 2(2 + \sqrt{2})F = 0$$

$$\boxed{N = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{(3 + 4\sqrt{2})} F \approx 0.789F} \quad (\text{eq.7})$$

La superposition des effets entre les systèmes (a) et (b) aboutit aux efforts internes N_i dans l'ensemble des barres (Figure 2-7), il en résulte:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = -N \sqrt{2}/2 = -\frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{3 + 4\sqrt{2}} F \approx -0.557F \text{ (comp)} \\ N_2 = N_3 = F - N \sqrt{2}/2 = \frac{(1 + \sqrt{2})}{3 + 4\sqrt{2}} F \approx 0.442F \text{ (traction)} \\ N_4 = N + 0 = N = \frac{2(2 + \sqrt{2})}{3 + 4\sqrt{2}} F \approx 0.789F \text{ (traction)} \\ N_5 = N - \sqrt{2}F = -\frac{(4 + \sqrt{2})}{3 + 4\sqrt{2}} F \approx -0.625F \text{ (comp)} \end{array} \right. \quad (\text{eq.8})$$

b) Méthode **Castigliano** (travaux virtuels)

$$\delta = \int_{(\Omega)} \frac{N\bar{N}}{ES} dx = \frac{1}{ES} \sum_{i=1}^n N_i \bar{N}_i L_i = 0 \Rightarrow \bar{\delta}_{ij} N_j + \Delta_{ip} = 0 \rightarrow \{N_j\} = - \frac{\langle \Delta_{ip} \rangle}{[\bar{\delta}_{ij}]} \quad (\text{eq.9})$$

Il \exists une seule inconnue $\Rightarrow \bar{\delta}_{11} N + \Delta_{1p} = 0 \rightarrow N = - \frac{\Delta_{1p}}{\bar{\delta}_{11}} = N_4$

$$\bar{\delta}_{11} = 3 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) L + 2(1)^2 \sqrt{2} L = \frac{(3+4\sqrt{2})L}{2}$$

$$\Delta_{1p} = 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} F \right) L + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 \right) L + (-\sqrt{2} F \times 1) \sqrt{2} L + (0 \times 1) \sqrt{2} L = -(2 + \sqrt{2}) F$$

$$N = - \frac{\Delta_{1p}}{\bar{\delta}_{11}} = - \frac{-(2 + \sqrt{2}) F}{(3+4\sqrt{2})/2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} F \approx 0.789 F \Rightarrow \boxed{N_4 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} F \approx 0.789 F}$$

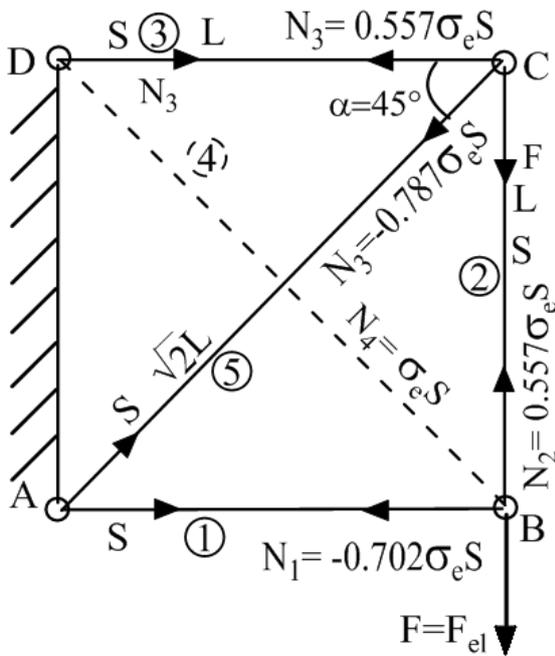
On retrouve les mêmes efforts internes que ceux de l'équation (eq.8).

2. Charge élastique et plastique de la structure

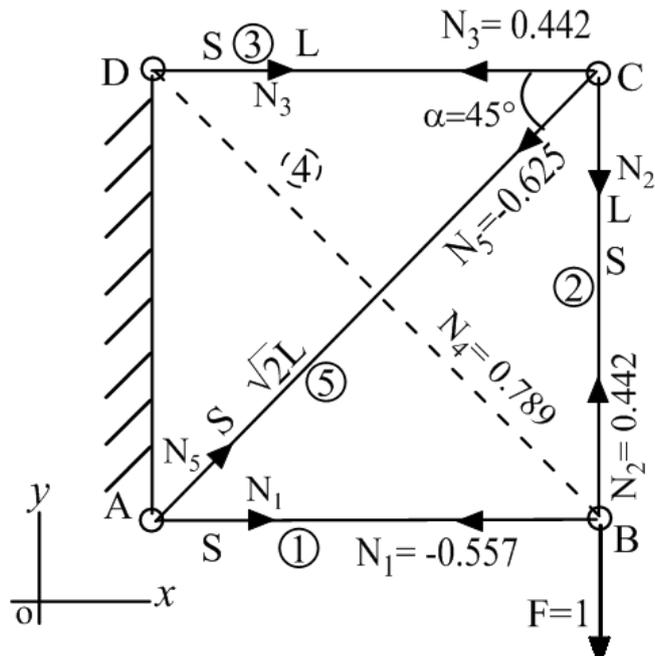
L'effort maximal, correspond au premier élément qui rentre en plasticité qui est la barre 4 d'où l'en déduit la charge élastique (F_{el}). A ce niveau de sollicitation, le déchargement du treillis se fera élastiquement sans déformations plastiques ($\epsilon_p=0$).

$$N_{\max} = \text{Max} \{ N_i ; i=1 \text{ à } 5 \} = N_4 = 0.789 F \Rightarrow N_4 = 0.789 F_{el} = \sigma_e S \rightarrow F_{el} = 1.26 \sigma_e S$$

$$\boxed{F_{el} = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} \sigma_e S = 1.26 \sigma_e S}$$



(a)- Efforts élastiques (N_i)



(b)- Efforts virtuels (\bar{N}_i) pour $F=1$

Figure 2-8- Efforts internes pour le calcul du déplacement élastique (méthode Castigliano)

Le déplacement du point B (v_1) sous l'effet de la charge élastique (F_{el}) est donné par méthode de Castigliano (Figure 2-8):

$$v_B = \int_{(\Omega)} \frac{N\bar{N}}{ES} dx = \frac{1}{ES} \sum_{i=1}^5 N_i \bar{N}_i L_i$$

$$v_B = \frac{\sigma_e S}{ES} \left[(0.557 \times 0.702)L + 2(0.442 \times 0.557)L + (0.625 \times 0.787)\sqrt{2}L + (0.789 \times 1)\sqrt{2}L \right]$$

$$v_B = v_1 = 2.69 \frac{\sigma_e L}{E} = 9.48 \text{mm}$$

Le treillis perd un (01) degré d'hyperstaticité, la redistribution des efforts internes entre les barres ayant un comportement élastique (adaptation plastique) permet la détermination de la charge (F_{pl}) juste au début de plastification de l'élément suivant. La Figure 2-9 montre le nouveau état d'équilibre.

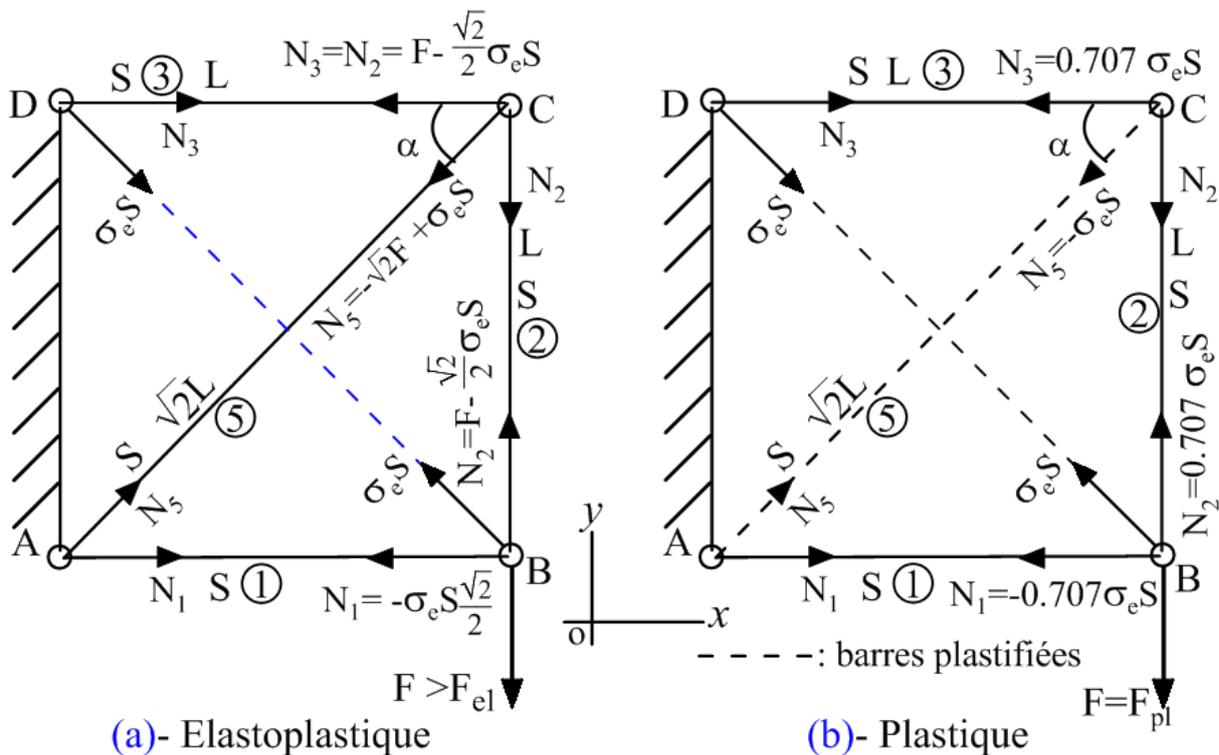


Figure 2-9- Redistribution des efforts internes (adaptation plastique) dans le treillis.

Equilibre élastoplastique du treillis (Figure 2-9-a)

$$F > F_{el} = 1.26\sigma_e S$$

$$\begin{aligned} \text{Noeud (B): } \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_1 - \sigma_e S \sqrt{2}/2 = 0 \Rightarrow N_1 = -\sqrt{2}/2 \sigma_e S ; \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow N_2 + \sigma_e S \sqrt{2}/2 - F = 0 \Rightarrow N_2 = F - \sqrt{2}/2 \sigma_e S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Noeud (C): } \sum F_y = 0 &\Rightarrow -N_5 \sqrt{2}/2 - N_2 = 0 \Rightarrow N_5 = -\sqrt{2} N_2 = -\sqrt{2} F + \sigma_e S ; \\ \sum F_x = 0 &\Rightarrow -N_3 - N_5 \sqrt{2}/2 = 0 \Rightarrow N_3 = -N_5 \sqrt{2}/2 = N_2 \end{aligned}$$

$$N_2 = N_3$$

On remarque que pour: $F > F_{el} = 1.26\sigma_e S$; $|N_5|$ est maximum c.à.d: $|N_5| > |N_2|$ et $|N_5| > |N_1|$

Il en résulte donc que la barre 5 (diagonale) atteint la plasticité avant les autres (Figure 2-9), ce qui correspond à la charge plastique (limite) F_{pl} du treillis.

$$N_5 = -\sqrt{2}F_{pl} + \sigma_e S = -\sigma_e S \Rightarrow F_{pl} = \sqrt{2}\sigma_e S \approx 1.41\sigma_e S \Rightarrow \boxed{F_{pl} = \sqrt{2}\sigma_e S \approx 1.41\sigma_e S}$$

Ecart entre le calcul élastique et plastique: $\rho = \frac{F_{pl}}{F_{el}} = 1.12 \rightarrow$ (soit $\approx 12\%$)

On constate que les barres qui se plastifient sont les deux diagonales (N°4 et 5).

Déplacement final du point B (Figure 2-10).

$$v_B = v = \int_{(\Omega)} \frac{N\bar{N}}{ES} dx = \frac{1}{ES} \sum_{i=1}^5 N_i \bar{N}_i L_i = 3.02 \frac{\sigma_e L}{E} \Rightarrow \boxed{v = 3.02 \frac{\sigma_e L}{E} = 10.64 \text{mm}}$$

D'après la Figure 2-10, le déplacement vertical plastique v_p du point B est donné par:

$$\frac{F_{el}}{v_1} = \frac{F_{pl}}{v - v_p} \Rightarrow \frac{F_{pl}}{F_{el}} = \frac{v - v_p}{v_1} = \rho \rightarrow v_p = v - \rho v_1 = v - v_e \quad \boxed{v_p = v - \rho v_1 = 0.02 \text{mm}}$$

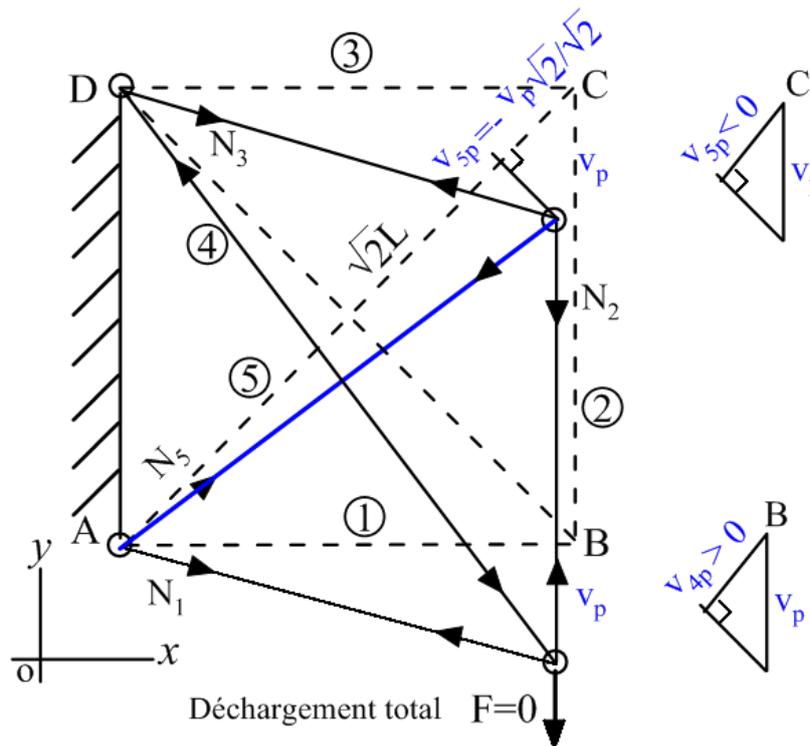


Figure 2-10- Vue du déplacement plastique du treillis après déchargement.

$$\epsilon_4^{(p)} = \frac{v_{p4}}{\sqrt{2}L} = \frac{-v_p \sqrt{2}/2}{\sqrt{2}L} = -\frac{v_p}{2L} = \frac{\sigma_{cr4}}{E} \Rightarrow \sigma_{cr4} = -\frac{v_p E}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{cr4} = -\frac{v_p E}{2L} = -0,67 \text{MPa} = -670 \text{kPa}}$$

Après déchargement total ($F = 0$), chaque nœud est en équilibre sous l'effet des contraintes résiduelles engendrées par la déformation plastique.

2.3.5 Exercice3 d'application

Un tirant d'ancrage est soumis à une évolution élastoplastique parfaite en traction puis déchargé progressivement (Figure 2-11). La résistance à la traction du coulis de ciment est négligeable ($\sigma_t = 0$)

1. Calculer les charges élastique (N_{el}) et plastique (N_{pl}) que pourra supporter le tirant, déduire le ratio de contribution de la plasticité dans la sécurité du tirant lorsque ($S_2 = 2S_1$).
2. Calculer les allongements élastique u_{el} et plastique u_{pl} (en déchargement).
3. Que se passera-t-il pour le coulis de ciment pendant la phase de l'écoulement plastique?

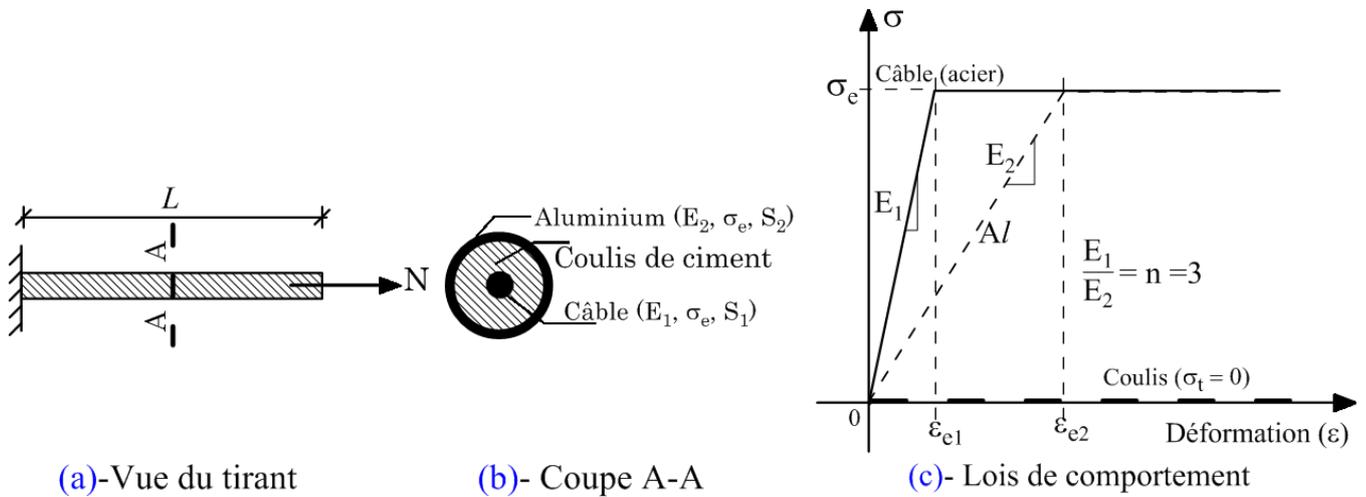


Figure 2-11- Câble de tirant d'ancrage soumis à une traction élastoplastique parfaite.

1. Calcul de N_{el} et N_{pl} et ratio de sécurité

$N = N_1(\text{acier}) + N_2(\text{Al})$ et compatibilité des déformations: $\epsilon_1(\text{acier}) = \epsilon_2(\text{Al})$

$\Rightarrow N = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2$, le premier matériau qui rentrera en plasticité est le câble (acier)

$\Rightarrow N = \sigma_e S_1 + \sigma_y S_2 = N_{el} \rightarrow$ (voir Figure 2-12)

D'après figure-2.7: $\sigma_e = E_1 \epsilon_{e1} \Rightarrow \epsilon_{e1} = \frac{\sigma_e}{E_1}$, $\tan\beta = E_2 = \frac{\sigma_y}{\epsilon_{e1}} \Rightarrow \sigma_y = E_2 \epsilon_{e1} = E_2 \frac{\sigma_e}{E_1} = \frac{\sigma_e}{\frac{E_1}{E_2}} = \frac{\sigma_e}{n}$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_e}{n}, \quad N_{el} = S_1 \sigma_e + S_2 \frac{\sigma_e}{n} = \sigma_e \left(S_1 + \frac{S_2}{n} \right) = \sigma_e \left(S_1 + \frac{S_2}{3} \right)$$

$$N_{el} = \sigma_e \left(S_1 + \frac{S_2}{3} \right)$$

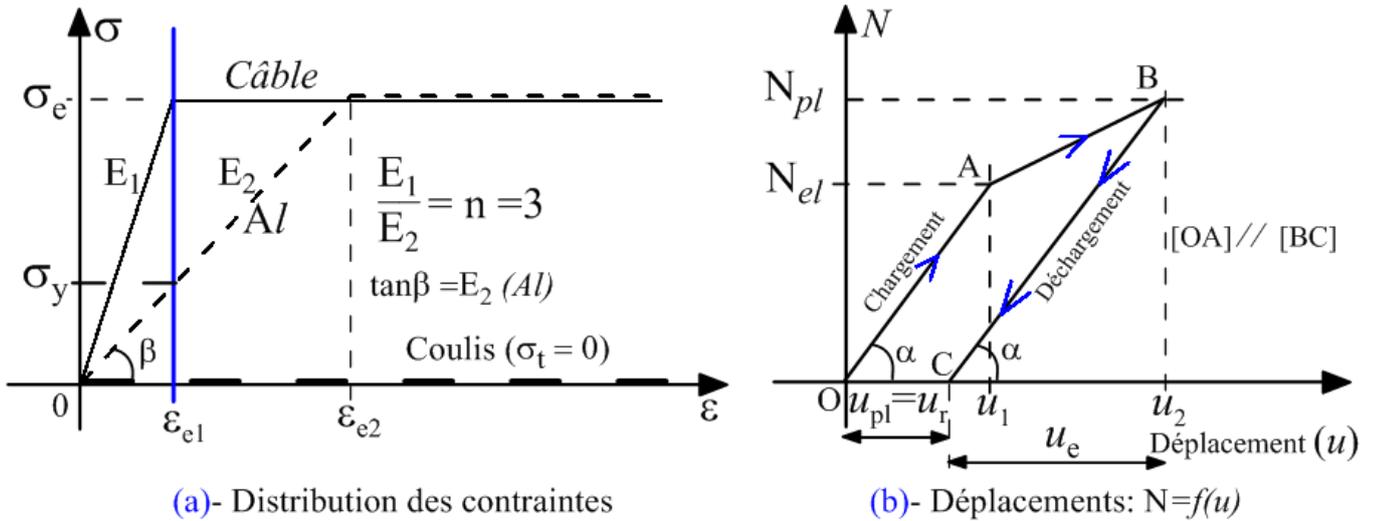


Figure 2-12- Distribution des contraintes et des déplacements dans les matériaux.

En augmentant la charge (N), les deux matériaux rentrent en plasticité, ils travaillent donc à la même limite d'élasticité (σ_e) avec l'acier se trouvant au palier, par voie de conséquence, on obtient un effort total dans le tirant égale à:

$$N = N_{pl} = \sigma_e S_1 + \sigma_e S_2 = \sigma_e (S_1 + S_2) \quad \boxed{N_{pl} = \sigma_e (S_1 + S_2)}$$

i. Ratio de résistance procuré par la plasticité quand: ($S_2 = 2S_1$).

$$\rho = \frac{N_{pl}}{N_{el}} = \frac{\sigma_e (S_1 + S_2)}{\sigma_e \left(S_1 + \frac{S_2}{3} \right)} = \frac{\sigma_e (S_1 + 2S_1)}{\sigma_e \left(S_1 + \frac{2S_1}{3} \right)} = \frac{(S_1 + 2S_1)}{\left(S_1 + \frac{2S_1}{3} \right)} = \frac{3S_1}{\left(\frac{5S_1}{3} \right)} = \frac{9}{5} = 1.8$$

$$\boxed{\rho = 1.8 \rightarrow 80\% \text{ de sécurité}}$$

2. Calcul de u_{el} et u_{pl} en déchargement

A chaque palier de chargement les déformations du câble en acier et de l'aluminium sont identiques.

Quand le câble atteint la limite d'écoulement (σ_e) : $\Rightarrow \sigma_e = E_1 \varepsilon_{e1} \Rightarrow \varepsilon_{e1} = \frac{u_1}{L} = \frac{\sigma_e}{E_1} \Rightarrow u_1 = \frac{\sigma_e L}{E_1}$

$$\boxed{u_1 = \frac{\sigma_e L}{E_1}}$$

Quand l'aluminium atteint (σ_e): $\Rightarrow N_2 = S_2 \sigma_e = S_2 E_2 \varepsilon_{e2} \Rightarrow \varepsilon_{e2} = \frac{u_2}{L} = \frac{\sigma_e}{E_2} \Rightarrow u_2 = \frac{\sigma_e L}{E_2} = 3 \frac{\sigma_e L}{E_1}$

$$\boxed{u_2 = 3 \frac{\sigma_e L}{E_1} = 3u_1}$$

$$\text{Tan}(\alpha) = \frac{N_{el}}{u_1} = \frac{N_{pl}}{u_2 - u_{pl}} \Rightarrow \frac{N_{pl}}{N_{el}} = \frac{u_2 - u_{pl}}{u_1} \Rightarrow u_{pl} = u_2 - \frac{N_{pl}}{N_{el}} u_1 = u - u_e$$

$$u_e = \frac{N_{pl}}{N_{el}} u_1 = \frac{(S_1 + S_2)}{(S_1 + S_2/3)} \frac{\sigma_e L}{E_1} = \frac{3(S_1 + S_2)}{3S_1 + S_2} \frac{\sigma_e L}{E_1} ;$$

$$u_{pl} = u_2 - \frac{N_{pl}}{N_{el}} u_1 = 3u_1 - \frac{N_{pl}}{N_{el}} u_1 = \left(3 - \frac{N_{pl}}{N_{el}}\right) u_1 = \left(3 - \frac{N_{pl}}{N_{el}}\right) \frac{\sigma_e L}{E_1}$$

Pour $(S_2 = 2S_1)$: $u_e = 1.8 \frac{\sigma_e L}{E_1} ; u_{pl} = 1.2 \frac{\sigma_e L}{E_1}$

3. Tenant compte de la très faible résistance du coulis de ciment ($\sigma_t \approx 0$), il subira une fissuration totale (ruine) pendant l'écoulement plastique, par conséquent pendant le déchargement, il ne y'aurait pas de contraintes résiduelles dans l'acier et l'aluminium du fait que l'adhérence entre les deux matériaux se trouve entièrement endommagée.

2.3.6 Traction élastoplastique avec écrouissage linéaire

L'évolution de la limite élastique en fonction de l'apparition des déformations plastiques (ϵ_p) permet un calcul élastoplastique avec écrouissage du matériau. Quand la limite élastique est dépassée, on a un nouveau comportement élastique de module tangent (E_t) plus faible que le module initial (Figure 2-13). D'après (Haplhén et Salençon, 1987; Wielgosz, 1999), l'étude d'une telle structure se ramène souvent à l'utilisation d'un matériau rigide écrouissable de module H qui est équivalent au matériau élastoplastique avec écrouissage. Les équations constitutives régissant le comportement deviennent alors simples.

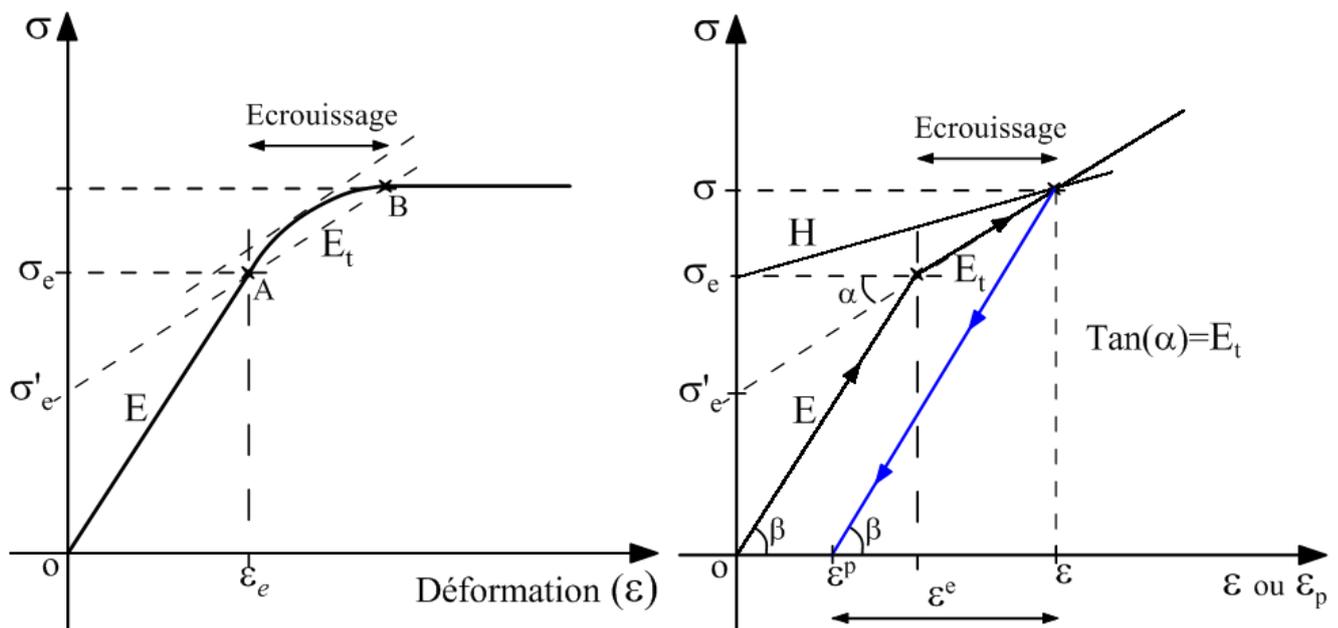


Figure 2-13- Sollicitation uniaxiale pour un matériau à écrouissage linéaire et isotrope.

Pour $\sigma \leq \sigma_e$: $\sigma = E\epsilon$

Pour $\sigma > \sigma_e$: $\sigma = \sigma_e + E_t (\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(p)}) = \sigma_e + E_t \left(\frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_e}{H} \right) ;$

$$\sigma = \sigma_e \left(1 - \frac{E_t}{E} \right) + \frac{E_t}{E} \sigma + \frac{E_t}{H} (\sigma - \sigma_e) ; \text{Comportement élastique en déchargement.}$$

$$\Rightarrow d\sigma = \left(\frac{E_t}{E} + \frac{E_t}{H} \right) d\sigma ; \left(\frac{E_t}{E} + \frac{E_t}{H} \right) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{H} \right) E_t = 1 \Rightarrow \frac{1}{E_t} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$$

$$\text{Le module d'érouissage est donné par relation: } H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{EE_t}{E - E_t} \quad (2.11)$$

2.4 Flexion élastoplastique plane

On envisage l'étude du comportement des poutres en flexion simple au delà de leur limite élastique (σ_e). Il en résulte d'un chargement évolutif d'une structure l'apparition de rotules à frottement plastique progressivement après dépassement des moments plastiques M_{pl} résistant (moments limites) et la diminution du degré d'hyperstaticité jusqu'à atteindre un mécanisme de ruine.

On néglige dans la suite l'influence de l'effort tranchant sur le moment plastique et on suppose que l'hypothèse de Bernoulli sur la conservation des sections planes dans le domaine élastique est vérifiée.

2.4.1 Notion de moment résistant élastique et plastique

a) Section symétrique et homogène

Considérons une poutre isostatique **homogène** de section rectangulaire (b/h), soumise à une charge P évolutive à mi-travée jusqu'à P_u .

$$N = \iint_{(\Omega)} \sigma_{xx} dS = 0 \quad \text{et} \quad M_z = \iint_{(\Omega)} y \sigma_{xx} dS$$

$$\text{Sur la partie élastique, } \sigma_{xx} = E \varepsilon_{xx} = \frac{M_z}{I_{zz}} y \Rightarrow \varepsilon_{xx} = \frac{M_z}{EI_{zz}} y = \psi y \quad \psi = \frac{M}{EI} \text{ (courbure)}$$

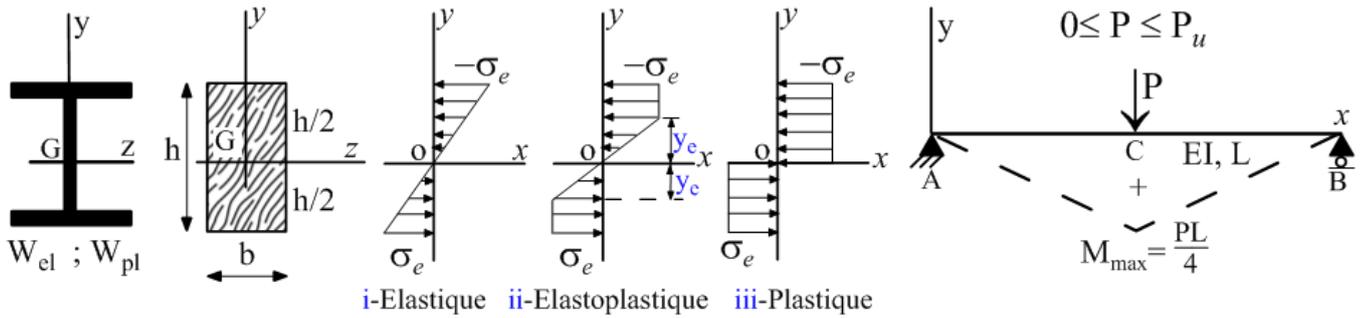
Dans le domaine élastique, les contraintes sur les fibres extrêmes ne dépassent pas σ_e .

$$\text{Sur la } \textbf{partie élastique} \text{ (} M_z \leq M_{el} \text{), } \sigma_{xx} = \frac{M}{I_{zz}} y = E \varepsilon_{xx} \leq \sigma_e$$

$$M_{el} = \iint_{(\Omega)} y \sigma dS = \int_{-h/2}^{h/2} y \times \frac{2\sigma_e}{h} y b dy = \frac{2b\sigma_e}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{2b\sigma_e}{h} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^2}{6} \sigma_e = W_{el} \sigma_e$$

$$W_{el} = \frac{bh^2}{6}$$

(2.12)



(a)-Sections homogènes (b)-Evolution élastoplastique (c)-Sollicitation: flexion simple

Figure 2-14- Flexion élastoplastique d'une poutre (cas d'une section homogène et symétrique).

Dans le domaine **élastoplastique** (Figure 2-14-b), les fibres se plastifient progressivement en fonction de l'évolution du moment fléchissant ($M > M_{el}$) jusqu'à plastification complète de la section se traduisant théoriquement par un allongement infini (∞). En réalité, il subsiste toujours une petite zone élastique autour de l'axe neutre dont l'influence sur le moment plastique demeure négligeable.

Dans le cas des éléments fléchis en béton armé, d'après (Fuentes, 2017) cette phase élastoplastique se traduit par l'augmentation de la courbure ψ et l'apparition progressive des fissures dans les zones tendues.

$$\begin{aligned}
 M &= \iint_{(\Omega)} \sigma_y dS = 2b \left[\int_0^{y_e} \sigma_y dy + \int_{y_e}^{h/2} \sigma_e dy \right] = 2 \left[b\sigma_e \left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(\frac{h}{4} + \frac{y_e}{2} \right) + \frac{1}{2} \sigma_e b y_e \times \frac{2y_e}{3} \right] \\
 &= b\sigma_e \left[\left(\frac{h}{2} - y_e \right) \left(\frac{h}{2} + y_e \right) + \frac{2y_e^2}{3} \right] = \sigma_e b \left[\frac{h^2}{4} - \frac{y_e^2}{3} \right]_0^{h/2} = \sigma_e \frac{bh^2}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right) \\
 \boxed{M = M_{pl} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right]} &\rightarrow \begin{cases} y_e = 0 : M = M_{pl} \\ y_e = h/2 : M = 2M_{pl}/3 = M_{el} \end{cases} \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

En **plasticité** (toutes les fibres se plastifient), elles travaillent à la même limite élastique σ_e

$$M_{pl} = M_l = \iint_{(\Omega)} \sigma_e y dS = 2b\sigma_e \int_0^{h/2} y dy = 2b\sigma_e \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{h/2} = \frac{bh^2}{4} \sigma_e \Rightarrow \boxed{W_{pl} = \frac{bh^2}{4}} \quad (2.14)$$

W_{el} , W_{pl} : sont respectivement les modules élastique et plastique.

Le bénéfice de résistance du à la plasticité (α) mesure la réserve de résistance en flexion, il est évalué à 1.5 dans le cas d'une section rectangulaire. Dans le cas des sections usuelles, la variation du coefficient α est illustrée sur la Figure 2-15-a, il s'exprime par la formule suivante:

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}} \quad (2.15)$$

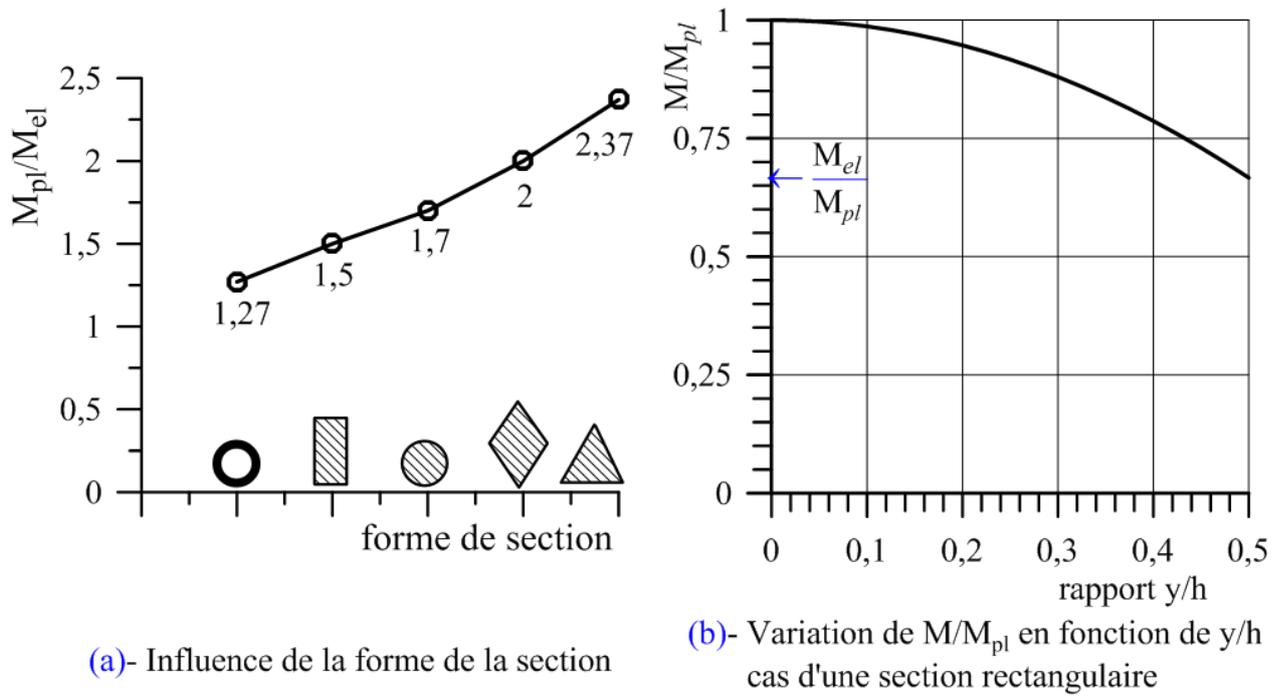


Figure 2-15- Evolution de M/M_{pl} et influence de la forme de section.

Dans le cas de sections doublement symétriques, l'axe neutre élastique (\overline{Gx}) coïncide avec l'axe neutre plastique (p).

b) Section dissymétrique

Dans le cas d'une section à un seul axe symétrie (poutre en T, IPE avec plancher collaborant), les axes neutres élastique et plastique ne sont pas confondus et l'évolution des contraintes de flexion est similaire au diagramme de la Figure 2-16 .

Equilibre de la section droite:

$$N = \iint_{(\Omega)} \sigma_e dS = \sigma_e (S_1 - S_2) = 0 \Rightarrow S_1 = S_2 = S/2$$

D'après la Figure 2-16, le moment plastique est donné par:

$$M_{pl} = M_l = \iint_{(\Omega)} \sigma_e y dS = \sigma_e \iint_{(\Omega)} y dS = \sigma_e (m_{s1} + m_{s2}) = \frac{S(y_{G1} + y_{G2})}{2} \sigma_e = W_{pl} \sigma_e \quad (2.16)$$

$$W_{pl} = \frac{S(y_{G1} + y_{G2})}{2} \quad (2.17)$$

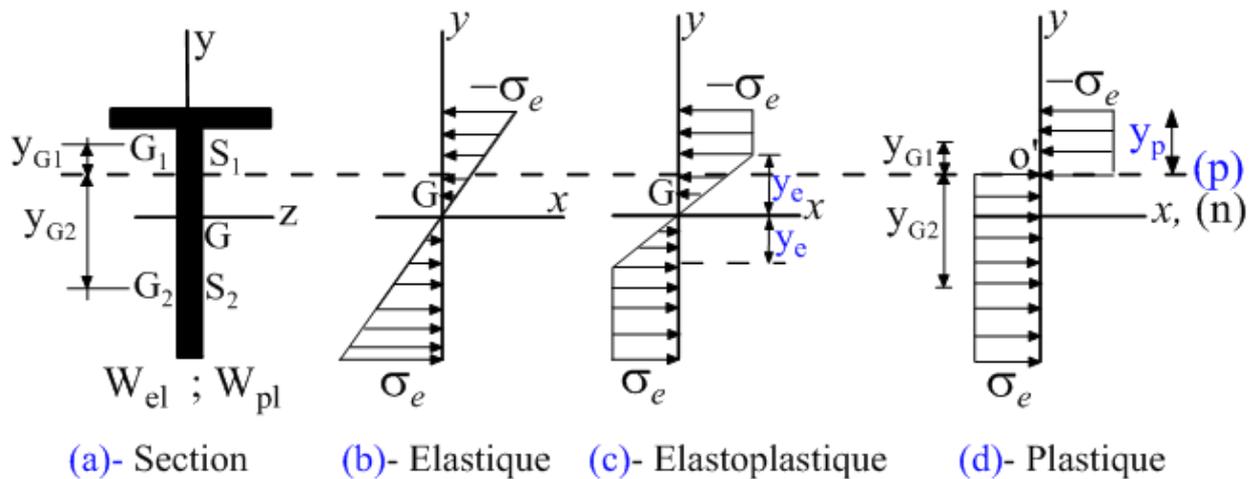


Figure 2-16- Flexion élastoplastique (cas d'une section dissymétrique).

y_{G1} , y_{G2} : Distances en valeurs absolues du (CDG) des deux aires (S_1 et S_2) par rapport à l'axe neutre plastique (p).

S: Aire de la section.

Remarque:

Dans le cas d'une poutre constituée de plusieurs matériaux (béton armé, section mixte acier-béton,...etc.), de limites élastiques différentes (σ_{ei}), le calcul du moment plastique requiert la connaissance de l'ordonnée de l'axe neutre plastique (y_p) à partir de la condition d'équilibre, souvent résolue par tâtonnements:

$$N = \iint_{(\Omega)} \sigma dS = 0$$

Exemple: **Moment plastique (M_{pl}^-) d'une poutre mixte**

Soit la poutre mixte principale d'un plancher collaborant avec connexion complète (Figure 2-17). Calculer le moment plastique négatif (M_{pl}^-) mobilisable au droit de l'appui.

$$N = \iint_{(\Omega)} \sigma dS = 0 \Rightarrow F_s + F_{a1} + F_{a2} = \sigma_s A_s + \sigma_e A_1 + \sigma_e (A - A_1) = 0$$

$$A_1 = \frac{\sigma_e A - \sigma_s A_s}{2\sigma_e} = \frac{37365 - 4522.80}{470} = 69.87 cm^2 \quad ; \quad A_2 = A - A_1 = 89.13 cm^2$$

$$A_1 = bt_f + t_w y_1 \Rightarrow y_1 = \frac{A_1 - bt_f}{t_w} = \frac{69.87 - 1.9 \times 30}{1.1} = 11.7 cm$$

Position (ordonnée) de l'axe neutre plastique (y_p): $y_p = y_1 + t_f + h_c = 28.6 cm$

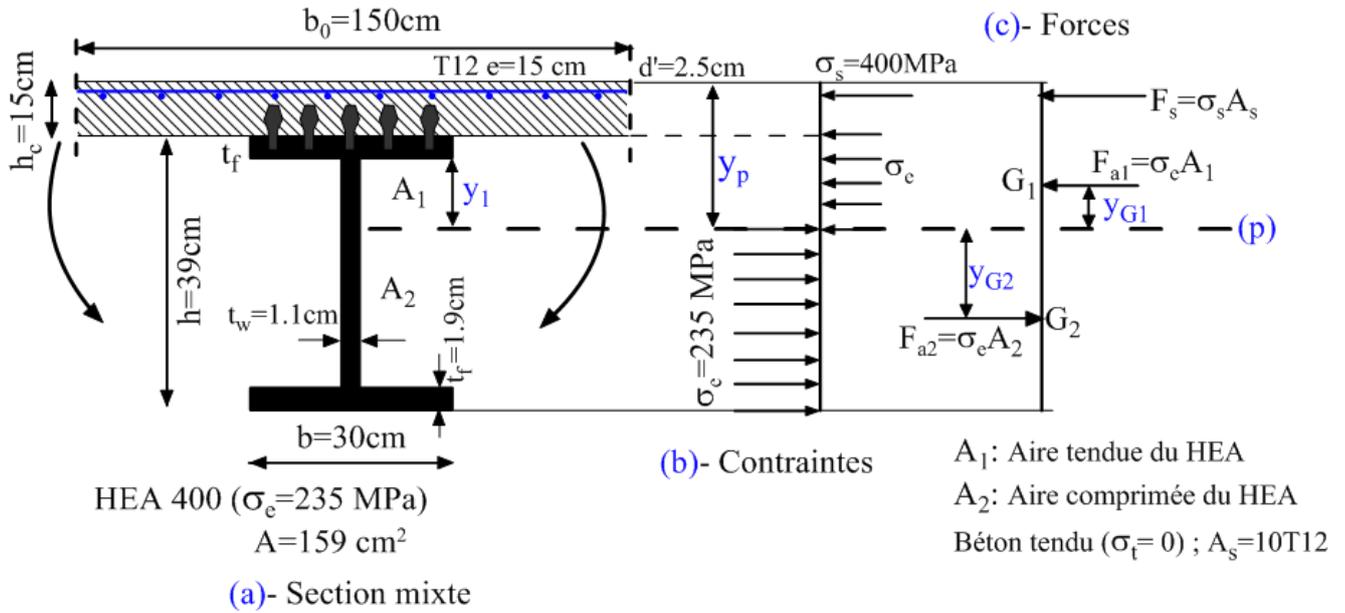


Figure 2-17- Vue d'une section de poutre mixte et bilan des contraintes et des forces.

Ordonnées du CDG des aires A_1 et A_2 (Figure 2-17):

$$y_{G1} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Gi} A_i}{A_1} = \frac{(5.85 \times 12.88) + (12.66 \times 57)}{69.87} = 11.4 \text{ cm}$$

$$y_{G2} = \frac{\sum_{i=1}^2 y_{Gi} A_i}{A_2} = \left| -\frac{(11.75 \times 25.84) + (24.44 \times 57)}{89.13} \right| = 19.03 \text{ cm}$$

$$M_{pl}^- = F_s (y_p - d') + F_{a1} y_{G1} + F_{a2} y_{G2} = A_s \sigma_s (y_p - d') + \sigma_e (A_1 y_{G1} + A_2 y_{G2}) = 5975.28 \text{ kN.m}$$

$$\boxed{M_{pl}^- = 5975.28 \text{ kN.m}}$$

Module plastique de la section mixte: $W_{pl}^- = \frac{M_{pl}^-}{\sigma_e} = \frac{5975.28}{235 \times 10^3} = 25,43 \times 10^{-3} \text{ m}^3$

2.4.2 Loi moment-courbure

La courbure ψ augmente avec l'augmentation du moment fléchissant. A partir de l'équation (2.13), on exprime la loi moment-courbure $M = f(\psi)$ pour le cas d'une section rectangulaire homogène.

$$M = M_{pl} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{y_e}{h} \right)^2 \right]$$

Par ailleurs, pour $(0 < y < y_e)$, la contrainte de flexion σ_{xx} (Figure 2-14-b) est donnée par:

$$\frac{\sigma_e}{y_e} = \frac{\sigma_{xx}}{y} = \frac{M}{I_{zz}} \Rightarrow \frac{\sigma_e}{Ey_e} = \frac{M}{EI_{zz}} = \psi \Rightarrow \sigma_e = Ey_e \psi \quad y_e = \frac{\sigma_e}{E\psi}$$

En remplaçant (ψ_e) dans l'équation (2.13):
$$M = M_{pl} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma_e}{Eh} \right)^2 \frac{1}{\psi^2} \right] \tag{2.18}$$

La relation (2.18) exprime la loi moment-courbure représentée sur la Figure 2-18-a. Cette courbe met en évidence un comportement élastoplastique en flexion. Quand le moment limite (plastique) est atteint, la poutre fléchit plastiquement à moment constant avec apparition d'une rotule plastique de courbure locale ($\psi \rightarrow \infty$).

Dans le cas des profilés en acier (IPE, HEA, HEB), la loi moment courbure se décline par l'équation (2.19), le bénéfice du à la plastification par flexion est faible ($1.1 \leq \alpha \leq 1.22$) d'après (Frey, 1994; Cardou, 2006).

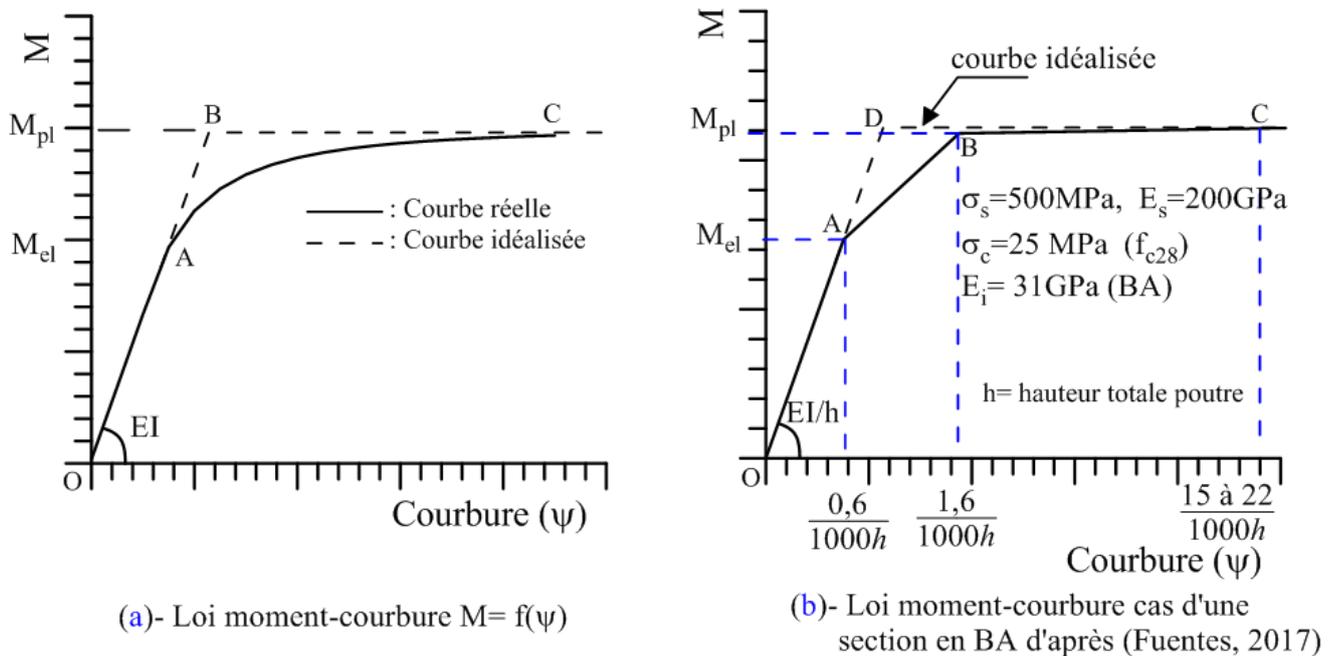


Figure 2-18- Lois moments courbures d'après (Wielgosz, 1999; Fuentes, 2017)

$$\frac{M}{M_{el}} = \alpha - \frac{t_w h^2}{12 W_{el}} \left(\frac{\psi_e}{\psi} \right)^2 ; \text{ avec: } \alpha = 1.15 \tag{2.19}$$

h et t_w : Sont respectivement la hauteur totale du profilé et l'épaisseur de l'âme.

Sous l'effet d'une flexion, l'élément a un comportement élastique parfaitement plastique: il demeure élastique jusqu'à l'instant où le moment plastique (M_{pl}) est atteint, puis il fléchit plastiquement à moment constant (apparition de rotule plastique).

2.4.3 Rotule plastique

Quand le moment plastique M_{pl} est atteint, il en résulte une forte concentration de la courbure localement, ce qui engendre la formation d'une rotule à frottement qui permet une rotation plastique bridée des deux segments adjacents de poutre sur une zone d'impact d'environ $0,13L_{travée}$ (Frey, 1994). Toutefois, la rotule plastique est différente du sens habituel d'une rotule mécanique sans frottement, puisqu'elle continue à transmettre le moment plastique (Figure 2-19). L'apparition successive de (n) rotules plastiques dans une structure fait diminuer son degré d'hyperstaticité de n fois.

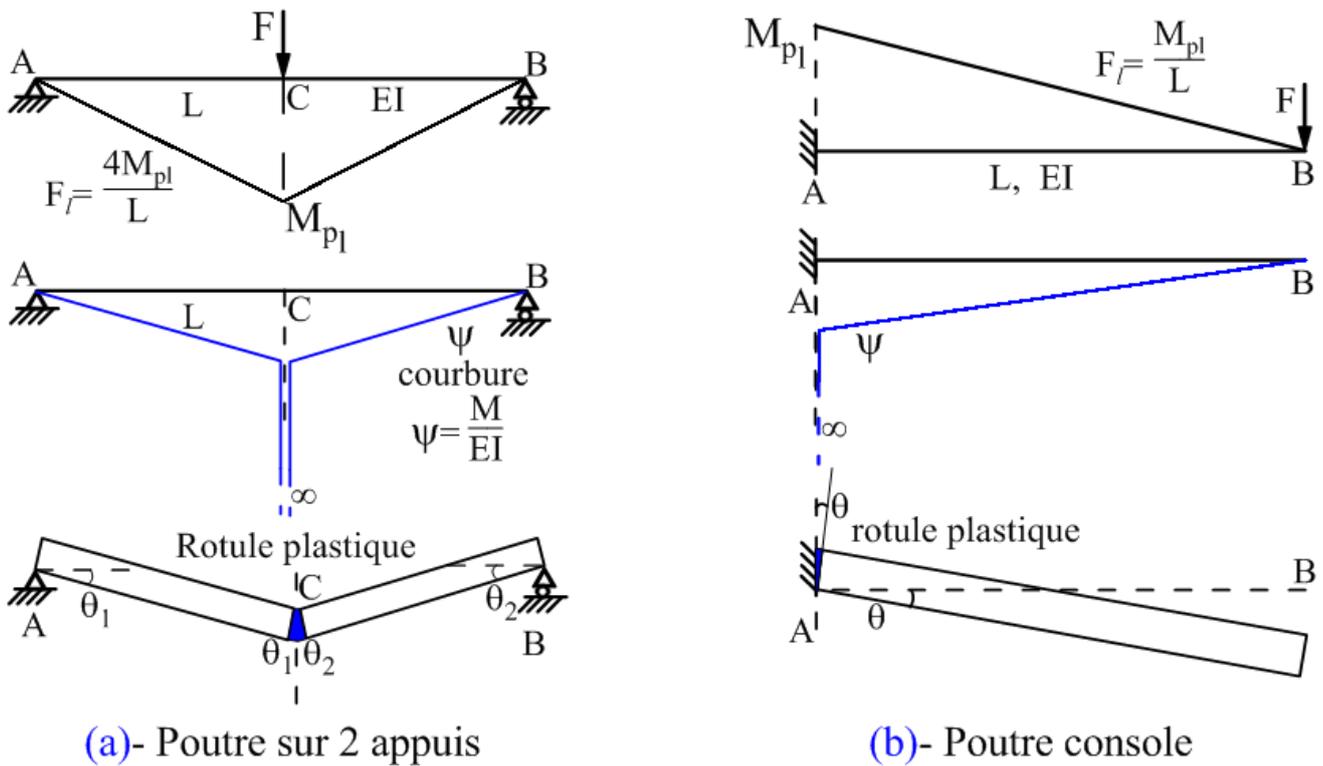


Figure 2-19- Exemple de rotules plastiques et de mécanismes de ruine.

Plusieurs auteurs se sont attelés à la prédiction de la longueur d'une rotule plastique L_p sur la base des essais expérimentaux. Cette longueur est fonction de plusieurs facteurs qui sont: le taux de confinement transversal (cadres), la résistance du béton et de l'acier ainsi que le niveau de sollicitations de l'élément (M , N et V). (Paulay et al., 1992) ont proposé l'expression de la longueur plastique d'une rotule par l'expression suivante:

$$L_p = 0.08L_v + 0.022 d_b f_y \tag{2.20}$$

Avec: L_v est la portée de cisaillement, $L_v = \left(\frac{H}{2} : \text{ poteaux}; \text{ ou } \frac{L}{2} : \text{ poutres} \right)$

f_y Est la limite élastique des armatures (f_e), d_b diamètre des armatures longitudinales

Analyse limite appliquée au calcul des structures et prédiction des mécanismes de ruine

3.1 Introduction

Certains ouvrages de génie civil sont soumis durant leurs existences à des sollicitations maximales dépassant leurs capacité de résistance. Il s'en suit de cet état de fait la plastification progressive des éléments les plus sollicités s'accompagnant d'une apparition de rotules plastiques. Quant le nombre de rotules est élevé, le degré d'hyperstaticité décroît et l'ouvrage se transforme en un mécanisme de ruine. On s'intéresse dans cette partie à l'évaluation des charges limites (de ruine) des structures fléchies de types poutres continues et portiques ainsi que l'évolution et la prédiction de leurs mécanismes de ruine le long d'un trajet de chargement monotone croissant.

Dans un chargement évolutif d'une structure ($0 < F \leq F_l$), la notion de charge limite est la valeur constante engendrant un champ de vitesse de déformations plastiques non nulles ($\dot{\varepsilon}_p \neq 0$) et un champ de contraintes constant par rapport au temps qui soient solution de toutes les équations du problème d'élastoplasticité.

3.2 Types de ruines et notions de charges limites

Tenant compte du nombre élevé de mécanismes pouvant affecter une structure d'hyperstaticité (*hyp*)^(a) sous l'effet d'un trajet de chargement, il est très délicat d'en répertorier le mécanisme le plus plausible. La ruine d'une structure survient après l'apparition d'un nombre suffisant de rotules (n_θ)^(b) conduisant à un mécanisme unique respectant les hypothèses de résistance et d'équilibre (Hapthen et Salençon, 1987; Mimoune et al., 2015).

Dans une structure soumise à un trajet de chargement monotone, les rotules plastiques apparaissent généralement aux endroits suivants:

- Points d'application des charges concentrées et aux discontinuités de moments (M_{pl});
- Les abscisses de moments maximums- cas de charges réparties: ($dM/dx = 0$);
- Aux niveaux des nœuds des portiques, poutres continues et aux encastremets (appuis).

La ruine d'une structure peut être partielle ($n_\theta < hyp + 1$) ou plus que complète. La ruine plus que complète (Figure 3-1-b) provoque une mise hors service de la structure après l'apparition d'un nombre élevé de rotules plastiques tel que ($n_\theta > hyp + 1$).

^(a) *hyp*: Est le degré d'hyperstaticité d'une structure

^(b) n_θ : Nombre de rotules plastiques susceptibles d'apparaître

D'après (Mimoune et al., 2015), le nombre de mécanismes possibles (m_p) dans une structure hyperstatique de degrés (hyp) susceptible de produire (n_o) rotules plastiques est donné par la relation suivante:

$$m_p = 2^m - 1 = 2^{(n_o - hyp)} - 1 \tag{3.0}$$

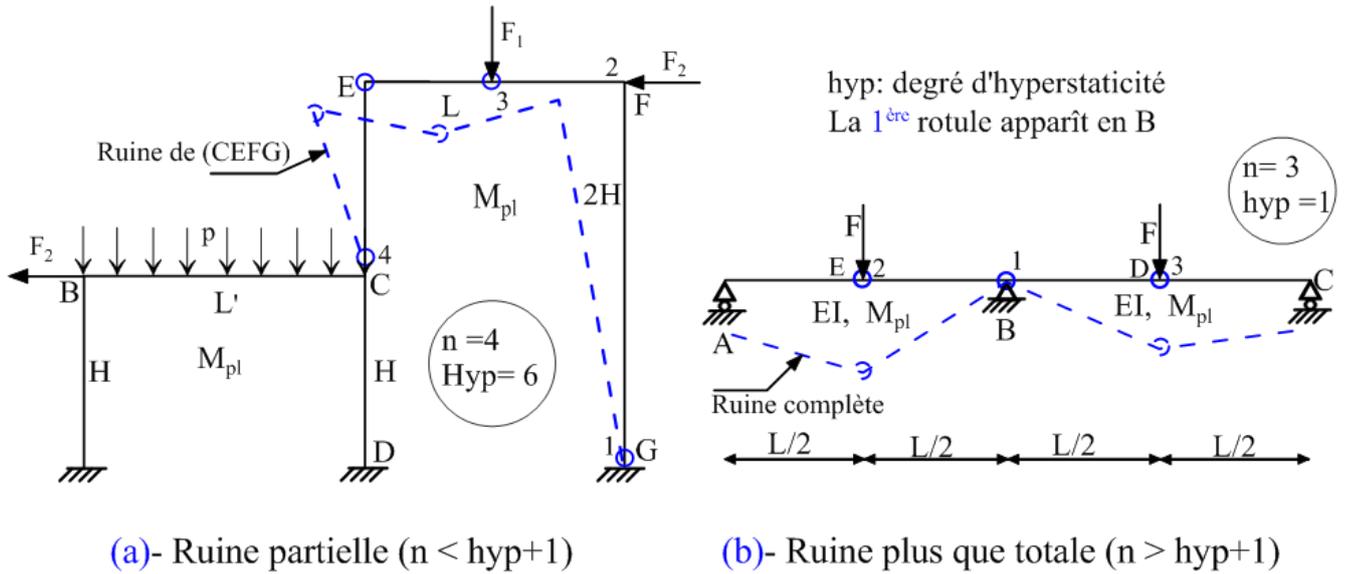


Figure 3-1- Types de ruines et notions de mécanismes d'effondrement.

3.2.1 Charge limite des structures hyperstatiques simples

On appelle charge limite (collapse load) d'une structure d'une structure d'hyperstaticité la charge engendrant l'apparition de ($hyp + 1$)^{ème} rotules plastiques conduisant à un mécanisme de ruine.

On étudie à titre d'exemple les cas simples de poutres isostatique et hyperstatique (Figure 3-2).

a) Cas d'une poutre isostatique

$$0 < q \leq q_l \text{ et } -M_{pl} \leq M(x) \leq +M_{pl}$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} = \frac{QL}{8} \tag{3.1}$$

La seule rotule plastique va se développer dans la section la plus sollicitée (mi-travée), elle apparaîtra quand le moment maximum atteint la valeur (M_{pl}). La rotule plastique (RP) à mi-travée transforme la poutre en une structure statiquement instable (mécanisme de ruine) (Figure 3-2-a).

$$M_{max} = M_{pl} \Rightarrow \frac{Q_l L}{8} = M_{pl} \rightarrow Q_l = \frac{8M_{pl}}{L} : \text{ Charge totale limite de la poutre isostatique.}$$

a) Cas d'une poutre hyperstatique

Concernant la poutre hyperstatique (Figure 3-2-b), le diagramme du moment fléchissant $M(x)$ se détermine par la méthode énergétique. On remplace la liaison surabondante au point B par l'inconnue du problème (V_B).

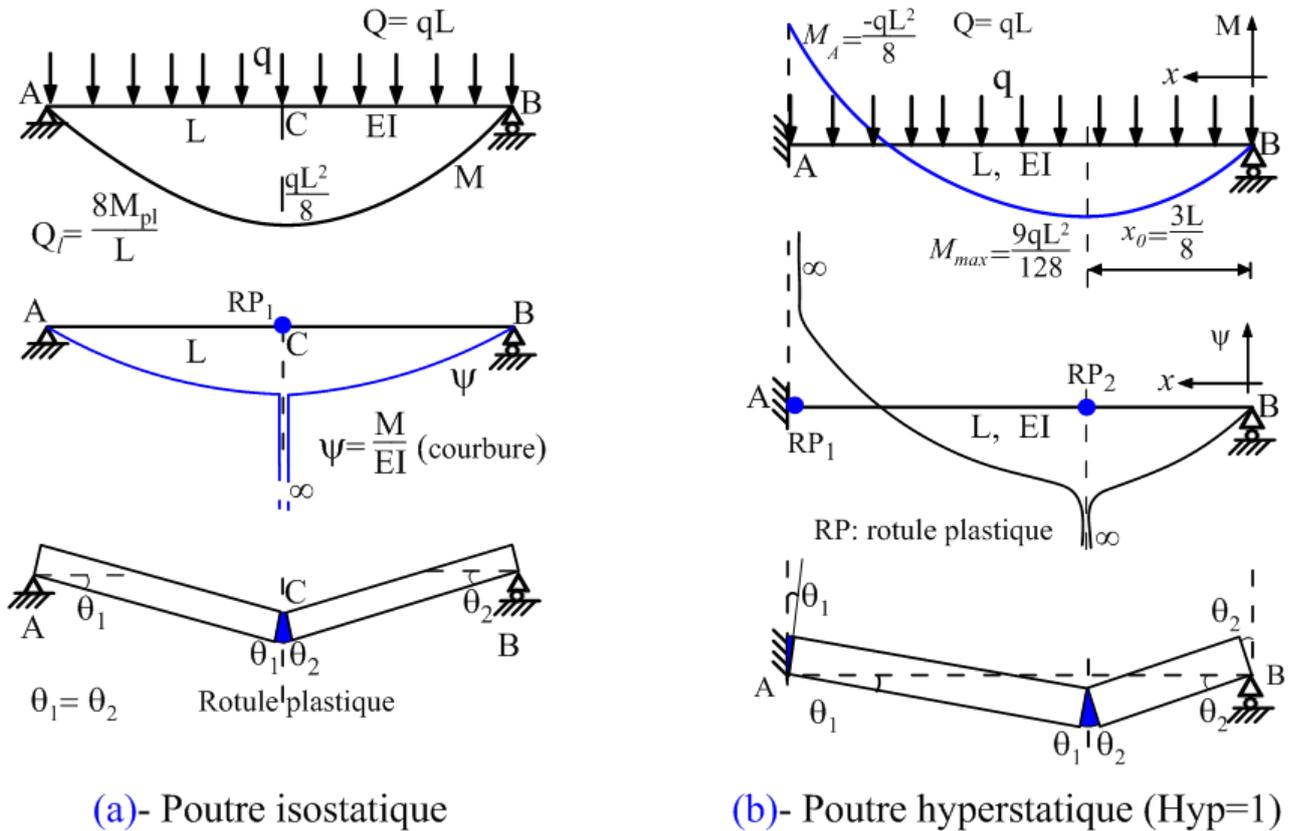


Figure 3-2- Charges limites des systèmes simples (méthode RDM)

$$M(x) = M_0(x) + \bar{M}(x)$$

Equation d'équilibre: $\delta_{11} V_B + \Delta_{1p} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{-\Delta_{1p}}{\delta_{11}}$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} &= \int_{(\Omega)} \frac{\bar{M}\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_{(\Omega)} \bar{M}\bar{M} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L x^2 dx = \frac{L^3}{3EI} \\ \Delta_{1p} &= \int_{(\Omega)} \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L -\frac{qx^2}{2} x dx = \frac{-q}{2EI} \int_0^L x^3 dx = -\frac{qL^4}{8EI} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_B = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{3qL}{8}$$

$$M(x) = M_0(x) + \bar{M}(x) = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3qL}{8}x \Rightarrow T(x) = \frac{\partial M}{\partial x} = -qx + \frac{3qL}{8} = 0 \rightarrow x_0 = \frac{3L}{8}$$

$$M_t^{\max} = M(x_0) = M\left(\frac{3L}{8}\right) = \frac{9}{128}qL^2 < |M_A| = \frac{qL^2}{8} \Rightarrow \text{La première rotule plastique apparaîtra en A,}$$

elle reprend un moment (M_{pl}) et elle subit une courbure infinie ($\psi \rightarrow \infty$) et une rotation θ_1 .

$$M(x) = M_{pl} + M_0(x) = -M_{pl} + \frac{M_{pl}}{L}x + \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow T(x) = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{qL}{2} - qx + \frac{M_{pl}}{L}$$

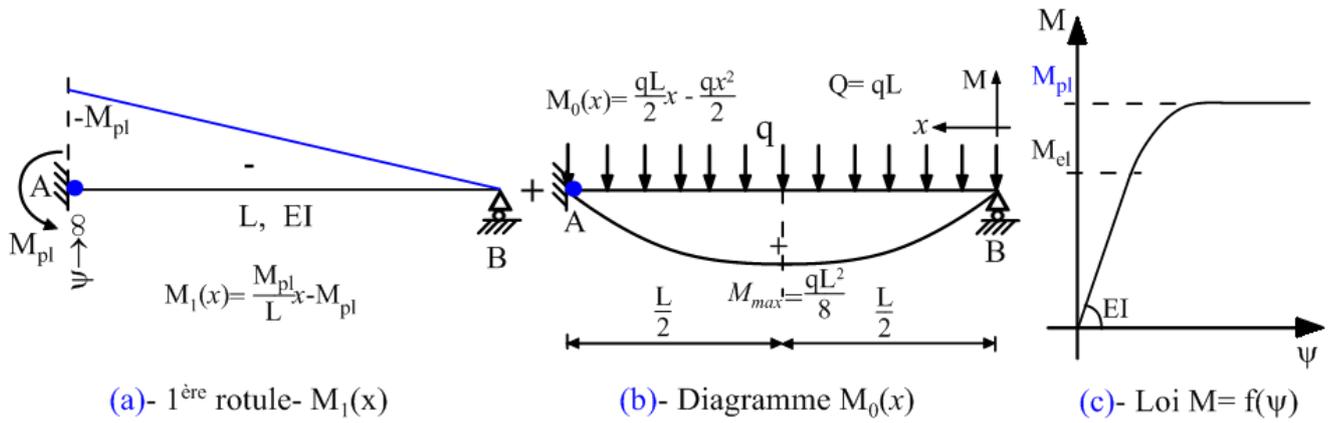


Figure 3-3- Evolution du moment de flexion en fonction de l'apparition des rotules plastiques.

$$T(x) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{qL} = \frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{Q} \quad x_0 = \frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{qL}$$

$$M_{max} = M(x_0) = \frac{qL}{2} x_0 - \frac{qx_0^2}{2} + \frac{M_{pl}}{L} x_0 - M_{pl} = \frac{qL}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{qL} \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{qL} \right)^2 + \frac{M_{pl}}{L} \left(\frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{qL} \right) - M_{pl}$$

$$= \frac{qL^2}{4} + \frac{M_{pl}}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{L^2}{4} + \frac{M_{pl}^2}{q^2 L^2} + 2 \frac{L}{2} \frac{M_{pl}}{qL} \right) + \frac{M_{pl}}{2} + \frac{M_{pl}^2}{qL^2} - M_{pl} = \frac{qL^2}{4} - \frac{qL^2}{8} - \frac{M_{pl}^2}{2qL^2} + \frac{M_{pl}^2}{qL^2} - \frac{M_{pl}}{2}$$

$$M_{max} = \frac{qL^2}{8} + \frac{M_{pl}^2}{2qL^2} - \frac{M_{pl}}{2}$$

Quand la charge (q) évolue, le moment plastique sera atteint et la 2^{ème} rotule plastique apparaîtra en l'abscisse x_0 correspondant au moment maximal (M_{max}).

$$M_{max} = M(x_0) = M_{pl} \Rightarrow \frac{qL^2}{8} + \frac{M_{pl}^2}{2qL^2} - \frac{M_{pl}}{2} = M_{pl} \Rightarrow \frac{qL^2}{8} + \frac{M_{pl}^2}{2qL^2} = \frac{3M_{pl}}{2} ; Q = qL$$

$$\frac{QL}{8} + \frac{M_{pl}^2}{2QL} = \frac{Q^2 L^2 + 4M_{pl}^2}{8QL} = \frac{3M_{pl}}{2} \Rightarrow Q^2 L^2 + 4M_{pl}^2 = 12M_{pl} QL$$

Soit à résoudre l'équation en Q^2 : $L^2 Q^2 - (12M_{pl}L)Q + 4M_{pl}^2 = 0 \Leftrightarrow aQ^2 + bQ + c = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 128M_{pl}^2 L^2 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{128}M_{pl}L$$

Il en résulte les valeurs de la charge limite:

$$Q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12M_{pl}L \pm \sqrt{128}M_{pl}L}{2L^2} = (6 \pm 4\sqrt{2}) \frac{M_{pl}}{L} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 = 11.66 \frac{M_{pl}}{L} \\ Q_2 = 0.34 \frac{M_{pl}}{L} \end{cases}$$

$$\boxed{Q_l = 11.66 \frac{M_{pl}}{L} \text{ et } x_0 = \frac{L}{2} + \frac{M_{pl}}{Q_l} = 0.586L} \quad (3.2)$$

3.2.2 Méthode des travaux virtuels pour l'analyse limite

La somme des travaux virtuels internes (\mathfrak{S}_{int}) dus au moment plastique (M_{pl}) ayant provoqué les rotations (θ_i)^(c) aux droites des rotules à frottement (plastique) est égale aux travaux extérieurs (\mathfrak{S}_{ext}) des forces appliquées (F_j) associées aux déplacements (v_j) formant la cinématique virtuelle du mécanisme de ruine.

θ_i et v_j : Sont compatibles, le mécanisme de ruine doit être continu et compatible avec les appuis; les déplacements (v_j) et les rotations (θ_i) respectent le principe de la cinématique virtuelle (linéarité géométrique).

$$\mathfrak{S}_{int} = \mathfrak{S}_{ext} \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_{pli} |\theta_i| = \sum_{j=1}^m F_j v_j \quad (3.3)$$

Application de du **principe des travaux virtuels** au cas de la poutre hyperstatique (Figure 3-2-b)

$$\mathfrak{S}_{int} = \mathfrak{S}_{ext} \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_{pli} |\theta_i| = \sum_{j=1}^m F_j v_j \rightarrow M_{pl}\theta_1 + M_{pl}(\theta_1 + \theta_2) + M_{pl}\theta_2 = F_1 v_1 + F_2 v_2 \quad (3.4)$$

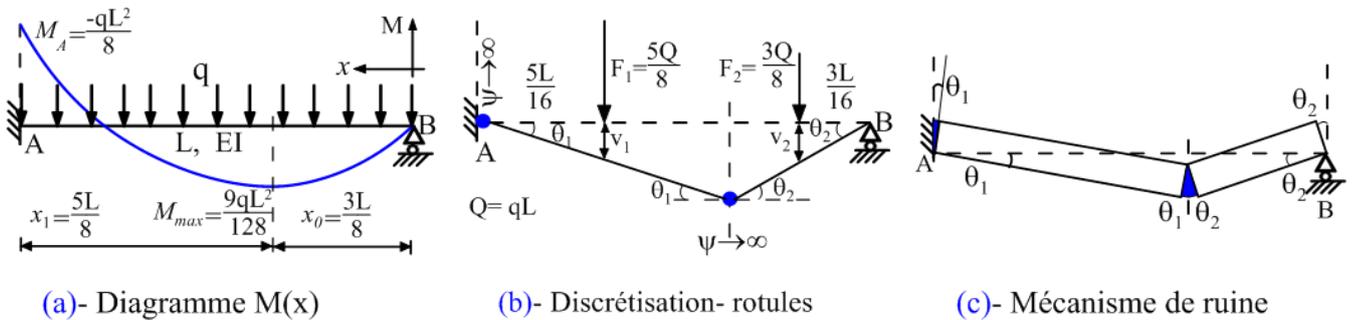


Figure 3-4 - Charge limite et schéma d'évolution du mécanisme de ruine

On assimile en petites rotations: $tg\theta = \sin\theta \approx \theta$ en (radian)

$$tg\theta_1 = \frac{v}{5L/8} = \theta_1 \Rightarrow v = \frac{5L}{8} \theta_1 \quad ; \quad tg\theta_2 = \frac{v}{3L/8} = \theta_2 \Rightarrow v = \frac{3L}{8} \theta_2 \Rightarrow \frac{5L}{8} \theta_1 = \frac{3L}{8} \theta_2 \rightarrow \theta_2 = \frac{5}{3} \theta_1$$

Calcul des déplacements v_1 et v_2 sous l'effet de F_1 et F_2 :

$$tg\theta_1 = \frac{v_1}{5L/16} = \theta_1 \Rightarrow v_1 = \frac{5L}{16} \theta_1 \quad ; \quad tg\theta_2 = \frac{v_2}{3L/16} = \theta_2 \Rightarrow v_2 = \frac{3L}{16} \theta_2 = \frac{3L}{16} \times \frac{5\theta_1}{3} = \frac{5L}{16} \theta_1$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 = \frac{5L}{16} \theta_1$$

Remplaçons dans l'équation (3.4):

$$\mathfrak{S}_{int} = \mathfrak{S}_{ext} \Rightarrow M_{pl}\theta_1 + M_{pl}(\theta_1 + \theta_2) + M_{pl}\theta_2 = F_1 v_1 + F_2 v_2$$

$$\Rightarrow M_{pl}\theta_1 + M_{pl}(\theta_1 + \frac{5}{3}\theta_1) + 0 \times \theta_2 = (F_1 + F_2)v_1 = Qv_1 = Q \frac{5L}{16} \theta_1$$

^(c) θ_i : Angle de rotation d'une rotule plastique (i) en (radian).

$$M_{pl}\theta_1 + M_{pl}\frac{8}{3}\theta_1 = \frac{11}{3}\theta_1 M_{pl} = Q\frac{5L}{16}\theta_1 \Rightarrow Q_l = \frac{176}{15}\frac{M_{pl}}{L} \approx 11.7\frac{M_{pl}}{L}$$

$$Q_l = 11.7\frac{M_{pl}}{L} \tag{3.5}$$

Soit un écart relatif de l'ordre de 0.6% par rapport à la solution RDM.

Exercice1 d'application

Soit la poutre hyperstatique (Figure 3-5) de rigidité flexionnelle et de moment plastique constants. Calculer le moment plastique M_{pl} la charge limite F_l et justifier le mécanisme de ruine le plus prépondérant.

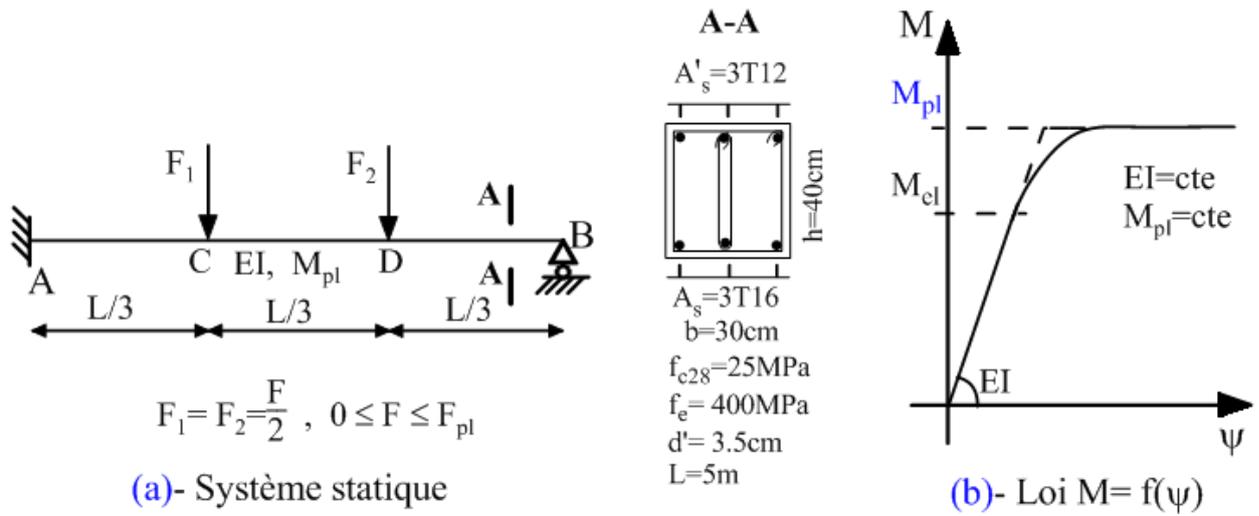


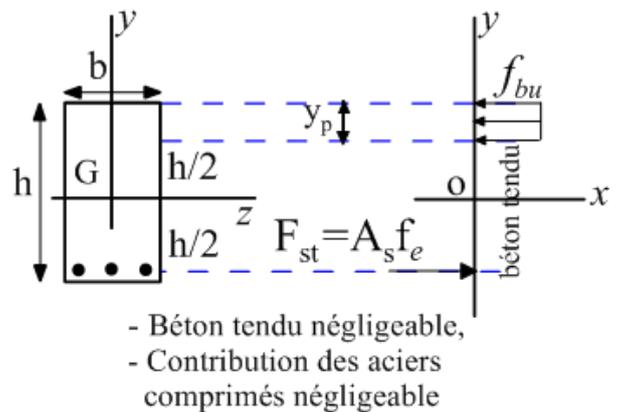
Figure 3-5- Vue d'une poutre hyperstatique ($hyp = 1$) avec chargement ponctuel

$$f_{bu} = \frac{0.85f_{c28}}{1.5} = 14.17MPa, A_s = 3T16 = 6.03cm^2$$

$$N = \iint_{(\Omega)} \sigma ds = 0 \Rightarrow F_{bc} = F_{st} \rightarrow bf_{bu}y_p = A_s f_e$$

$$y_p = \frac{A_s f_e}{bf_{bu}} = 5.67cm$$

$$M_{pl} = F_{st} \left(h - d' - \frac{y_p}{2} \right) = 81.2 kN.m$$



Des rotules plastiques peuvent apparaître aux trois points A, C et D. Cependant, seulement deux rotules ($hyp + 1$) sont suffisantes pour provoquer la ruine totale ou partielle de la poutre.

Appliquons la méthode des travaux virtuels:

$$\mathfrak{S}_{int} = \mathfrak{S}_{ext} \Rightarrow \sum_{i=1}^n M_{pli} |\theta_i| = \sum_{j=1}^m F_j v_j$$

Probabilité1: rotule plastique au point C

$$\mathfrak{S}_{int} = \mathfrak{S}_{ext} \Rightarrow M_{pl}\theta_1 + M_{pl}(\theta_1 + \theta_2) + M_{pl}\theta_2 = F_1 v_1 + F_2 v_2 = \frac{F}{2}(v_1 + v_2)$$

$$\operatorname{tg}\theta_1 = \frac{v_1}{\frac{L}{3}} = \theta_1 \Rightarrow v_1 = \frac{L\theta_1}{3} ; \quad \operatorname{tg}\theta_2 = \frac{v_1}{\frac{2L}{3}} = \theta_2 \Rightarrow v_1 = \frac{2L}{3}\theta_2 \Rightarrow \frac{L}{3}\theta_1 = \frac{2L}{3}\theta_2 \rightarrow \boxed{\theta_2 = \frac{\theta_1}{2}}$$

$$\frac{v_1}{\frac{2L}{3}} = \frac{v_2}{\frac{L}{3}} \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{L\theta_1}{6}$$

$$M_{pl}\theta_1 + M_{pl}(\theta_1 + \theta_2) + M_{pl}\theta_2 = M_{pl}\theta_1 + M_{pl}\left(\theta_1 + \frac{\theta_1}{2}\right) + 0 \times \frac{\theta_1}{2} = \frac{F}{2}\left(\frac{L\theta_1}{3} + \frac{L\theta_1}{6}\right)$$

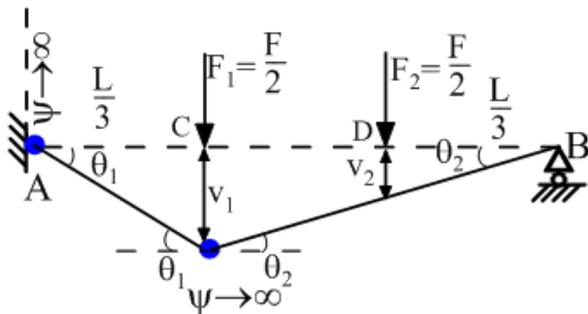
$$\frac{5M_{pl}\theta_1}{2} = \frac{FL}{2}\left(\frac{\theta_1}{3} + \frac{\theta_1}{6}\right) = \frac{FL}{2}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) = \frac{FL}{4}\theta_1 \Rightarrow F_{I1} = 10\frac{M_{pl}}{L} \tag{3.6}$$

Probabilité 2: rotule plastique au point D

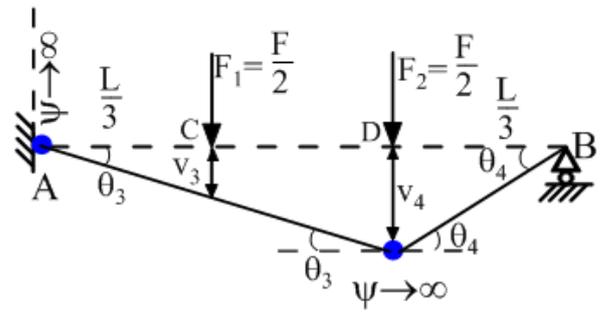
$$\operatorname{tg}\theta_3 = \frac{v_4}{\frac{2L}{3}} = \theta_3 \Rightarrow v_4 = \frac{2L\theta_3}{3} ; \quad \operatorname{tg}\theta_4 = \frac{v_4}{\frac{L}{3}} = \theta_4 \Rightarrow v_4 = \frac{L}{3}\theta_4 \Rightarrow \frac{2L}{3}\theta_3 = \frac{L}{3}\theta_4 \rightarrow \boxed{\theta_4 = 2\theta_3}$$

$$\frac{v_3}{\frac{L}{3}} = \frac{v_4}{\frac{2L}{3}} \Rightarrow v_3 = \frac{v_4}{2} = \frac{L\theta_3}{3}$$

$$\mathfrak{S}_{int} = \mathfrak{S}_{ext} \Rightarrow M_{pl}\theta_3 + M_{pl}(\theta_3 + \theta_4) + M_{pl}\theta_4 = F_1v_3 + F_2v_4 = \frac{F}{2}(v_3 + v_4)$$



(a)- Mécanisme 1



(b)- Mécanisme 2

Figure 3-6- Probabilités de survenue des mécanismes de ruine de la structure.

$$\Rightarrow M_{pl}\theta_3 + 3M_{pl}\theta_3 + 0 \times \theta_4 = \frac{F}{2}(v_3 + v_4) = \frac{F}{2}\left(\frac{L\theta_3}{3} + \frac{2L\theta_3}{3}\right) = \frac{F}{2}L\theta_3$$

$$4M_{pl}\theta_3 = \frac{F}{2}L\theta_3 \Rightarrow F_{I2} = 8\frac{M_{pl}}{L} \tag{3.7}$$

$$\boxed{F_I = \operatorname{Min}\left(10\frac{M_{pl}}{L}; 8\frac{M_{pl}}{L}\right) = 8\frac{M_{pl}}{L} = 129.9\text{kN}} \tag{3.8}$$

Le minimum de F_{Ii} correspond à la charge limite F_I et le mécanisme2 (Figure 3-6-b) est le plus prépondérant.

3.2.3 Méthode cinématique

La cinématique est réputée **licite** lorsque son mécanisme de ruine est continu, compatible avec les appuis et respecte les conditions statique de plasticité ($|M| \leq M_{pl}$) (Figure 3-7). Pour la détermination de la charge limite, on envisage successivement l'ensemble des mécanismes de ruine possible. D'après le théorème cinématique, la charge limite à retenir est le minimum de toutes les valeurs des charges déterminées.

L'application du principe des travaux virtuels conduit à l'égalité du travail internes (\mathfrak{S}_{int}) dissipé par les rotations plastiques (Figure 3-7) avec celui du aux forces extérieures (\mathfrak{S}_{ext}). L'intégration sur la structure conduit à l'expression suivante:

$$\sum_{i=1}^n M_{pli} |\theta_i| = \sum_{j=1}^m \lambda_p F_j v_j \tag{3.9}$$

λ : est un multiplicateur limite (plastique).

L'équation (3.9) est fondée sur les hypothèses suivantes:

- ✓ Les déplacements des éléments barres et les rotations des rotules sont faibles;
- ✓ Les rotules plastiques sont ponctuelles, de longueur faible, elles ont un comportement parfaitement plastique (Figure 3-7-b);
- ✓ A la formation d'un mécanisme, seules les rotules plastiques (à frottement) contribuent au travail interne dissipé (\mathfrak{S}_{int}). Dans ce cas, la distribution des efforts (M) associés à ce mécanisme devra être statiquement et plastiquement admissible.
- ✓ Par convention, les moments et les rotations (θ_i) des rotules plastiques sont positifs lorsque les fibres intérieures des portiques sont tendues.

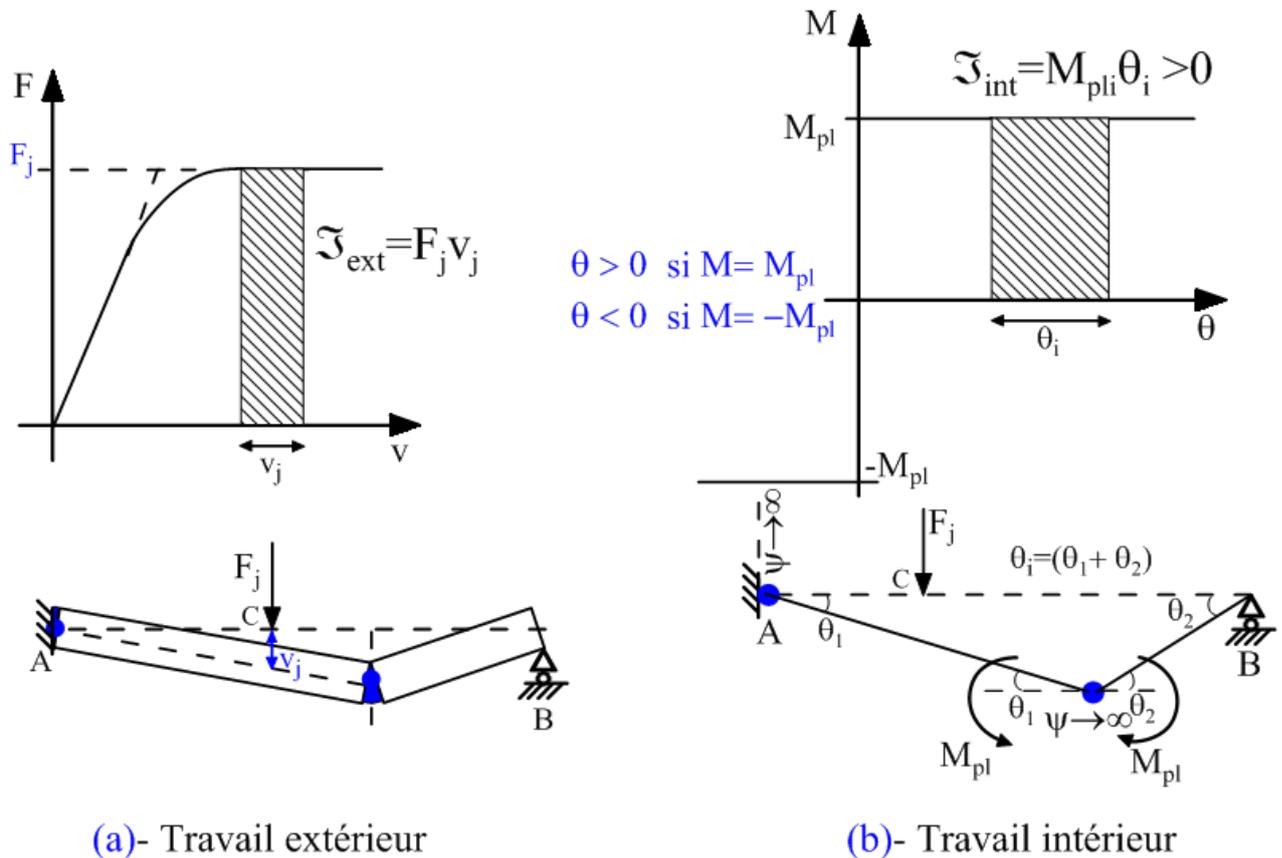


Figure 3-7- Application de la méthode cinématique (principe des travaux virtuels).

La **méthodologie** à suivre pour résoudre un problème de charge limite est la suivante:

1. Répertorier les sections potentiellement critiques (**SPC**) susceptibles de développer des rotules plastiques;
2. Recherche de tous les mécanismes de ruines possibles;
3. Calculer le multiplicateur limite λ_p réel et tracer le mécanisme de ruine y afférent;
4. Le multiplicateur minimum λ_r correspond à la charge de ruine de la structure.

3.2.3.1 Cas des portiques sous charges réparties

Dans le cas des poutres et portiques soumis aux charges réparties, on discrétise l'élément poutre selon l'abscisse de la rotule plastique (**SPC**)^(d). On remplace alors les charges réparties par des forces concentrées équivalentes F_i appliquées sur les deux éléments. Le travail extérieur des forces réparties (\mathfrak{S}_{ext}) est assimilable au travail de forces concentrées sans grande erreur. A cet effet, on assimile la position (**SPC**) dans le cas des charges uniformes au milieu des éléments.

Exercice2 d'application : Applications aux calculs de la charge de ruine

Soient les structures en portiques de caractéristiques indiquées sur la Figure 3-8.

1. Déterminer les différents mécanismes susceptibles de survenir pour chaque cas,
2. Evaluer les charges limites par la méthode cinématique et tracer leurs mécanismes de ruine correspondants (pour $H= L$, déduire la valeur de la charge limite F_i) ?

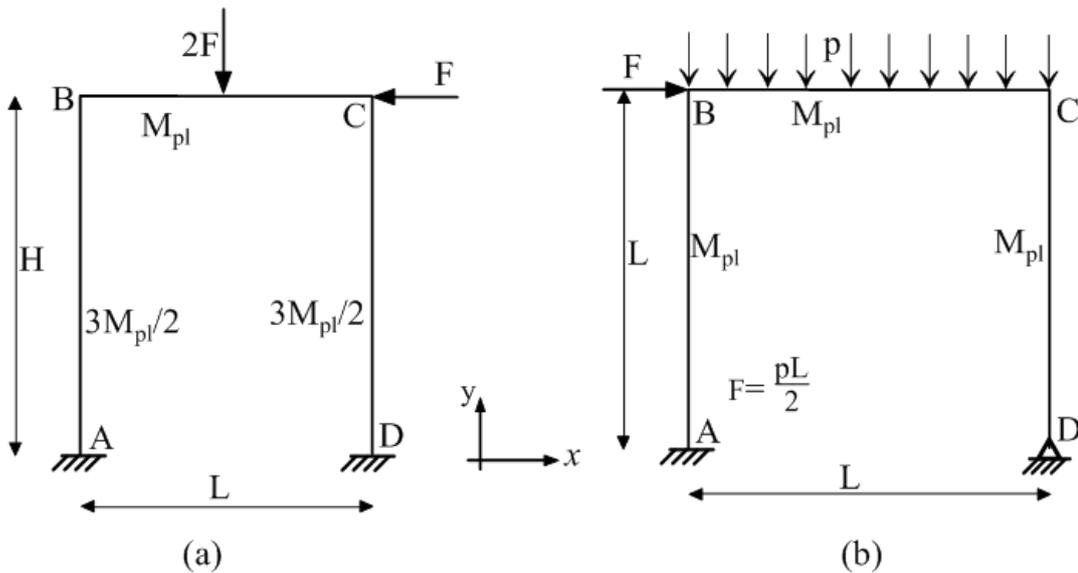


Figure 3-8- Vue des portiques auto stables soumis à un chargement statique évolutif

Solution

1) Etude du cas (a)

$$\text{Degré d'hyperstaticité (3): } \left. \begin{matrix} hyp = 3 \\ n = 5 \end{matrix} \right\} \rightarrow m = n - hyp = 2 ; m_p = 2^m - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

^(d) **SPC** : Section potentiellement critique à l'endroit du moment maximal

Nombre de mécanismes susceptibles de se produire (Figure 3-9): $m_p = 3$

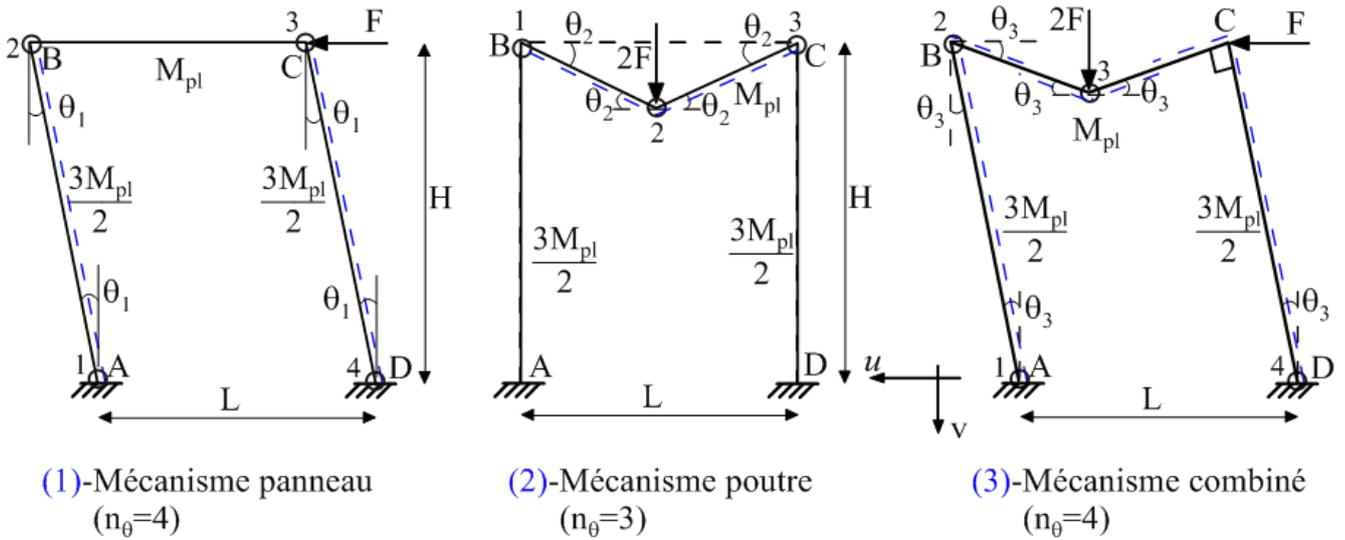


Figure 3-9- Mécanismes de ruine sous l'effet du trajet de chargement (cas a)

Application de la méthode cinématique:

$$\sum_{i=1}^n M_{pli} |\theta_i| = \sum_{j=1}^m \lambda_p F_j v_j$$

Mécanisme (1): $\Rightarrow \frac{3M_{pl}}{2} (2\theta_1^{(rd)}) + M_{pl}\theta_1 + M_{pl}\theta_1 = Fu = FH \times tg\theta_1 = FH \times \theta_1^{(rd)}$

$$5M_{pl} = FH \Rightarrow \boxed{F_{11} = \frac{5M_{pl}}{H}}$$

Mécanisme (2): $\Rightarrow M_{pl}\theta_2 + 2M_{pl}\theta_2 + M_{pl}\theta_2 = 4M_{pl}\theta_2 = 2Fv = 2F \frac{L}{2} \times tg\theta_2 = FL \times \theta_2^{(rd)}$

$$4M_{pl}\theta_2 = FL \times \theta_2^{(rd)} \Rightarrow \boxed{F_{12} = \frac{4M_{pl}}{L}}$$

Mécanisme (3):

$$\Rightarrow \frac{3M_{pl}}{2} (2\theta_3) + M_{pl}(2\theta_3) + M_{pl}(2\theta_3) = Fu + 2Fv = FH\theta_3 + 2F \frac{L}{2} \theta_3 = F\theta_3(L + H)$$

$$\begin{cases} \frac{u}{H} = tg\theta_3 \rightarrow u = Htg\theta_3 = H\theta_3^{(rd)} \\ \frac{v}{L/2} = tg\theta_3 \rightarrow v = \frac{L}{2}tg\theta_3 = \frac{L}{2}\theta_3^{(rd)} \end{cases} \Rightarrow v = \frac{L}{2H}u$$

$$7M_{pl}\theta_3 = F\theta_3(L + H) \Rightarrow \boxed{F_{13} = \frac{7M_{pl}}{L + H}}$$

Charge limite: $F_l = \min(F_{11}; F_{12}; F_{13})$

Pour $H = L \Rightarrow F_{I1} = \frac{5M_{pl}}{L}$; $F_{I2} = \frac{4M_{pl}}{L}$; $F_{I3} = \frac{3.5M_{pl}}{L} \Rightarrow \boxed{F_I = \frac{3.5M_{pl}}{L}}$

Ce qui correspond au mécanisme de ruine (n°3) de type combiné (voir Figure 3-9).

2) Etude du cas (b)

Degré d'hyperstaticité (2):

$$\left. \begin{matrix} hyp = 2 \\ n = 4 \end{matrix} \right\} \rightarrow m = n - hyp = 2 ; m_p = 2^m - 1 = 2^2 - 1 = 3$$

Il suffit l'apparition de 3 rotules ($hyp+1=3$) pour qu'un mécanisme de ruine se produise. Le nombre de mécanismes susceptibles de se produire est de ($m_p = 3$) (Figure 3-10):

$$\sum_{i=1}^n M_{pli} |\theta_i| = \sum_{j=1}^m \lambda F_j v_j$$

Mécanisme (1): $\Rightarrow M_{pl}(3\theta_1) = Fu = FL \times tg\theta_1 = FL \times \theta_1 \Rightarrow \boxed{F_{I1} = \frac{3M_{pl}}{L}}$

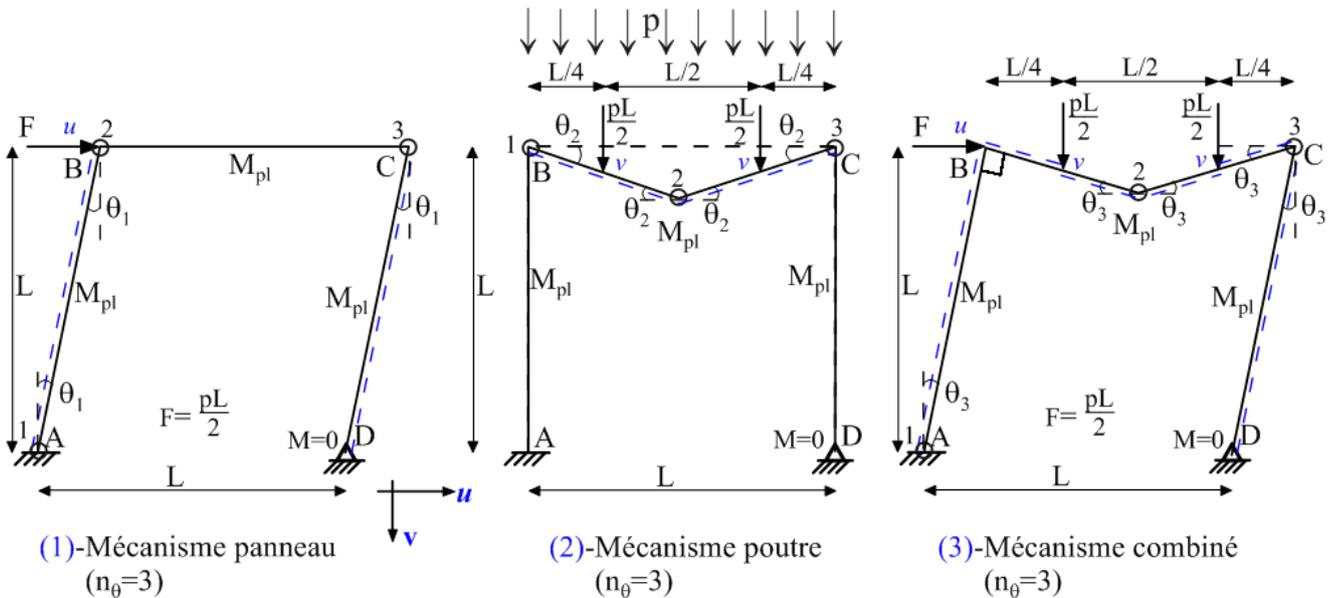


Figure 3-10- Vue des mécanismes de ruine dominants du cas (b) sous l'effet du trajet de chargement.

Mécanisme (2): $\Rightarrow M_{pl}\theta_2 + 2M_{pl}\theta_2 + M_{pl}\theta_2 = 4M_{pl}\theta_2 = 2Fv = 2 \frac{pL}{2} \frac{L}{4} \theta_2 = \frac{FL}{2} \theta_2$

$$8M_{pl}\theta_2 = FL\theta_2 \Rightarrow \boxed{F_{I2} = \frac{8M_{pl}}{L}}$$

Mécanisme (3): $\Rightarrow M_{pl}(2\theta_3) + M_{pl}(3\theta_3) = Fu + 2 \frac{pL}{2} v = FL\theta_3 + 2F \frac{L}{4} \theta_3 = \frac{3FL}{2} \theta_3$

$$5M_{pl}\theta_3 = \frac{3FL}{2} \theta_3 \Rightarrow \boxed{F_{I3} = \frac{10}{3} \frac{M_{pl}}{L} \approx 3.33 \frac{M_{pl}}{L}}$$

Charges limites: $F_l = \min(F_{l1}; F_{l2}; F_{l3}) = F_{l1} \rightarrow F_l = \frac{3M_{pl}}{L} ; p_l = \frac{6M_{pl}}{L^2}$

Ce qui correspond au mécanisme de ruine (n°1) de type panneau (voir Figure 3-10).

3.3 Aspects réglementaires de conception parasismique

La réglementation technique en vigueur édicte certaines règles de conception des structures en portiques et mixtes en zones sismiques pour permettre un meilleur comportement sismique et pallier toute apparition de rotules dans des zones vulnérables de la structure.

A cet effet, les règlements RPA 2003 et EC8 (CGS, 2003; Eurocode8, 2008) prescrivent des exigences en termes de proportion des moments résistant plastiques aux niveaux des zones nodales des portiques afin de privilégier le développement des rotules plastiques dans les poutres au lieu des poteaux (Figure 3-11). Cette disposition contribue à se prémunir des écroulements spontanés (mécanismes de ruine) sous l'effet dévastateur des séismes. La Figure 3-12 illustre la distribution des rotules plastiques dans un portique sous forces horizontales en fonction des (M_{pl}).

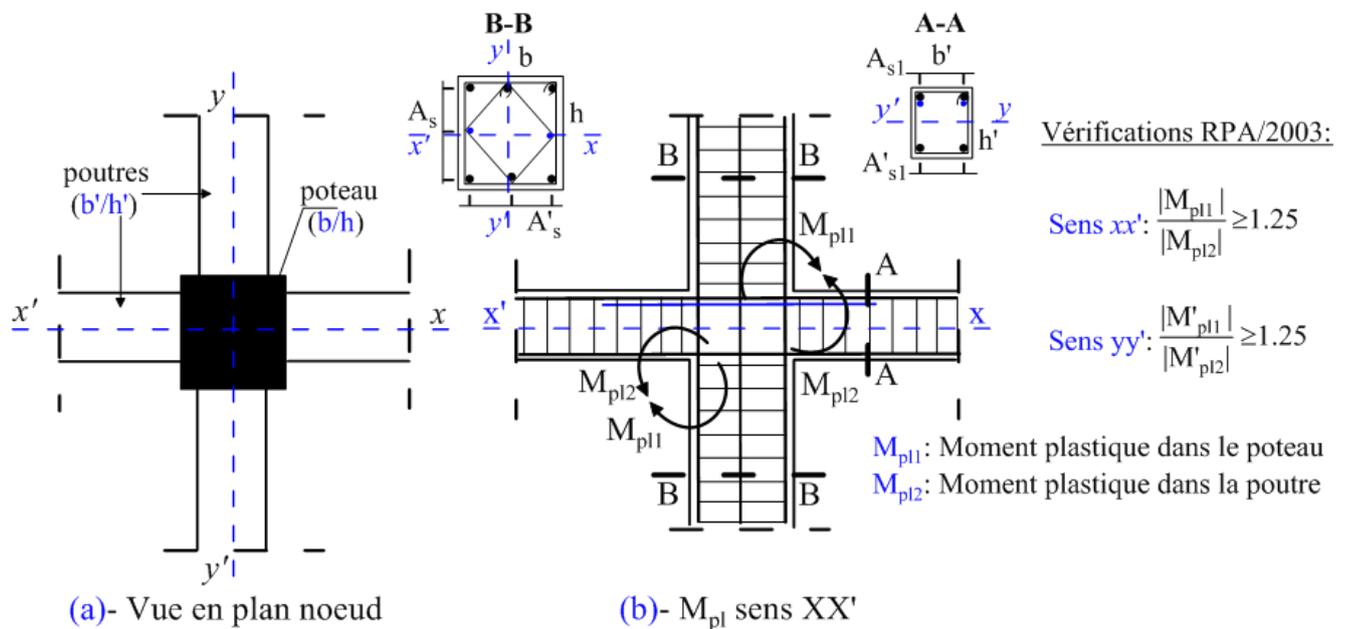


Figure 3-11- Vérification d'un nœud poteau- poutre dans les portiques d'après le RPA 2003.

Par ailleurs, l'expérience montre que la fissuration prédomine les structures en béton armé dans le domaine élastoplastique. Contrairement aux ouvrages de charpente métallique réputés homogènes et ductiles, en béton armé, le moment limite plastique (M_{pl}) n'est pas le même dans les deux sens de flexion (xx' et yy') à cause de la dissymétrie géométrique ou de répartition du ferrailage (Figure 3-11). Par voie de conséquence, la rotule plastique est généralement fragile vis à vis des trajets de chargement alternés (Fuentes, 2017).

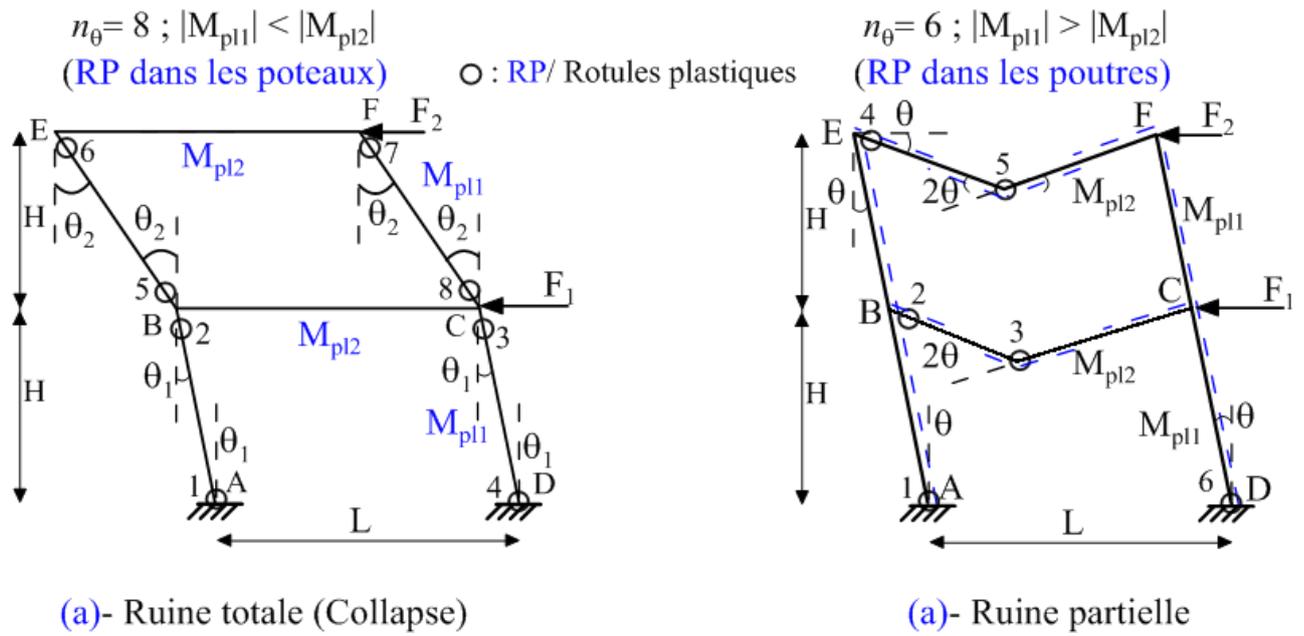


Figure 3-12- Influence des moments résistant plastiques sur la distribution des rotules.

4 Chapitre 4

Géotechnique: élastoplasticité appliquée
au comportement des sols

PROBLEME1

4.1 Comportement d'un matériau sans cohésion

Nous cherchons à définir une loi de comportement pour un matériau sans cohésion (un sable par exemple). Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre des lois de comportement élastoplastiques.

La loi de comportement élastique est isotrope, elle est définie par le coefficient de Poisson ν et le module d'Young E . La loi plastique est définie à partir du critère de Drucker Prager qui s'écrit:

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha I_1 - \sqrt{-J_2} = 0$$

$$\text{Avec : } I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad s_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3}, \quad J_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3$$

Toute l'analyse sera faite en directions principales.

4.1.1 Plasticité parfaite, loi associée

- Ecrire le critère f en fonction des contraintes principales
- Ecrire le critère f dans le cas particulier où $\sigma_2 = \sigma_3$ (solicitation axisymétrique)

On se placera dans cette hypothèse dans toute la suite de l'analyse

- Représenter ce critère dans les axes σ_1, σ_3 ainsi que dans le plan déviatoire perpendiculaire à la trisectrice des axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.
- Sachant que lors d'un essai triaxial axisymétrique, la rupture est atteinte pour $\sigma_2 = \sigma_3 = 100$ kPa et $(\sigma_2 - \sigma_3) = 200$ kPa, calculez la valeur de α et déduire l'angle de frottement φ du matériau.
- Montrer que sur le critère, le rapport σ_1 / σ_3 est constant. Calculez la valeur de ce rapport.
- Exprimez les déformations plastiques.
- Calculez l'incrément de déformation plastique volumique en fonction de l'incrément de déformation plastique $\dot{\epsilon}_1^p$

Des résultats expérimentaux ont permis de montrer que lors d'une sollicitation avec $\sigma_1 > \sigma_3$:

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\epsilon}_1^p + 2\dot{\epsilon}_3^p = -0.2\dot{\epsilon}_1^p$$

Que peut-on dire de la loi plastique. Proposez l'expression d'un potentiel plastique.

4.1.2 Plasticité avec écrouissage isotrope

La loi proposée en (4.1) n'est qu'une approximation grossière de la réalité. Nous considérons maintenant dans le critère $f(\sigma_{ij})$, α évolue en fonction du paramètre p par :

$$\dot{p} = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1^p)^2 + 2(\dot{\varepsilon}_3^p)^2}$$

La Figure 4-1 représente les résultats d'un essai triaxial axisymétrique. A partir de cet essai:

- Tracer la courbe $\alpha=f(p)$ qui caractérise l'écrouissage.
- Tracer la courbe expérimentale $\varepsilon_v^p=f(\varepsilon_1^p)$
- Dans l'hypothèse où le matériau satisfait à l'hypothèse de normalité, calculez pour $\varepsilon_1^p=1\%$, 2% et 4% la pente théorique de cette courbe. Comparez avec la pente réelle. Commentez.
- Proposez un potentiel plastique qui permette d'avoir un comportement plus réaliste. Commentez.

4.1.3 Analyse et conclusion

A partir des éléments ainsi définis, précisez de façon claire le processus permettant de décrire le comportement du matériau sous une sollicitation à contrainte moyenne constante.

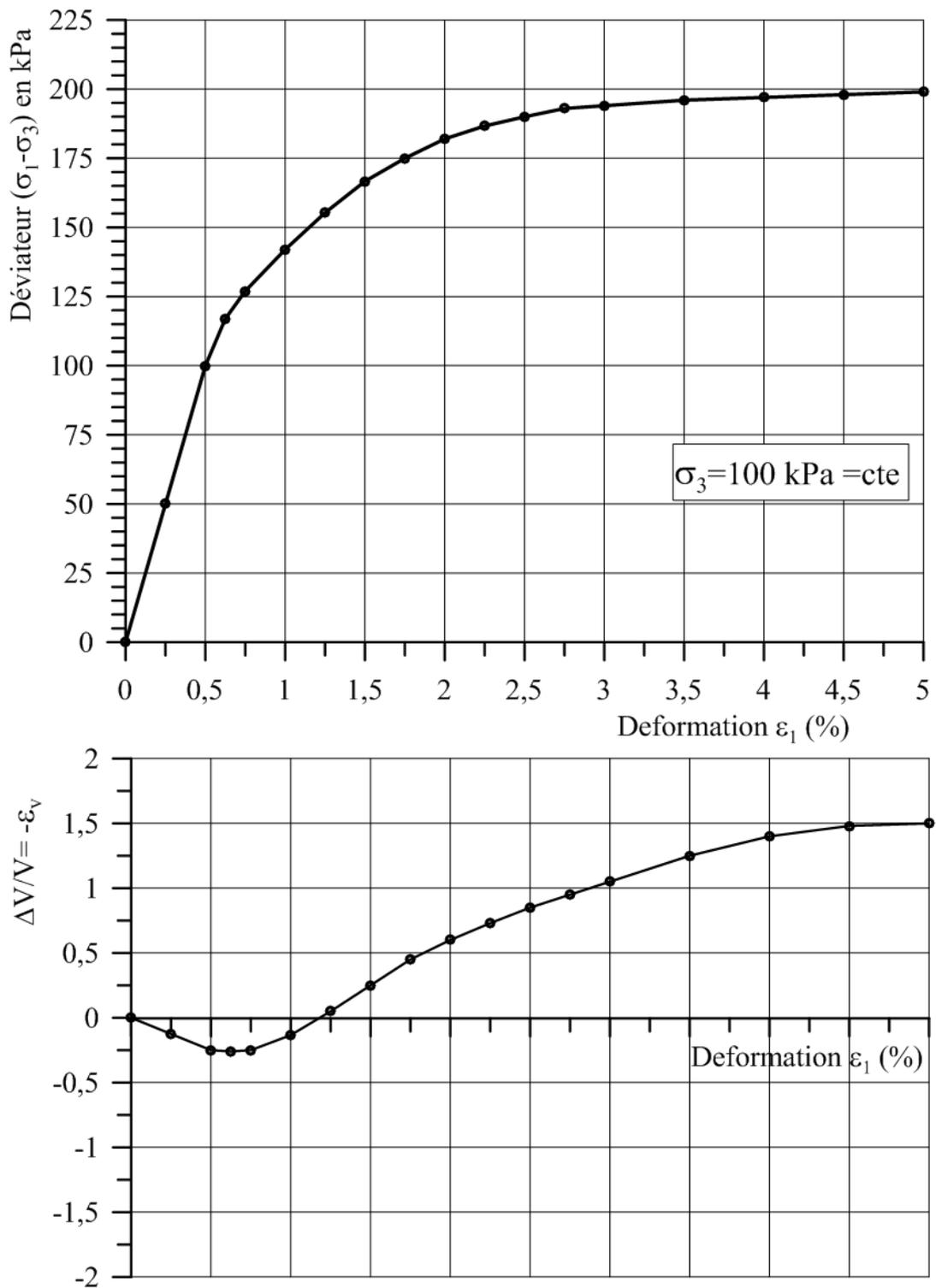


Figure 4-1- Résultats d'un essai triaxial axisymétrique.

SOLUTION

I- Plasticité parfaite, loi associée

- Loi élastique isotrope définie par les paramètres mécaniques E et ν

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

La plasticité est définie à partir du critère de Drucker Prager par :

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha I_1 - \sqrt{-J_2} = 0$$

$$\text{Avec : } I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad s_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3}, \quad J_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3$$

1) Ecriture de f en fonction des contraintes principales

$$J_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3$$

$$s_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}, \quad s_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}, \quad s_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

$$s_1 s_2 = \frac{1}{9} \left[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2 \right] = \frac{1}{9} \left[5\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3^2 \right]$$

$$s_2 s_3 = \frac{1}{9} \left[(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^2 \right] = \frac{1}{9} \left[5\sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_2^2 - 2\sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_1^2 \right]$$

$$s_1 s_3 = \frac{1}{9} \left[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^2 \right] = \frac{1}{9} \left[5\sigma_1 \sigma_3 - 2\sigma_1^2 - 2\sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2^2 \right]$$

$$J_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = \frac{1}{9} \left[3\sigma_1 \sigma_2 + 3\sigma_2 \sigma_3 + 3\sigma_1 \sigma_3 - 3\sigma_1^2 - 3\sigma_2^2 - 3\sigma_3^2 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 \right]$$

$$J_2 = -\frac{1}{6} \left[2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_2 \sigma_3 - 2\sigma_1 \sigma_3 \right]$$

$$J_2 = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] = -\frac{s_{ij} s_{ij}}{2}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha I_1 - \sqrt{-J_2} = \alpha(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - \sqrt{\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]} = 0 \quad \dots (1)$$

Cas de sollicitation axisymétrique (triaxial: $\sigma_2 = \sigma_3$)

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0 \quad \dots (2)$$

On se placera dans cette hypothèse dans toute la suite de l'analyse :

- Dans l'espace E^3 des contraintes $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, l'équation (1) de $f(\sigma_{ij})$ représente un cône de trisectrice la droite d'équation $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3)$ et dans le plan déviatoire π (perpendiculaire à la trisectrice), il s'agit d'un cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon r .

Calcul de la valeur de α

A la rupture : $\sigma_2 = \sigma_3 = 100 \text{ kPa}$, $q = \sigma_1 - \sigma_3 = 200 \text{ kPa}$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 200 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_3 + 200 = 300 \text{ kPa}$$

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_R}{\sqrt{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)_R}}$$

$$\alpha = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_R}{\sqrt{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)_R} = \frac{200}{\sqrt{3}(300 + 200)} = \frac{200}{866} = 0.23$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2\sqrt{3}\alpha + 1}{1 - \sqrt{3}\alpha} = \frac{1.796}{0.601} = 2.98 \approx 3 = \text{cte} \quad \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \approx 3 = \text{cte}}$$

- **Angle de frottement**: cohésion $c = 0$ (sable)

$$\text{Critère de Mohr-Coulomb: } (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi - \overbrace{2c \times \cos \varphi}^{=0} = 0$$

$$\sigma_1(1 - \sin \varphi) - (1 + \sin \varphi)\sigma_3 = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = K_p = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right)$$

Par identification au critère de Drucker Prager :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2\sqrt{3}\alpha + 1}{1 - \sqrt{3}\alpha} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \Rightarrow (1 - \sin \varphi)(2\sqrt{3}\alpha + 1) = (1 + \sin \varphi)(1 - \sqrt{3}\alpha)$$

$$\text{Après développement et séparation des variables: } \boxed{\sin \varphi = \frac{3\sqrt{3}\alpha}{2 + \sqrt{3}\alpha} = \frac{1.195}{2.398} = 0.498 \approx 0.5}$$

$$\boxed{\sin \varphi = 0.5 \Rightarrow \varphi = 30^\circ}$$

- **Déformations plastiques**:

$$\text{Plasticité: } \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \dot{\lambda} > 0$$

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha I_1 - \sqrt{-J_2} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \text{ (cte)}$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \dot{\lambda} \left(\alpha \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial}{\partial \sigma_1} (-J_2)^{1/2} \right) = \dot{\lambda} \left(\alpha \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_1} - \frac{1}{2\sqrt{-J_2}} \frac{\partial (-J_2)}{\partial \sigma_1} \right) \\ &= \dot{\lambda} \left[\alpha - \frac{1}{2\sqrt{-J_2}} \left(\frac{2}{6} (\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_3) \right) \right] = \dot{\lambda} \left[\alpha - \frac{1}{2\sqrt{-J_2}} \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \right) \right] \\ &= \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{s_1}{2\sqrt{-J_2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Formule générale: } \boxed{\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \left(\alpha \delta_{ij} - \frac{s_{ij}}{2\sqrt{-J_2}} \right) \dots (3)}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Cas : } f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - k = \sqrt{\frac{s_{ij}s_{ij}}{2}} + \alpha I_1 - k = 0 \rightarrow \boxed{d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \left(\alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right)}$$

$$\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{s_2}{2\sqrt{-J_2}} \right), \quad \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{s_3}{2\sqrt{-J_2}} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p + \dot{\varepsilon}_2^p + \dot{\varepsilon}_3^p = -\frac{\Delta V}{V} = \dot{\lambda} \left(3\alpha - \frac{\text{tr}(s)}{2\sqrt{-J_2}} \right) = 3\alpha\dot{\lambda}$$

$$\text{En sollicitation axisymétrique : } \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sqrt{-J_2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{3}}, \quad s_1 = \frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{3}, \quad s_2 = s_3 = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3}$$

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{s_1}{2\sqrt{-J_2}} \right) = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{\frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{3}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}}} \right) = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{1}{2} \frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{(\sigma_1 - \sigma_3)} \right)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{3\alpha - \sqrt{3}}{3} \dot{\lambda}}$$

$$\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{s_2}{2\sqrt{-J_2}} \right) = \dot{\lambda} \left(\alpha - \frac{-\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}}} \right) = \dot{\lambda} \left(\alpha + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2(\sigma_1 - \sigma_3)} \right)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{6\alpha + \sqrt{3}}{6} \dot{\lambda}}$$

- **Incrément de déformation plastique volumique :**

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{ii}^p = \dot{\varepsilon}_v^p = -\frac{\Delta V}{V} = \dot{\varepsilon}_1^p + 2\dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\varepsilon}_1^p \left(1 + 2 \frac{\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} \right) = \left(1 + 2 \frac{\frac{6\alpha + \sqrt{3}}{6} \dot{\lambda}}{\frac{3\alpha - \sqrt{3}}{3} \dot{\lambda}} \right) \dot{\varepsilon}_1^p = \left(1 + \frac{6\alpha + \sqrt{3}}{3\alpha - \sqrt{3}} \right) \dot{\varepsilon}_1^p$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_v^p = \frac{9\alpha}{3\alpha - \sqrt{3}} \dot{\varepsilon}_1^p}$$

$$\text{AN : } \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{9 \times 0.23}{3 \times 0.23 - \sqrt{3}} \dot{\varepsilon}_1^p = -\frac{2.07}{1.042} \dot{\varepsilon}_1^p = -1.986 \dot{\varepsilon}_1^p \approx -2 \dot{\varepsilon}_1^p$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}_v^p = -2 \dot{\varepsilon}_1^p \rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = -2}$$

D'après des résultats expérimentaux : $d\varepsilon_v^p = \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p + 2\dot{\varepsilon}_3^p = -0.2\dot{\varepsilon}_1^p$, $\sigma_1 > \sigma_3$

$$d\varepsilon_v^p = \dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\varepsilon}_1^p + 2\dot{\varepsilon}_3^p = -0.2\dot{\varepsilon}_1^p \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = -0.2 \neq -2 \dots (4)$$

On dit que la loi plastique est non associée ($\varphi \neq \psi$), matériau non standard ($f \neq g$).

Potentiel plastique (g):

$$g(\sigma_{ij}) = \beta \text{tr}(\sigma_{ij}) - \sqrt{-J_2} = \beta(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{2\sqrt{3}\beta}{1 - \sqrt{3}\beta} \dots (5)$$

Identification avec le critère de Mohr- Coulomb (MC):

$$g_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\psi = 0, \text{ avec } \sigma_1 > \sigma_3 \rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi} \dots (6)$$

ψ est l'angle de dilatance du matériau.

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_1} = (1 - \sin\psi)\lambda, \quad \dot{\varepsilon}_3^p = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_3} = -(1 + \sin\psi)\lambda, \quad \dot{\varepsilon}_2^p = \lambda \frac{\partial g_1}{\partial \sigma_2} = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = (1 - \sin\psi - 1 - \sin\psi)\lambda = -2\lambda \sin\psi \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-2\sin\psi}{1 - \sin\psi} \dots (7)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-2\sin\psi}{1 - \sin\psi} = -0.2 \Rightarrow \sin\psi = \frac{0.2}{2.2} = 0.091; \quad \psi = \arcsin(0.091) \Rightarrow \psi = 5.2^\circ$$

$$(5) \text{ et } (6): \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi} = \frac{2\sqrt{3}\beta}{1 - \sqrt{3}\beta} \Rightarrow \sin\psi = \frac{3\sqrt{3}\beta}{2 + \sqrt{3}\beta} \text{ et } \beta = \frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}(3 - \sin\psi)}$$

Voir aussi la référence de l'auteur (**Hicher, 2002**), page 137.

$$(5) \text{ et } (6): \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi} = \frac{2\sqrt{3}\beta}{1 - \sqrt{3}\beta} \Rightarrow \sin\psi = \frac{3\sqrt{3}\beta}{2 + \sqrt{3}\beta} \text{ et } \beta = \frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}(3 - \sin\psi)}$$

$$\beta = \frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}(3 - \sin\psi)} = 0.036$$

$$\text{Expression du potentiel plastique: } g(\sigma_{ij}) = \beta(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0, \text{ avec: } \beta = 0,036$$

II- Plasticité avec écrouissage isotrope

$$f(\sigma_{ij}) = \alpha(p)I_1 - \sqrt{-J_2} = \alpha(p)(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0 \dots (8)$$

$$\dot{p} = dp = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1^p)^2 + 2(\dot{\varepsilon}_3^p)^2}, \text{ p est un paramètre d'écrouissage.}$$

- **Traçage de la courbe caractérisant l'écrouissage** (Figure 4-1):

D'après l'équation (8):

$$\alpha(p)(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha(p) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)} \dots\dots(9)} \rightarrow \begin{cases} \sigma_3 = 100 \text{ kPa} \\ 100 < \sigma_1 \leq 300 \text{ kPa} \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \frac{3\alpha - \sqrt{3}}{3} \dot{\lambda}, \quad \dot{\varepsilon}_3^p = \frac{6\alpha + \sqrt{3}}{6} \dot{\lambda}$$

$$\dot{p} = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1^p)^2 + 2(\dot{\varepsilon}_3^p)^2} = \dot{\varepsilon}_1^p \sqrt{1 + 2\left(\frac{\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p}\right)^2} = \dot{\varepsilon}_1^p \sqrt{1 + \frac{1}{2} \frac{(6\alpha + \sqrt{3})^2}{(3\alpha - \sqrt{3})^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 1}}{|3\alpha - \sqrt{3}|} \dot{\varepsilon}_1^p$$

$$p = \int_0^p dp = \int_0^{\varepsilon_1^p} \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 1}}{|3\alpha - \sqrt{3}|} d\varepsilon_1^p = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 1}}{|3\alpha - \sqrt{3}|} \varepsilon_1^p$$

$$\boxed{p = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6\alpha^2 + 1}}{|3\alpha - \sqrt{3}|} \varepsilon_1^p \dots\dots(10)}$$

D'après (Drucker D.C and Prager W, 1951): $\dot{\varepsilon}_{ii}^p = \dot{\varepsilon}_v^p = \frac{3\alpha}{\sqrt{6\alpha^2 + 1}} \sqrt{2\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p}$

Sachant que d'après l'élasticité linéaire (Rafal F.O and Andrzej T, 2018), on peut tirer les relations suivantes (pages 23 à 25):

$$\varepsilon_1^e = \frac{q}{E_{ur}}, \quad \varepsilon_2^e = \varepsilon_3^e = \nu \varepsilon_1^e, \quad \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \cong \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{-2 \sin \psi}{1 - \sin \psi}, \quad \frac{E_{ur}}{E} = 1,07 \text{ à } 1,34 \dots\dots(11)$$

$$\int_0^{\varepsilon_v^p} d\varepsilon_v^p = \frac{9\alpha}{3\alpha - \sqrt{3}} \int_0^{\varepsilon_1^p} d\varepsilon_1^p \Rightarrow \varepsilon_v^p = \frac{9\alpha}{3\alpha - \sqrt{3}} \varepsilon_1^p \dots\dots(12)$$

En compilant les expressions 9 à 12, on consolide les données dans le Tableau 4-1.

Tableau 4-1- Traçage de la courbe $\alpha = f(p)$ caractérisant l'écroûissage isotrope.

$\sigma_1 - \sigma_3$ (kPa)	σ_1 (kPa)	$\sigma_1 + 2\sigma_3$ (kPa)	α (p)	ε_1 (%)	ε_1^e (%)	ε_1^p (%)	p (%)	ε_v (%)
0	100	300						
100	200	400	0,144	0,500	0,500	0,000	0,00	0,00
120	220	420	0,165	0,650	0,600	0,050	0,09	-0,06
140	240	440	0,184	1,000	0,700	0,300	0,59	-0,42
160	260	460	0,201	1,370	0,800	0,570	1,19	-0,91
180	280	480	0,217	2,000	0,900	1,100	2,44	-1,98
200	300	500	0,231	5,000	1,000	4,000	9,38	-8,00

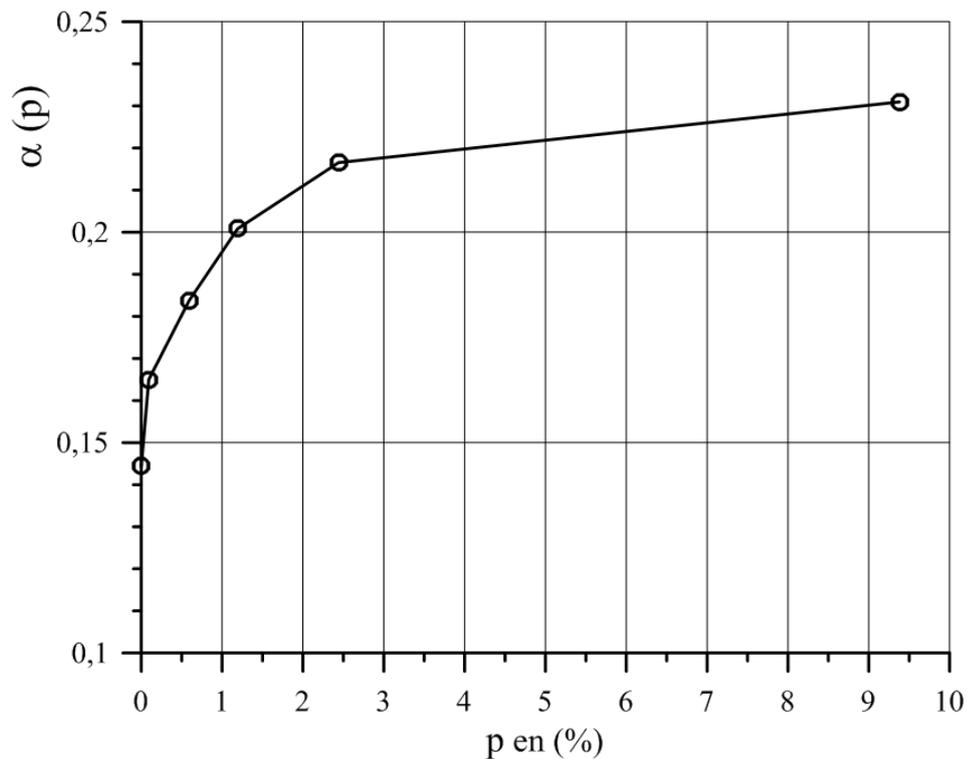


Figure 4-2- Courbe $\alpha = f(p)$ caractérisant l'écroutissement isotrope.

- **Courbe expérimentale** $\varepsilon_v^p = f(\varepsilon_1^p)$:

D'après la courbe (Figure 4-1), le module de Young E et le coefficient de Poisson ν sont calculés comme suit :

$$E = \frac{\Delta q}{\Delta \varepsilon_1} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_e}{\varepsilon_1^e} = \frac{100}{0.5\%} = 2 \times 10^4 \text{ kPa} \Rightarrow \boxed{E = 20 \text{ MPa}}$$

$$\text{Partie élastique: } \left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_1} \right)_e = \left(\frac{\Delta \varepsilon_v}{\Delta \varepsilon_1} \right)_e = 1 - 2\nu = \frac{0.25}{0.50} = 0.5 \Rightarrow \boxed{\nu = 0,25}$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_3 \Rightarrow \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_1}{2} = \varepsilon_3^e + \varepsilon_3^p \rightarrow \varepsilon_3^p = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_1}{2} - \varepsilon_3^e = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_1}{2} - \nu \varepsilon_1^e$$

$$\varepsilon_3^p = \frac{\varepsilon_v - \varepsilon_1}{2} - \nu \varepsilon_1^e \quad \boxed{\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_3^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_v - \varepsilon_1 - 2\nu \varepsilon_1^e \dots (13)}$$

L'expression (13) est traduite numériquement dans le Tableau 4-2 et la courbe expérimentale $\varepsilon_v^p = f(\varepsilon_1^p)$ est représentée sur la Figure 4-3.

- **Pente théorique** ε_v^p pour $\varepsilon_1^p = 1\%$, 2% et 4% :

Dans l'hypothèse où le matériau satisfait à l'hypothèse de normalité : $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$, $\dot{\lambda} > 0$

Tableau 4-2- Traçage de la courbe expérimentale $\epsilon_v^p = f(\epsilon_1^p)$

$\sigma_1 - \sigma_3$ (kPa)	σ_1 (kPa)	α (p)	ϵ_1 (%)	ϵ_v (%)	ϵ_1^e (%)	ϵ_1^p (%)	ϵ_3^p (%)	ϵ_v^p (%)
0	100	0,000	0,000	0,000	0,00	-	-	-
50	150	0,082	0,250	-0,125	0,25	-	-	-
100	200	0,144	0,500	-0,250	0,50	0,00	-0,50	-1,00
117	217	0,162	0,625	-0,260	0,59	0,04	-0,59	-1,14
127	227	0,172	0,750	-0,250	0,64	0,12	-0,66	-1,20
142	242	0,185	1,000	-0,134	0,71	0,29	-0,74	-1,20
155,3	255,3	0,197	1,250	0,050	0,78	0,47	-0,79	-1,11
166,7	266,67	0,206	1,500	0,250	0,83	0,67	-0,83	-1,00
175	275	0,213	1,750	0,450	0,88	0,88	-0,87	-0,86
182	282	0,218	2,000	0,600	0,91	1,09	-0,93	-0,77
186,7	286,67	0,221	2,250	0,730	0,93	1,32	-0,99	-0,67
190	290	0,224	2,500	0,850	0,95	1,55	-1,06	-0,58
193	293	0,226	2,750	0,950	0,97	1,79	-1,14	-0,50
194	294	0,227	3,000	1,050	0,97	2,03	-1,22	-0,41
196	296	0,228	3,500	1,250	0,98	2,52	-1,37	-0,22
197	297	0,229	4,000	1,400	0,99	3,02	-1,55	-0,08
198	298	0,230	4,500	1,480	0,99	3,51	-1,76	-0,01
200	300	0,231	5,000	1,500	1,00	4,00	-2,00	0,00

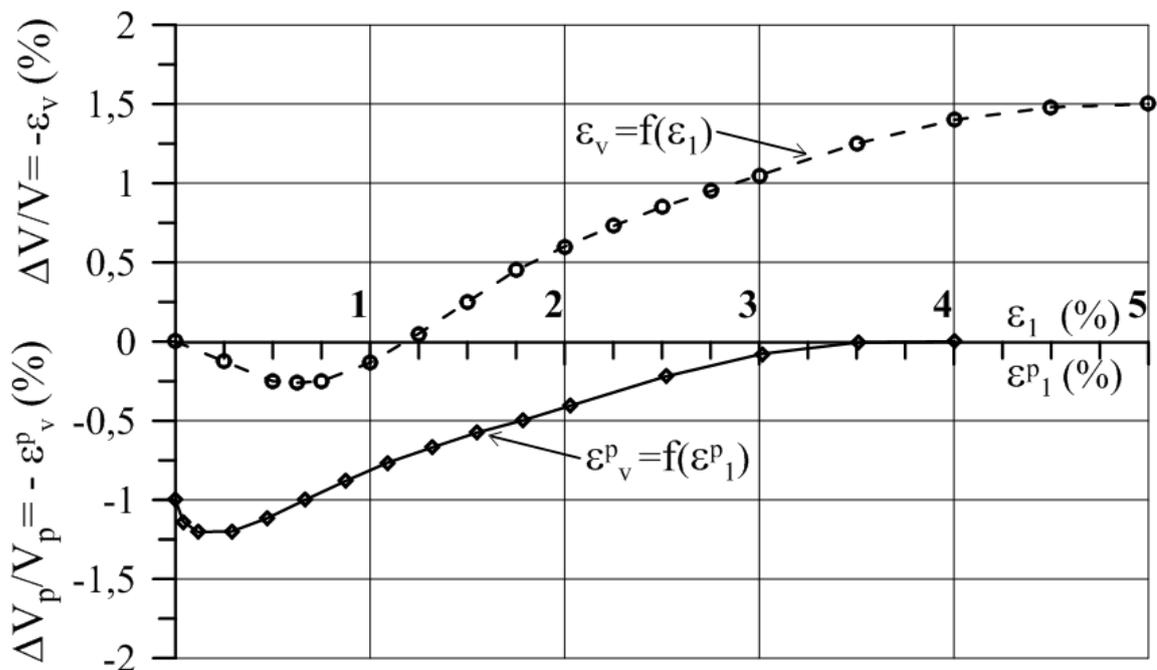


Figure 4-3- Courbe expérimentale $\epsilon_v^p = f(\epsilon_1^p)$

Courbe $(\epsilon_v^p = f(\epsilon_1^p)) \Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{d\epsilon_v^p}{d\epsilon_1^p} \cong \frac{\Delta\epsilon_v^p}{\Delta\epsilon_1^p}$, les résultats sont traduits dans le Tableau 4-3.

Tableau 4-3- Pente théorique de la courbe expérimentale $\varepsilon_v^p = f(\varepsilon_1^p)$

ε_1^p (%)	1%	2%	3%	4%
tg θ : Pente à partir de la courbe $\varepsilon_v^p = f(\varepsilon_1^p)$	-0.53	-0.40	-0.29	0.0
tg θ : Pente réelle à partir de la courbe $\varepsilon_v = f(\varepsilon_1)$	-0.67	-0.53	-0.41	-0.14

D'après les résultats numériques des pentes (Tableau 4-3), on dénote des écarts relatifs de l'ordre de 20%. Par ailleurs, la Figure 4-3 montre une certaine concordance dans la pente des deux courbes. On peut conclure alors que:

$$\text{tg}\theta = \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \cong \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p}$$

- Potentiel plastique g :

$$\text{tg}\theta = \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = \frac{-2\sin\psi}{1-\sin\psi} \Rightarrow \sin\psi = \frac{\text{tg}\theta}{\text{tg}\theta - 2} = \frac{-0.53}{-0.53 - 2} = 0.209 \Rightarrow \psi \cong 12^\circ$$

$$\sin\psi = \frac{3\sqrt{3}\beta}{2 + \sqrt{3}\beta} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{2\sin\psi}{\sqrt{3}(3 - \sin\psi)} = 0.086$$

$$g(\sigma_{ij}) = \beta \text{tr}(\sigma_{ij}) - \sqrt{-J_2} = \beta(\sigma_1 + 2\sigma_3) - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}} = 0, \quad \text{avec : } \beta = 0.086$$

III- Comportement du matériau sous une sollicitation à contrainte moyenne constante:

Quand la contrainte moyenne est constante,

VI. COURS

- Lorsqu'on induit des contraintes de cisaillement dans un sol cohérent saturé, on engendre des surpressions interstitielles due à la faible perméabilité du matériau.
- Au passage d'une dépression constituée d'alluvions récentes de caractéristiques médiocres (faible portance et compressibilité élevée), on peut envisager une solution technique alternative par rapport aux pieux consistant en un renforcement du sol par le procédé des colonnes ballastées. Il s'agit d'inclusions souples constituées d'une série de pré-forages remplis d'agrégats de ballast ($\phi 10-42.5$ mm) vibro-compactés. Ce procédé a l'avantage du respect de l'environnement (nappes phréatiques) de par l'incorporation de matériaux locaux, drainants et résistants.

PROBLEME2

4.2 Comportement d'une argile saturée en condition non drainée

Ce problème porte sur la modélisation du comportement d'une argile saturée en condition non drainée. Nous disposons d'un résultat d'un essai de compression simple sur un échantillon de cette argile (Fig.4-4) (essai rapide).

A- Modélisation élastoplastique, en plasticité parfaite, loi associée (matériau standard). Une formule utile est donnée à la fin du problème.

La loi de comportement élastique est isotrope, elle est définie par le coefficient de Poisson ν et le module de Young E . Nous analysons 2 critères possibles.

- Le critère de Tresca :

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - k = 0 \quad \text{avec } \sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$$

- Le critère de Von Mises :

$$f_2 = s_{II} - R = 0 \quad \text{avec } s_{II} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$$

s_i étant les composantes principales du déviateur.

- 1) D'après le résultat de l'essai, déterminez la valeur de la cohésion non drainée c_u de cette argile. Exprimez k et R en fonction de c_u . Calculez leur valeur numérique.
- 2) Quelle est la variation de volume qui se produit lors de l'essai. Pour que les déformations volumiques élastiques satisfassent à cette condition, quelle est la valeur de ν qu'il faut prendre en compte (démontrez le). Exprimez les incréments de déformations plastiques et démontrez que la condition est automatiquement remplie pour les déformations volumiques plastiques si l'en prend en compte les critères f_1 ou f_2 .
- 3) D'après l'essai, déterminez la valeur de E à prendre en compte. Tracez alors la modélisation obtenue pour la courbe $\sigma_1(\varepsilon_1)$ dans un essai de compression simple.
 - avec E , ν et f_1
 - avec E , ν et f_2 .

- 4) A l'aide d'un appareil véritablement triaxial, on réalise un essai tel que $\sigma_3 = 0$ et $\sigma_2 = 60$ kPa restent constants et σ_1 égal à σ_3 au début de l'essai est augmentée jusqu'à la rupture. Pour cet essai, calculez le rapport $\dot{\varepsilon}_2^p / \dot{\varepsilon}_1^p$ et $\dot{\varepsilon}_3^p / \dot{\varepsilon}_1^p$ et tracez la modélisation obtenue pour la courbe $\sigma_1(\varepsilon_1)$:
 - avec E , ν et f_1
 - avec E , ν et f_2 .

B- Modélisation élastoplastique avec écrouissage. On considère le critère de Von Mises avec écrouissage.

$$s_{II} - R(\alpha) = 0$$

α est le paramètre d'écrouissage que l'on prendra égal à $\alpha = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2}$

(ε_i^p) étant les déformations plastiques principales.

- 1) On suppose que le comportement peut être supposé élastique, dans l'essai réalisé pour $\varepsilon_1 < 0.5\%$. Déterminez les limites entre lesquelles $R(\alpha)$ évolue au cours de l'essai. Déterminez la valeur des paramètres E et ν . Pour cet essai exprimez α en fonction de (ε_1^p)
- 2) Tracez point par point la courbe $R(\alpha)$ que l'on peut déduire de la courbe expérimentale (expliquez clairement comment se fait ce tracé). On supposera que cette courbe peut être approximée par la formulation analytique suivante pour $\varepsilon_1 < 3\%$.

$$R = R_0 \alpha^n$$

Déterminez R_0 et n .

- 3) Pour l'essai décrit en A-4, déterminez l'expression analytique liant ε_1^p , s_1 et s_{II} .

Tracez point par point la courbe $\sigma_1(\varepsilon_1)$ que l'on obtiendrait dans un tel essai.

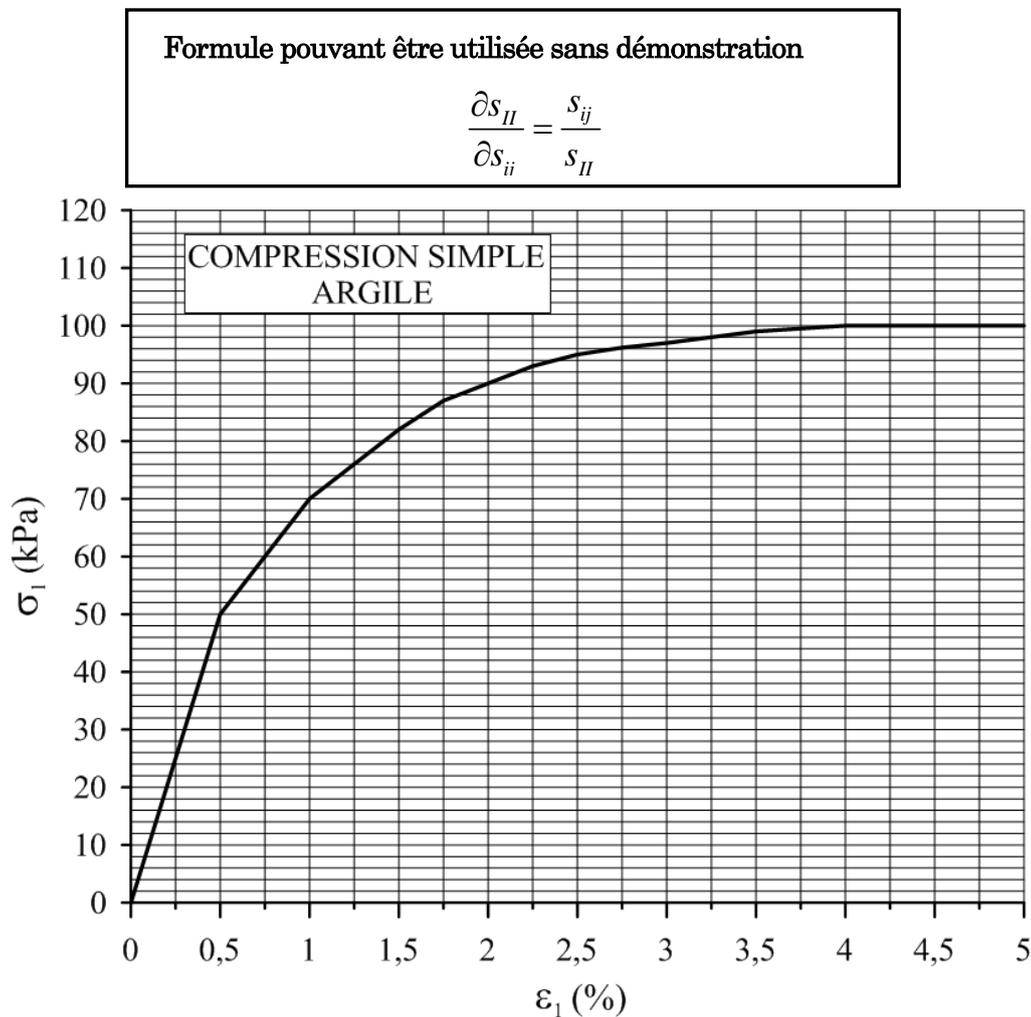


Figure 4-4- Essai de compression simple.

SOLUTION

A- Modélisation élastoplastique

- Loi élastique isotrope définie par les paramètres mécaniques E et ν

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$(1) \quad \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$(2) \quad \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \rightarrow \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$(3) \quad \varepsilon_{33} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \rightarrow \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

$$(4) \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}$$

- Critères de rupture

- Le critère de Tresca: $f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - k = 0$

- Le critère de Von Mises: $f_2 = s_{II} - R = 0 = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} - R = 0$

$$s_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3} \delta_{ij} = \sigma_i - \frac{\sigma_{kk}}{3} \delta_{ij}, \quad s_i \quad (i=1, 2 \text{ et } 3) : \text{ les composantes principales du déviateur.}$$

$$\Rightarrow s_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}, \quad s_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \quad \text{et} \quad s_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

$$s_{II}^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \right)^2 + \left(\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \right)^2$$

$$s_{II}^2 = \frac{1}{9} \left[(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)^2 + (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[4\sigma_1^2 - 4\sigma_1(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_2^2 - 4\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_3 \right. \\ \left. + 4\sigma_3^2 - 4\sigma_3(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \right]$$

$$s_{II}^2 = \frac{1}{9} \left[4\sigma_1^2 - 4\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 4\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_2 - 4\sigma_2\sigma_3 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_3 \right. \\ \left. + 4\sigma_3^2 - 4\sigma_3\sigma_1 - \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 \right]$$

$$= \frac{1}{9} \left[6\sigma_1^2 + 6\sigma_2^2 + 6\sigma_3^2 - 6\sigma_1\sigma_2 - 6\sigma_1\sigma_3 - 6\sigma_2\sigma_3 \right] = \frac{3}{9} \left[2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_3 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\sigma_2\sigma_3 \right]$$

$$s_{II}^2 = \frac{1}{3} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right]$$

$$s_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}, \quad \boxed{s_{II} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}}}$$

1. Valeur de la cohésion non drainée c_u

S'agissant d'un essai de compression simple (échantillon non confiné) $\Rightarrow \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, $\sigma_1 > 0$

$$\text{A la rupture, nous avons : } c_u = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_R}{2} = \frac{\sigma_{1R}}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ kPa} \Rightarrow \boxed{c_u = 50 \text{ kPa}}$$

Identification des paramètres k et R :

- $f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - k = 0 \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)_R = k = 2c_u \Rightarrow \boxed{k = 100 \text{ kPa}}$
- $f_2 = s_{II} - R = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{1R} - R = 0 \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{1R} = 81.65 \text{ kPa}}$

2. Déformations volumiques ε_v .

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \rightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = -\frac{\Delta V}{V} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ii} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ii} = \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_{kk}$$

$$\sigma_{kk} = \text{tr}(\sigma_{ij}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1$$

Sur la partie élastique

$$\varepsilon_v = \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_1 \rightarrow \varepsilon_v = 0 \Rightarrow 1-2\nu = 0 \Rightarrow \boxed{\nu = 0.5},$$

Dans le domaine élastique, la condition d'incompressibilité se traduit par $\nu = 1/2$. Pour que $\varepsilon_v = 0$, quelle que soit la sollicitation, il faut que $\nu = 0.5$

Déformations plastiques volumique ε_v^p

Loi de normalité $\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$, $\dot{\lambda} > 0$: multiplicateur plastique.

▪ Critère de **Tresca** :

$$f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - k = 0 \Rightarrow \begin{cases} d\varepsilon_1^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} = \dot{\lambda} \\ d\varepsilon_2^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} = 0 \\ d\varepsilon_3^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} = -\dot{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= d\varepsilon_{ii}^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p \\ &= \dot{\lambda} - \dot{\lambda} = 0 \end{aligned} \quad \boxed{\Rightarrow \varepsilon_v^p = 0}$$

▪ Critère de **Von Mises** : $f_2 = s_{II} - R = 0$

$$f_2 = s_{II} - R = 0 \Rightarrow d\varepsilon_1^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_1} = \dot{\lambda} \frac{\partial (s_{II} - R)}{\partial \sigma_1} = \dot{\lambda} \frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_1} = \dot{\lambda} \frac{s_1}{s_{II}} = \dot{\lambda} \frac{2\sigma_1/3}{\sqrt{2\sigma_1^2/3}} = \frac{2\sigma_1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sigma_1} \dot{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\lambda}$$

$$d\varepsilon_2^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_2}{\partial \sigma_2} = \dot{\lambda} \frac{s_2}{s_{II}} = \dot{\lambda} \frac{-\sigma_1/3}{\sqrt{2\sigma_1^2/3}} = \frac{-\sigma_1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sigma_1} \dot{\lambda} = -\sqrt{\frac{1}{6}} \dot{\lambda}$$

$$d\varepsilon_3^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f_3}{\partial \sigma_3} = \dot{\lambda} \frac{s_3}{s_{II}} = \dot{\lambda} \frac{-\sigma_1/3}{\sqrt{2\sigma_1^2/3}} = \frac{-\sigma_1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sigma_1} \dot{\lambda} = -\sqrt{\frac{1}{6}} \dot{\lambda} = d\varepsilon_2^p$$

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \dot{\lambda} = 0 \quad (\text{car } \dot{\lambda} \neq 0)$$

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{s_{II}} = \frac{\text{tr}(s)}{s_{II}} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_v^p = 0}$$

Les déformations volumiques plastiques (incompressibles) sont automatiquement vérifiées pour les deux critères de plasticité f_1 et f_2 .

3. Valeur de E et modélisation des critères élastoplastiques :

$$\text{Loi de Hooke : } \sigma_1 = E\varepsilon_1 \Rightarrow E = \frac{\Delta\sigma_1}{\Delta\varepsilon_1} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{50}{0.5\%} = 10^4 \text{ kPa} = 10 \text{ MPa}$$

Modélisation:

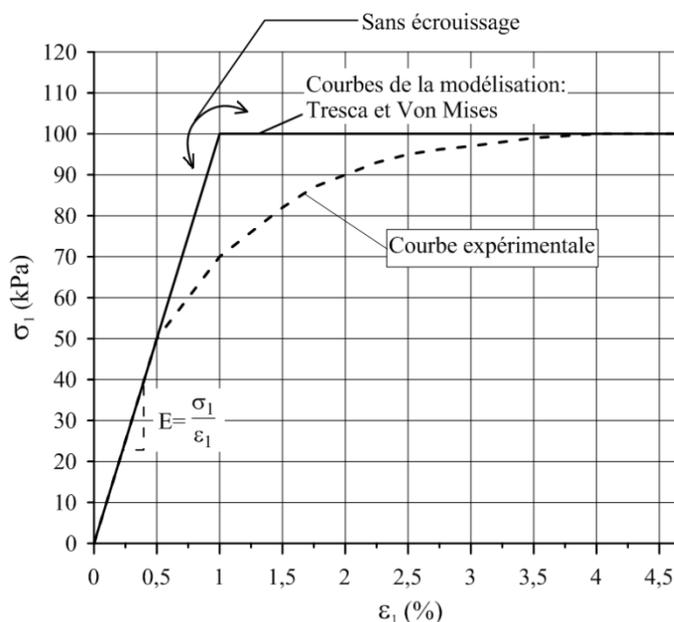
Tresca:

$$\sigma_1 = E\varepsilon_1 = 10^4 \varepsilon_1,$$

$$\text{avec : } \sigma_{1R} = 100 \text{ kPa}$$

Von Mises:

$$\begin{cases} \sigma_1 = E\varepsilon_1 \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{1R} - R = 0, \\ \text{avec : } \sigma_{1R} = \sqrt{\frac{3}{2}}R = 100 \text{ kPa} \end{cases}$$



Modélisation en plasticité parfaite
(Tresca et Von Mises)

4. Essai triaxial :

Essai véritablement triaxial : $\sigma_3 = 0$, $\sigma_2 = 60$ kPa et $\sigma_1 > 0$

- Tresca: $f_1 = \sigma_1 - \sigma_3 - k = 0$ (partie élastique : E, v)

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_1} = \dot{\lambda} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_2^p = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_2} = 0 \quad , \quad \dot{\varepsilon}_3^p = \lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_3} = -\dot{\lambda}$$

$$\boxed{\frac{\dot{\varepsilon}_2^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = 0 \quad , \quad \frac{\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-\dot{\lambda}}{\dot{\lambda}} = -1}$$

- Von Mises : $f_2 = s_{II} - R = 0$ (partie élastique : E, v)

Contrainte de rupture

$$f_2 = s_{II} - R = 0 \Rightarrow s_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2) = R = 81.65$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) = R^2 \Rightarrow \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \frac{3R^2}{2} \quad ,$$

$$\boxed{\Rightarrow \sigma_1^2 - 60\sigma_1 - 6400 = 0} \quad , \text{ (Contraintes en kPa).}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{29200} = 170.88 \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = 115.45 \text{ kPa} \\ \sigma_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = -55.44 < 0 \end{cases}$$

Contrainte de rupture obéissant au critère de Von Mises: $\boxed{\Rightarrow \sigma_{1R} = 115.45 \text{ kPa}}$

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} \frac{s_1}{s_{II}} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\lambda} \frac{s_2}{s_{II}} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} \frac{s_3}{s_{II}} \quad , \quad s_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} \quad , \quad s_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{3} \quad , \quad s_3 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_{1R}}{2\sigma_{1R} - \sigma_2} = \frac{120 - \sigma_{1R}}{-60 + 2\sigma_{1R}} = 2.67\% \quad , \quad \frac{\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{s_3}{s_1} = -\frac{\sigma_{1R} + \sigma_2}{2\sigma_{1R} - \sigma_2} = -\frac{\sigma_{1R} + 60}{-60 + 2\sigma_{1R}} = -1.026$$

NB:

La valeur limite obtenue pour les critères f_1 et f_2 est donc différente ceci est lié à la forme du critère dans le plan déviatoire : (**hexagone pour Tresca et cercle pour Von Mises**).

B- Modélisation élastoplastique avec écrouissage :

On considère le critère de Von Mises avec écrouissage.

$$f_2 = s_{II} - R(\alpha) = 0 \quad , \quad \alpha = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2}$$

Comportement élastique pour ($\varepsilon_1 < 0.5\%$) , au-delà de cette limite (état élastoplastique).

1. Limites de variation du paramètre $R(\alpha)$ et expression de α :

$$f_2 = s_{II} - R(\alpha) = 0 \Rightarrow R(\alpha) = s_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\text{Essai de compression} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 50 \text{ à } 100 \text{ kPa} \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow R(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1^2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1$$

$$R(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_1$$

$$\sigma_1 = 50 \text{ kPa} \rightarrow R(\alpha) = 40.82 \text{ kPa}$$

$$\sigma_1 = 100 \text{ kPa} \rightarrow R(\alpha) = 81.65 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow 40.82 \leq R(\alpha) \leq 81.65 \text{ kPa}$$

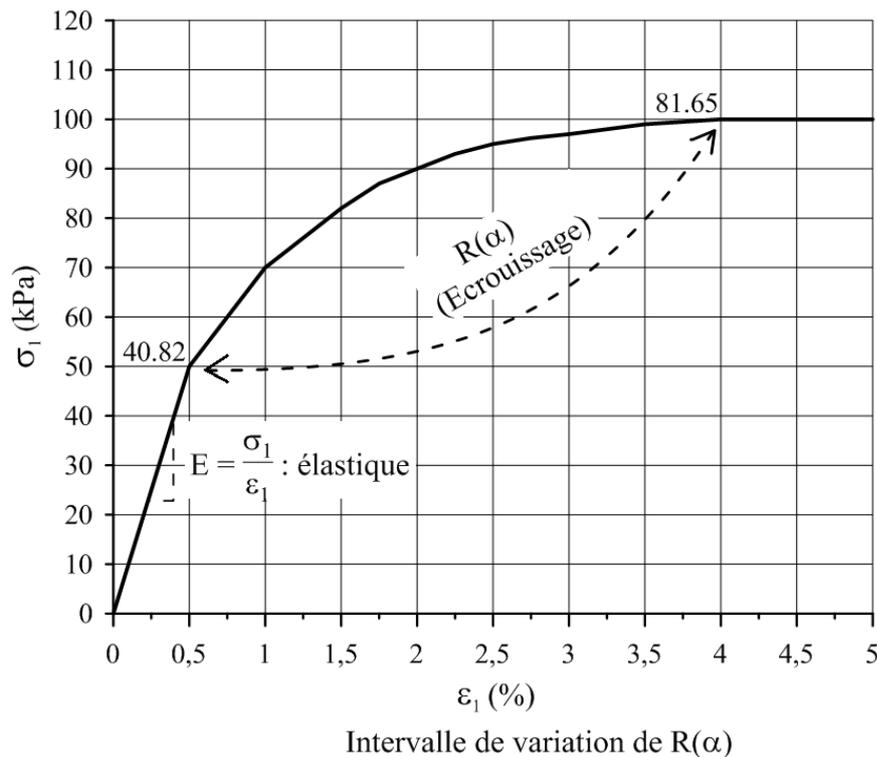


Figure 4-5- Domaine de variation de $R(\alpha)$

Paramètres élastiques, ils sont identiques que ceux calculés précédemment en (A): $\begin{cases} E = 10^4 \text{ kPa} \\ \nu = 0.5 \end{cases}$

Expression de α : $\alpha = f(\varepsilon_1^p)$

$$\alpha = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2}$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \dot{\varepsilon}_1 + 2\dot{\varepsilon}_3 = 0, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_3$$

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + 2\varepsilon_3^p = 0 \Rightarrow \varepsilon_1^p = -2\varepsilon_3^p \text{ et } \varepsilon_3^p = \frac{-\varepsilon_1^p}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2} = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + 2(\varepsilon_3^p)^2} = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + 2\left(\frac{-\varepsilon_1^p}{2}\right)^2} = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + \frac{(\varepsilon_1^p)^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}(\varepsilon_1^p)^2}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{2}}\varepsilon_1^p = 1.225\varepsilon_1^p = 1.225(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^e)$$

$$\varepsilon_1^e = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \alpha = 1.225\left(\varepsilon_1 - \frac{\sigma_1}{E}\right)$$

2. Traçage de la courbe $R(\alpha)$ et approximation

Tableau 4-4- Déformations plastique et valeurs de $R(\alpha)$

ε_1 (%)	σ_1 (kPa)	ε_1^e (%)	ε_1^p (%)	$R(\alpha)$ (kPa)	α (%)	$\log R(\alpha)$	$\log(\alpha)$
0,50	50,00	0,50	0,00	40,83	0,00	1,61	-
1,00	70,00	0,70	0,30	57,16	0,37	1,76	-0,43
1,50	82,00	0,82	0,68	66,95	0,83	1,83	-0,08
2,00	90,00	0,90	1,10	73,49	1,35	1,87	0,13
2,50	95,00	0,95	1,55	77,57	1,90	1,89	0,28
3,00	98,00	0,98	2,02	80,02	2,47	1,90	0,39
3,50	99,00	0,99	2,51	80,83	3,07	1,91	0,49
4,00	100,00	1,00	3,00	81,65	3,68	1,91	0,57

La courbe $R(\alpha)$ peut être approximé par une courbe de type exponentiel sous la forme:

$R(\alpha) = R_0 \alpha^n$; avec: R_0 et $n \in \mathbb{R}^2$ / constantes

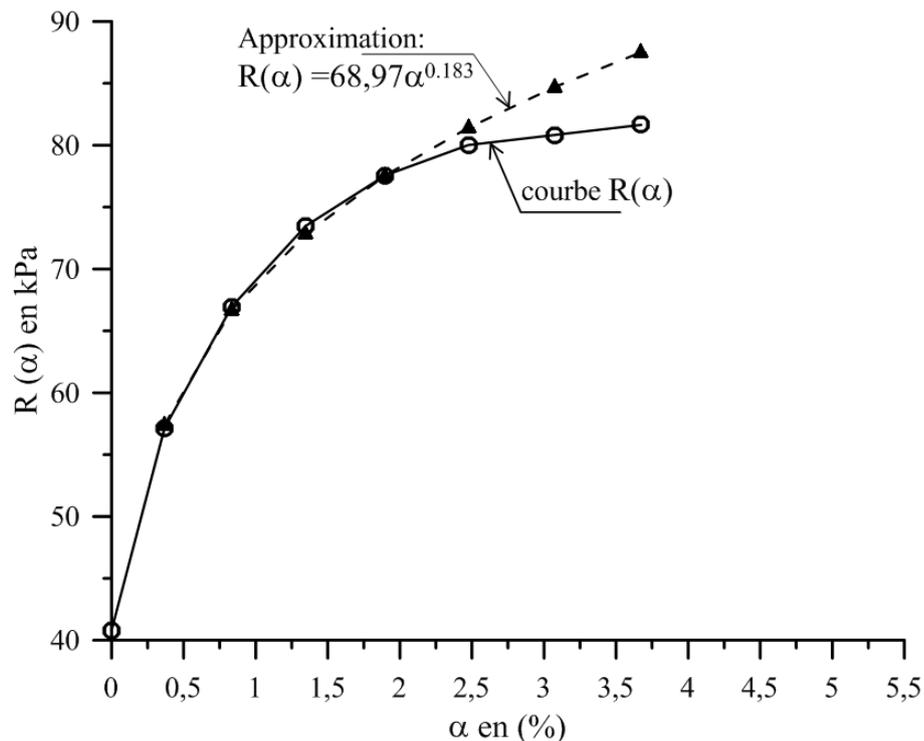


Figure 4-6- Courbe $R(\alpha)$ et son approximation.

Pour déterminer les constantes R_0 et n , on procède à l'application de la fonction logarithme (log)

$$R(\alpha) = R_0 \alpha^n \Rightarrow \log[R(\alpha)] = \log(R_0 \alpha^n) = \log(R_0) + n \log(\alpha)$$

$$\boxed{\log[R(\alpha)] = \log(R_0) + n \log(\alpha)}$$

$$\left. \begin{array}{l} R(\alpha) = 57.16, \alpha = 0.37 \rightarrow \log(R_0) - 0.43n = 1.76 \dots (1) \\ R(\alpha) = 77.57, \alpha = 1.90 \rightarrow \log(R_0) + 0.28n = 1.89 \dots (2) \end{array} \right\} \Rightarrow n = 0.183 ; R_0 = 68.97$$

Donc, la relation qui lie R à α est donnée par : $\boxed{R(\alpha) = R_0 \alpha^n = 68,97 \alpha^{0,183}}$

3. Analyse de l'essai véritablement triaxial décrit en A-4

Expression reliant ε_1^p , s_1 et s_{II}

$$\alpha = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 + (\varepsilon_2^p)^2 + (\varepsilon_3^p)^2}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_2^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p}, \quad \frac{\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{s_3}{s_1} = \frac{\varepsilon_3^p}{\varepsilon_1^p}$$

$$\alpha = \sqrt{(\varepsilon_1^p)^2 \left[1 + \left(\frac{\varepsilon_2^p}{\varepsilon_1^p} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_3^p}{\varepsilon_1^p} \right)^2 \right]} = \sqrt{1 + \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^2 + \left(\frac{s_3}{s_1} \right)^2} \varepsilon_1^p = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}{s_1^2}} \varepsilon_1^p = \sqrt{\frac{s_{II}^2}{s_1^2}} \varepsilon_1^p = \frac{s_{II}}{s_1} \varepsilon_1^p$$

$$\boxed{\alpha = \frac{s_{II}}{s_1} \varepsilon_1^p}$$

Tableau 4-5- Modélisation de l'écroissance isotrope: courbe $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$

σ_1 (kPa)	ε_1^e (%)	s_1 (kPa)	s_{II} (kPa)	s_1^n $= s_1^{0,183}$	s_{II}^{n-1} $= s_{II}^{-0,817}$	$\log(\varepsilon_1^p)$	ε_1^p (%)	$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p$ (%)
50	0,50	13,33	45,46	1,61	0,04	-1,532	0,029	0,529
70	0,70	26,67	53,54	1,82	0,04	-0,914	0,122	0,822
82	0,82	34,67	60,02	1,91	0,04	-0,579	0,264	1,084
90	0,90	40,00	64,81	1,96	0,03	-0,368	0,429	1,329
95	0,95	43,33	67,95	1,99	0,03	-0,242	0,573	1,523
98	0,98	45,33	69,88	2,01	0,03	-0,168	0,680	1,660
99	0,99	46,00	70,53	2,02	0,03	-0,143	0,719	1,709
100	1,00	46,67	71,18	2,02	0,03	-0,119	0,760	1,760

$$\left\{ \begin{array}{l} f_2 = s_{II} - R(\alpha) = 0 \Rightarrow R(\alpha) = s_{II} \\ R(\alpha) = R_0 \alpha^n, R_0 = 68.97, n = 0.183 \end{array} \right. \Rightarrow s_{II} = R_0 \alpha^n = R_0 \left(\frac{s_{II}}{s_1} \varepsilon_1^p \right)^n = R_0 \frac{s_{II}^n}{s_1^n} (\varepsilon_1^p)^n$$

$$\Rightarrow s_1^n = R_0 s_{II}^{n-1} (\varepsilon_1^p)^n \Rightarrow \frac{s_1^n}{s_{II}^{n-1}} = R_0 (\varepsilon_1^p)^n \rightarrow \log \left(\frac{s_1^n}{s_{II}^{n-1}} \right) = \log (R_0 (\varepsilon_1^p)^n) = \log R_0 + n \log \varepsilon_1^p$$

$$\log \varepsilon_1^p = \frac{1}{n} \log \left(\frac{s_1^n}{s_{II}^{n-1}} \right) - \frac{1}{n} \log R_0 \Rightarrow \boxed{\rightarrow \log \varepsilon_1^p = 5.46 \log \left(\frac{s_1^n}{s_{II}^{n-1}} \right) - 10.05}$$

$$s_{II} = \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} = \sqrt{\frac{2}{3}(\sigma_1^2 - 60\sigma_1 + 3600)} \quad ; \text{ avec : } 50 \leq \sigma_1 \leq 100 \text{ kPa}$$

$$s_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{3} = \frac{2\sigma_1 - 60}{3}, \text{ avec } \sigma_1 \text{ en kPa.}$$

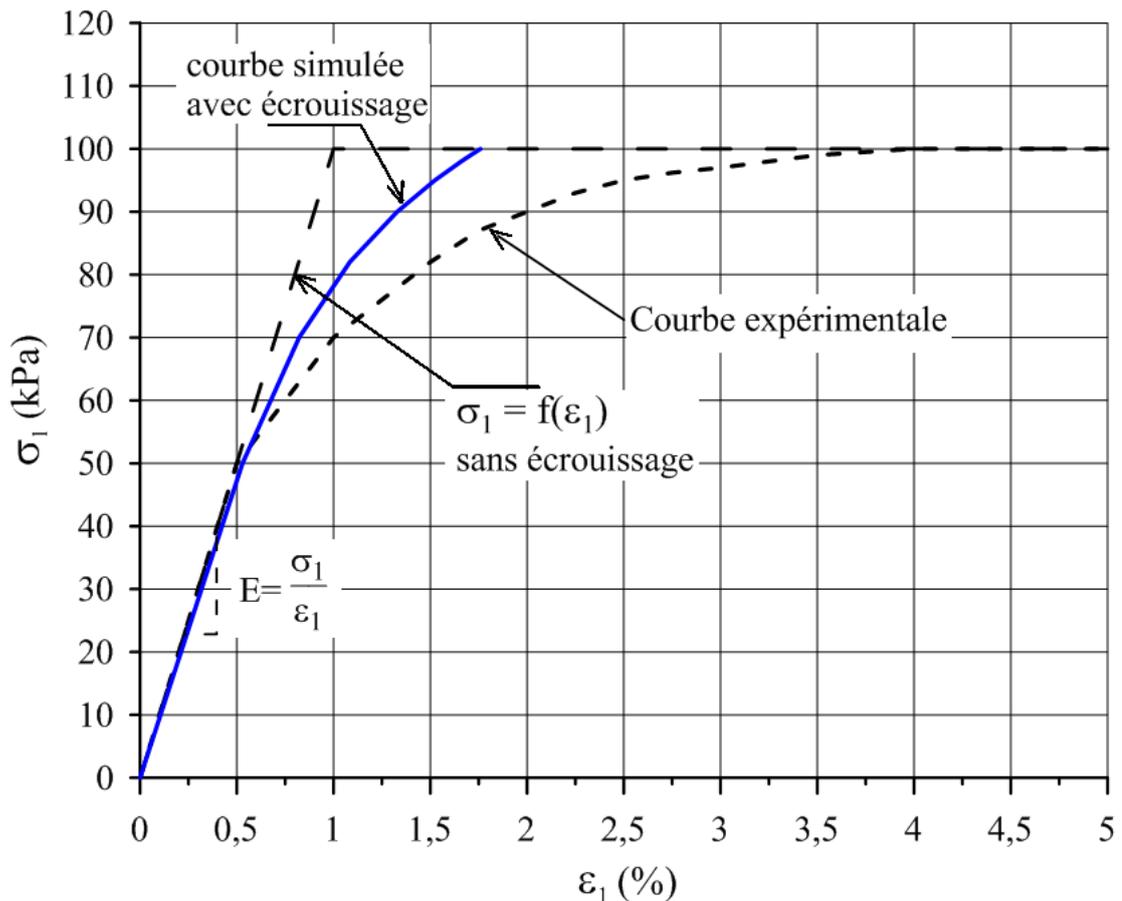


Figure 4-7- Prise en compte de l'écroutissage dans le critère de Von Mises : courbe simulée

Conclusion :

On constate d'après la (Figure 4-7) que la courbe simulée ne cale pas sur la courbe expérimentale (modèle non adapté).

PROBLEME : DOCTORANTS

Nous cherchons à définir une loi de comportement pour un matériau pulvérulent

Des essais réalisés au triaxial ont fourni les résultats expérimentaux de la Figure (essais à $\sigma_3 =$ constante).

I. Elasticité non linéaire

On se place dans le cadre d'une loi de comportement élastique non linéaire. On suppose que la loi de comportement élastique peut être écrite entre les incréments $d\varepsilon$ et $d\sigma$. Les paramètres de cette loi E et ν dépendent de l'état de contrainte :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad ; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

On suppose que la courbe $(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3 = f(\varepsilon_1)$ peut être approchée par la relation suivante :

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_3} = f(\varepsilon_1) = \frac{a\varepsilon_1}{1 + b\varepsilon_1} \quad , \quad \text{avec } : (a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$$

- 1) Exprimez E en fonction de $\sigma_3, \varepsilon_1, a, b$
- 2) Exprimez E en fonction de a, b, σ_1, σ_3

Soit E_0 la pente à l'origine de la courbe expérimentale $(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3 = f(\varepsilon_1)$ et que φ est l'angle de frottement caractérisant l'écoulement ($\varepsilon_1 = \infty$) pour un critère de plasticité de type Mohr- Coulomb.

- 3) Exprimez a et b en fonction de E_0 et φ .
- 4) Calculer les valeurs numériques de a et b
- 5) Tracez la courbe approchée (avec les valeurs numériques a et b). L'approximation vous paraît-elle satisfaisante? commentez.
- 6) A partir de la courbe expérimentale $\Delta V/V = g(\varepsilon_1)$ tracez la courbe $\nu = f(\varepsilon_1)$. Les valeurs trouvées vous paraissent-elles physiquement acceptables dans le cadre d'une loi élastique? Expliquez.

Dans la suite, on fera trois (3) hypothèses sur ν que l'on supposera constant.

$$\nu = 0,25 \quad \nu = 0,33 \quad \text{et} \quad \nu = 0,5$$

- 7) Le modèle de comportement étant défini par les paramètres a, b et ν , calculez la prévision du comportement pour ce type de matériau lors d'un essai de type oedométrique. On définira le chemin de contrainte suivi (σ_1 / σ_3) et on calculera pour les diverses valeurs de ν (0.25- 0.33-

0.5) la valeur de $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ et de $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3}$

- Existe-t-il une valeur de ν qui paraisse satisfaisante.
- Exprimez le paramètre E en fonction de σ_1 pour ce type d'essai.
- Montrez que physiquement ν ne peut prendre l'une des valeurs proposées.

- Définissez analytiquement la courbe $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ (on considère que, à l'origine $\varepsilon_1 = 0$ pour $\sigma_1 = (\sigma_1)_0$, avec $(\sigma_1)_0$ correspond à la contrainte appliquée à l'échantillon lors de la mise en place, on supposera que $(\sigma_1)_0 = 10$ kPa et on tracera la courbe pour :

$$(\sigma_1)_0 < \sigma_1 < 500 \text{ kPa}$$

II. Elasto- plasticité parfaite (matériau standard)

On se place dans le cadre d'une loi élasto- plastique (matériau standard). La loi de comportement élastique est isotrope, elle est définie par le coefficient de Poisson $\nu = 0,25$ et $E = 2\sigma_3$

La loi plastique est définie par le critère :

$$f = s_{II} - RI_1 = 0 \quad , \quad I_1 = \text{tr}(\sigma) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad , \quad s_{II} = s_{ij}s_{ij} \quad , \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{I_1}{3}\delta_{ij}$$

L'analyse sera faite en contraintes principales

- Ecrire le critère en fonction des contraintes principales.
- Si l'on se place en plasticité parfaite, déterminez la valeur de R à partir de la courbe expérimentale.

Calculez dans ce cas le rapport $\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p}$ théorique, correspond-il aux résultats expérimentaux?

- Si l'on se place en plasticité avec écrouissage isotrope on aura: $f = s_{II} - R(\alpha)I_1 = 0$

α : variable d'écrouissage

Donnez la plage d'évolution de $R(\alpha)$, d'après la Figure . Calculez $\dot{\varepsilon}_v^p / \dot{\varepsilon}_1^p$ en fonction de $R(\alpha)$, cela vous parait-il conforme aux résultats expérimentaux ?

4.2.1 III. Plasticité avec écrouissage isotrope

La loi proposée en (II) n'est qu'une approximation grossière de la réalité. Nous considérons maintenant dans le critère $f(\sigma_{ij})$, R évolue en fonction du paramètre α par :

$$\dot{\alpha} = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_1^p)^2 + 2(\dot{\varepsilon}_3^p)^2}$$

À partir d'essai de la figure 1 :

- Tracer la courbe $R = f(\alpha)$ qui caractérise l'écrouissage.
- Tracer la courbe expérimentale $\varepsilon_v^p = f(\varepsilon_1^p)$
- Dans l'hypothèse ou le matériau satisfait à l'hypothèse de normalité, calculez pour $\varepsilon_1^p = 1\%$, 2% et 4% la pente théorique de cette courbe. Comparez avec la pente réelle. Commentez.
- Proposez un potentiel plastique qui permette d'avoir un comportement plus réaliste. Commentez.

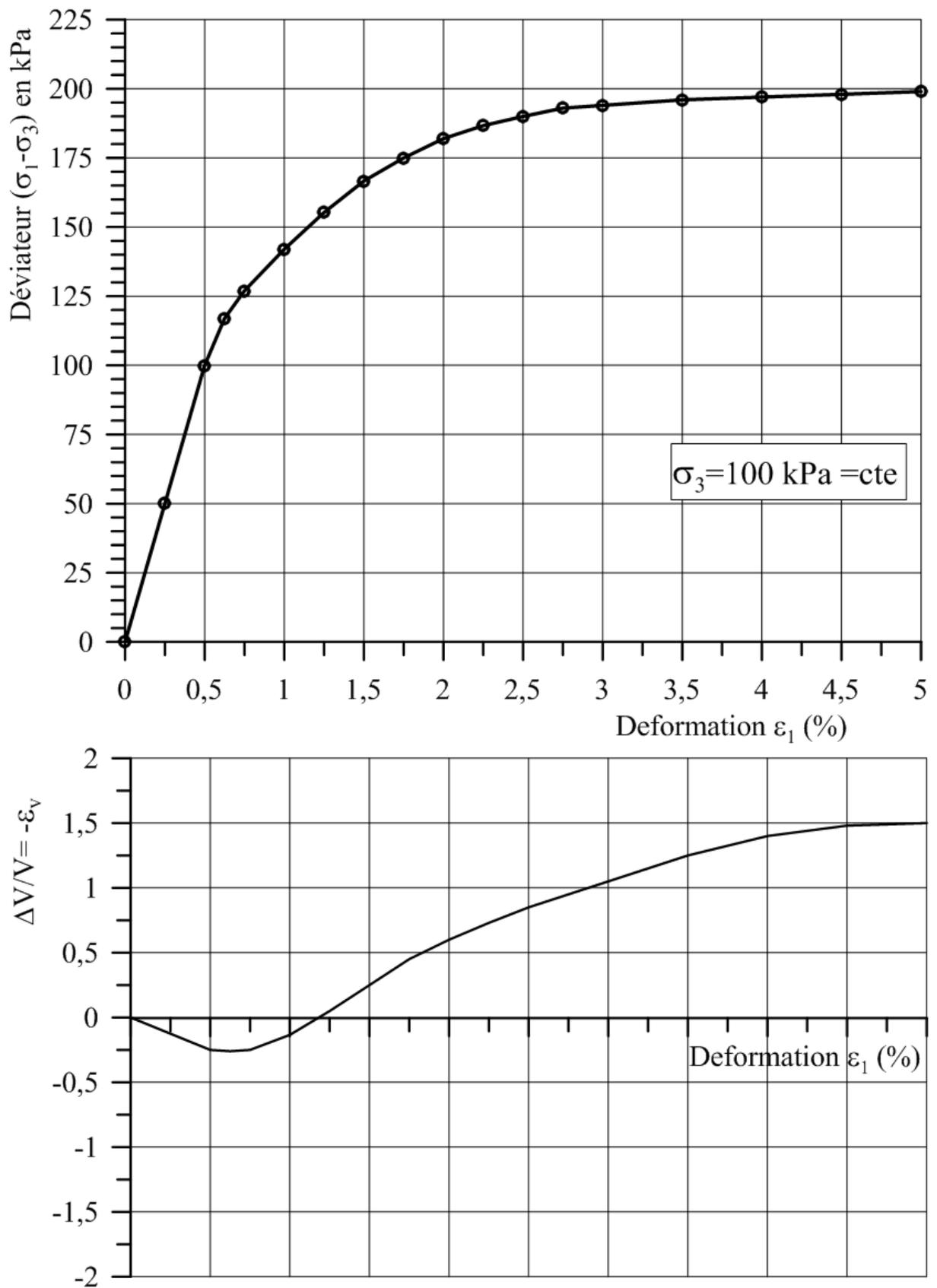


Figure 1- Résultats d'un essai triaxial axisymétrique

SOLUTION

Nous cherchons à définir une loi de comportement pour un sable. On se place dans le cadre d'une loi de comportement élastique non linéaire.

I- Elasticité non linéaire

Loi élastique isotrope et incrémentale définie par les paramètres mécaniques E et ν :

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \rightarrow \begin{cases} d\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} [d\sigma_{11} - \nu(d\sigma_{22} + d\sigma_{33})] \\ d\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} [d\sigma_{22} - \nu(d\sigma_{11} + d\sigma_{33})] \dots (1) \\ d\varepsilon_{33} = \frac{1}{E} [d\sigma_{33} - \nu(d\sigma_{11} + d\sigma_{22})] \end{cases}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3} = f(\varepsilon_1) = \frac{a\varepsilon_1}{1+b\varepsilon_1}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^{*2}$$

1) Ecrire E en fonction de σ_3 , ε_1 , a et b :

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{a\varepsilon_1}{1+b\varepsilon_1} \sigma_3 \Rightarrow E = \frac{dq}{d\varepsilon_1} = \sigma_3 \left(\frac{a\varepsilon_1}{1+b\varepsilon_1} \right)' = \frac{a + \cancel{ab\varepsilon_1} - \cancel{ab\varepsilon_1}}{(1+b\varepsilon_1)^2} \sigma_3 = \frac{a\sigma_3}{(1+b\varepsilon_1)^2}$$

$$E = \frac{dq}{d\varepsilon_1} = \frac{a\sigma_3}{(1+b\varepsilon_1)^2} \dots (2)$$

2) Ecrire E en fonction de a , b , σ_1 et σ_3 :

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3} = \frac{a\varepsilon_1}{1+b\varepsilon_1} \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3)(1+b\varepsilon_1) = a\varepsilon_1\sigma_3 \Rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = (a\sigma_3 + b\sigma_3 - b\sigma_1)\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{a\sigma_3 + b\sigma_3 - b\sigma_1}, \text{ on remplace } \varepsilon_1 \text{ dans l'expression n}^\circ (2)$$

$$E = \frac{a\sigma_3}{(1+b\varepsilon_1)^2} = \frac{a\sigma_3}{\left(1 + \frac{b(\sigma_1 - \sigma_3)}{a\sigma_3 + b\sigma_3 - b\sigma_1}\right)^2} = \frac{(a\sigma_3 + b\sigma_3 - b\sigma_1)^2}{a\sigma_3}$$

$$E = \frac{(a\sigma_3 + b\sigma_3 - b\sigma_1)^2}{a\sigma_3} \dots (3)$$

E_0 est la pente à l'origine, $\Rightarrow E_0 = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} E = a\sigma_3$

$$E_0 = a\sigma_3$$

A l'origine $q = \sigma_1 - \sigma_3 = 0 \rightarrow \sigma_1 = \sigma_3$

$$E_0 = \frac{(a\sigma_3 + b\sigma_1 - b\sigma_1)^2}{a\sigma_3} = \frac{(a\sigma_3)^2}{a\sigma_3} = a\sigma_3$$

3) **Ecrire** a , b en fonction de E_0 et φ :

$$a = \frac{E_0}{\sigma_3}$$

φ : Angle de frottement du matériau caractérisant l'écoulement ($\varepsilon_1 \rightarrow \infty$) pour un critère de plasticité de type Mohr- Coulomb.

Critère de Mohr- Coulomb:

$$f = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \varphi = 0 \quad , \quad c' = 0 : \text{sol pulvérulent,}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = K_p = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_R$$

$$\text{A l'écoulement } (\varepsilon_1 \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3} \right)_R = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_R - 1 = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow \infty} \frac{a\varepsilon_1}{1 + b\varepsilon_1} = \frac{a}{b}$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_R - 1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - 1 = \frac{2 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a(1 - \sin \varphi)}{2 \sin \varphi} = \frac{E_0(1 - \sin \varphi)}{2\sigma_3 \sin \varphi}$$

$$b = \frac{E_0(1 - \sin \varphi)}{2\sigma_3 \sin \varphi} \quad \dots(4)$$

4) **Valeur numérique de** a et b :

$$\text{D'après la courbe expérimentale : } E_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1^e} = \frac{100}{0.5\%} = 2 \times 10^4 \text{ kPa} = 20 \text{ MPa}$$

$$a = \frac{2 \times 10^4}{10^2} = 200 \quad \Rightarrow a = 200$$

A la rupture (écoulement) : $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$, $q = \sigma_1 - \sigma_3 = 200 \text{ kPa}$

$$\sigma_{1R} = 300 \text{ kPa} \Rightarrow \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)_R = \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'} = \frac{300}{100} = 3 \Rightarrow 4 \sin \varphi' = 2 \rightarrow \sin \varphi' = 0.5$$

$$\Rightarrow \varphi' = 30^\circ ; \quad c' = 0$$

$$\text{De (4)} \Rightarrow b = \frac{E_0(1 - \sin \varphi)}{2\sigma_3 \sin \varphi} = \frac{2 \times 10^4(1 - 0.5)}{2 \times 100 \times 0.5} = 100 \quad b = 100$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{a\sigma_3\varepsilon_1}{1 + b\varepsilon_1} = \frac{2 \times 10^4 \varepsilon_1}{1 + 100\varepsilon_1}$$

5) **Traçage de la courbe approchée** $\sigma_1 - \sigma_3 = f(\varepsilon_1)$:

D'après les valeurs (tableau 4.6 et Fig. 4-9), on remarque que l'approximation de la courbe expérimentale n'est pas satisfaisante car les écarts relatifs $\Delta e/e$ sont importants (dépassent 20%)

Tableau 4-6. Courbe approchée du déviateur q en fonction de la déformation axiale ε_1 .

ε_1 (%)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$\sigma_1 - \sigma_3$ (kPa)	0	66.67	100	120	133.33	142.85	150	155.5	160	163.63	166.67
$(\sigma_1 - \sigma_3)_{Exp}$ (kPa)	0	100	120	160	180	185	195	196	198	199	200

6) Traçage de la courbe approchée $\nu = f(\varepsilon_1)$:

$$\dot{\varepsilon}_v = d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} \Rightarrow d\varepsilon_3 = -\nu d\varepsilon_1$$

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3 = d\varepsilon_1 - 2\nu d\varepsilon_1 = (1 - 2\nu)d\varepsilon_1 \Rightarrow \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = 1 - 2\nu \Rightarrow \nu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \right) \dots\dots(5)$$

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} \text{ se calcule à partir de la courbe : } \Delta V/V = g(\varepsilon_1)$$

Tableau 4-7- Variation du coefficient de Poisson en fonction de ε_1 .

ε_1 (%)	0.5	1	1.5	2	3	4	5
$d\varepsilon_v/d\varepsilon_1 = \text{tg}\theta$	0.5	-0.7	-0.65	-0.50	-0.40	-0.10	0
ν	0.25	0.85	0.825	0.75	0.70	0.55	0.5

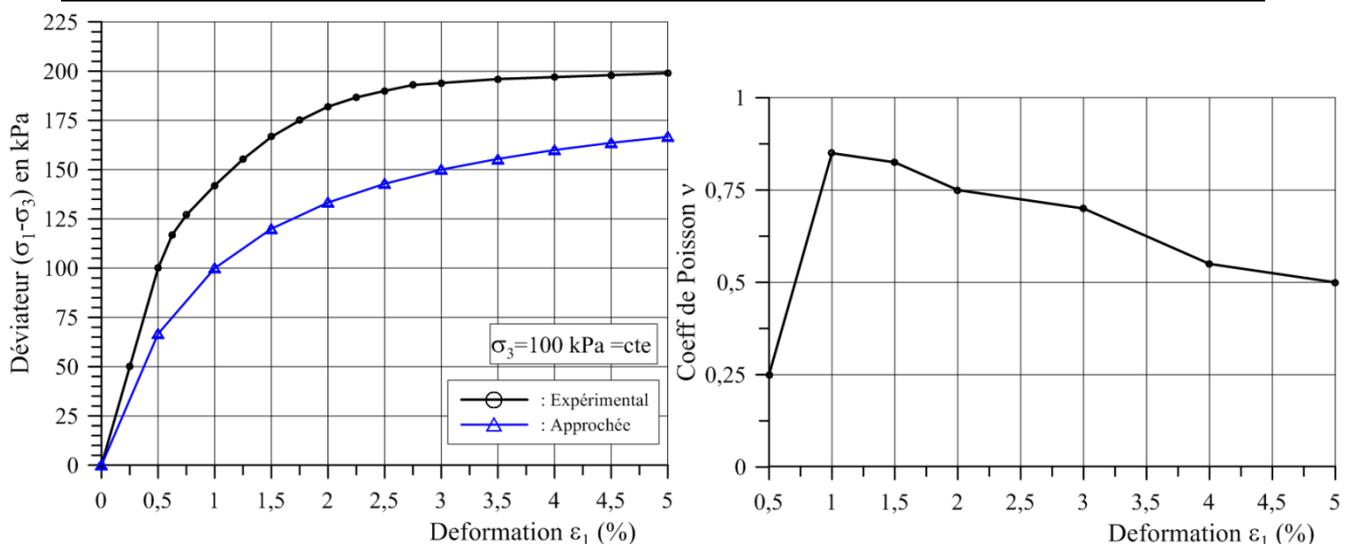


Figure 4-8- Courbe du déviateur approché et du coefficient de Poisson en fonction de ε_1 .

Pour $\nu = 0.5$, $\varepsilon_v = 0$ (déformation à volume constant. Elle caractérise généralement le comportement des sols cohérents saturés en conditions non drainées. Par ailleurs, les valeurs de ν dépassant 0.5 semblent physiquement inacceptables, car souvent on a $(-1 < \nu < 0.5)$.

Dans la suite du problème, on fera l'hypothèse sur le coefficient de Poisson ν que l'on supposera constant à savoir :

$$\nu = 0,25 \quad \nu = 0,33 \quad \text{et} \quad \nu = 0,5$$

7) Modélisation de l'essai oedométrique :

Le modèle de comportement étant défini par les paramètres a , b et ν . A cet effet, la prévision de comportement lors d'un essai oedométrique est tels que:

$$d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = 0 \quad \text{et} \quad d\sigma_2 = d\sigma_3 \neq 0$$

$$(1) : d\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \rightarrow \begin{cases} d\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [d\sigma_1 - \nu(d\sigma_2 + d\sigma_3)] \\ d\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [d\sigma_2 - \nu(d\sigma_1 + d\sigma_3)] \\ d\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [d\sigma_3 - \nu(d\sigma_1 + d\sigma_2)] \end{cases} ; \quad \varepsilon_{ij} (i \neq j) = 0$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [d\sigma_2 - \nu(d\sigma_1 + d\sigma_3)] = d\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [d\sigma_3 - \nu(d\sigma_1 + d\sigma_2)]$$

$$d\varepsilon_2 = 0 \Rightarrow (1-\nu)d\sigma_3 = \nu d\sigma_1 \Rightarrow \frac{d\sigma_3}{d\sigma_1} = \frac{\nu}{1-\nu}$$

$$\frac{d\sigma_1}{d\sigma_3} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1-\nu}{\nu} \rightarrow \sigma_1 = \frac{1-\nu}{\nu} \sigma_3 = K_0 \sigma_3 \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = \frac{1-\nu}{\nu} \sigma_3 = K_0 \sigma_3}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 1 = \frac{1-2\nu}{\nu} \rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3} = \frac{1-2\nu}{\nu} \dots\dots(6)}$$

ν	0.25	0.33	0.5
σ_1 / σ_3	3	2	1
$(\sigma_1 - \sigma_3) / \sigma_3$	2	1	0

La valeur qui apparait satisfaisante a priori est $\nu = 0.33$ car :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 2 \Rightarrow \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0.5 = 1 - \sin \varphi' = 0.5$$

La valeur de $\nu = 0.33$ correspond à un état de contraintes similaire au champ de contraintes au repos ($K_0 = 0.5$). Par ailleurs, la valeur de $\nu = 0.25$ est aussi conforme physiquement.

Expression de E en fonction de σ_1 pour l'essai oedométrique :

$$de (3) : E = \frac{(a\sigma_3 + b\sigma_3 - b\sigma_1)^2}{a\sigma_3} ; \quad \sigma_3 = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_1$$

$$E = \frac{\left[(a+b) \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_1 - b\sigma_1 \right]^2}{a \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_1} = \frac{(a\nu + 2\nu b - b)^2 \sigma_1^2}{(1-\nu)^2} \times \frac{(1-\nu)}{a\nu \sigma_1} = \frac{(a\nu + 2\nu b - b)^2 \sigma_1}{a\nu(1-\nu)}$$

$$E = \frac{(av + 2vb - b)^2 \sigma_1}{av(1 - \nu)} \quad \text{pour : } a = 200, b = 100 \text{ (constantes) :}$$

$$E = \frac{(200\nu + 200\nu - 100)^2 \sigma_1}{200\nu(1 - \nu)} = \frac{(400\nu - 100)^2 \sigma_1}{200\nu(1 - \nu)} = \frac{50(4\nu - 1)^2}{\nu(1 - \nu)}$$

$$E = \frac{50(4\nu - 1)^2}{\nu(1 - \nu)} \dots\dots(7)$$

Analyse :

- E = 0 pour $\nu = 0.25$, valeur à écarter car : $\varepsilon_1 \rightarrow +\infty$
- Pour $\nu = 0.5$, $d\varepsilon_\nu = d\varepsilon_1 = 0$ ($\Delta V/V = 0$, $\Delta V = 0$), il s'agit d'une **incompressibilité** matérielle.
- Pour $\nu = 0.33$, **E = 23.157 σ_1**

Définition de la courbe $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ avec les conditions aux limites suivantes :

pour: $\varepsilon_1 = 0$, $\sigma_1 = (\sigma_1)_0 = 10$ kPa et : $(\sigma_1)_0 < \sigma_1 < 500$ kPa

Loi de Hooke incrémentale :

$$d\sigma_2 = d\sigma_3 \neq 0$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= \frac{1+\nu}{E} d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} d\sigma_{kk} \delta_{ij} \Rightarrow d\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [d\sigma_1 - \nu(d\sigma_2 + d\sigma_3)] = \frac{1}{E} [d\sigma_1 - 2\nu d\sigma_3] \\ &= \frac{1}{E} \left[d\sigma_1 - 2\nu \frac{\nu}{1-\nu} d\sigma_1 \right] = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1-\nu)} \frac{d\sigma_1}{E} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{d\sigma_1}{E} \end{aligned}$$

$$d\varepsilon_1 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{d\sigma_1}{E}, \text{ On remplace } E \text{ par l'expression (7) :}$$

$$d\varepsilon_1 = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\nu(1-\nu)}{50(4\nu-1)^2} \times \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\nu}{50(4\nu-1)^2} \times \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} = A \frac{d\sigma_1}{\sigma_1}$$

$$A = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\nu}{50(4\nu-1)^2}, \quad A = \text{cte} \in \mathbb{R}^*$$

En intégrant de part et d'autre les expressions :

$$d\varepsilon_1 = A \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \Rightarrow \int d\varepsilon_1 = A \int \frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \rightarrow \varepsilon_1 = A \ln \sigma_1 + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

C.L: $\varepsilon_1 = 0$, $\sigma_1 = (\sigma_1)_0 = 10$ kPa et : $(\sigma_1)_0 < \sigma_1 < 500$ kPa

$$\Rightarrow A \ln(\sigma_1)_0 + k = 0 \Rightarrow k = -A \ln(\sigma_1)_0$$

$$\varepsilon_1 = A \ln \sigma_1 + k = A \ln \sigma_1 - A \ln(\sigma_1)_0 = A \ln \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_0}$$

$$\varepsilon_1 = A \ln \frac{\sigma_1}{(\sigma_1)_0}, \text{ avec } A \text{ est 'une constante : } A = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\nu}{50(4\nu-1)^2}$$

Discussions selon la valeur de ν :

- $\nu = 0.5 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0$: Incompressibilité du matériau, hypothèse à écarter car l'échantillon se déforme selon la direction axiale (ε_1),
- $\nu = 0.25 \Rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow +\infty$: Il s'agit d'un écoulement du matériau (valeur à écarter : impossible),
- $\nu = 0.33 \Rightarrow A = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)\nu}{50(4\nu-1)^2} \cong 0.029$

$$\varepsilon_1 = 0.029 \ln \frac{\sigma_1}{10} \Leftrightarrow \sigma_1 = 10 e^{-34.48\varepsilon_1} ; \sigma_1 \text{ en (kPa)(8)}$$

Tableau 4-8- Courbe oedométrique $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$.

σ_1 (kPa)	10	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500
ε_1 (%)	0	4.66	6.67	7.85	8.68	9.33	9.86	10.31	10.7	11.04	11.34

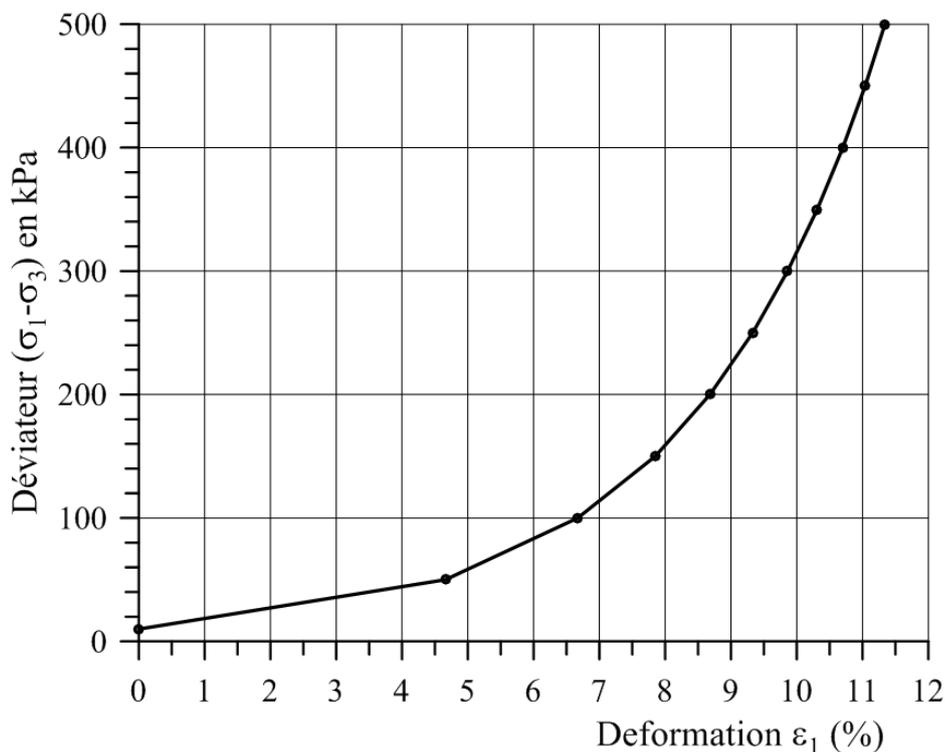


Figure 4-9- Courbe oedométrique $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$.

II- Elasto- plasticité parfaite (matériau standard)

$$\nu = 0.25, \quad E = 2\sigma_3$$

a) Ecriture du critère en contraintes principales :

$$f = s_{II} - R I_1 = 0 ; \quad I_1 = \sigma_{kk}, \quad s_{II} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}} = \sqrt{2J_2}$$

$$s_{II} = \sqrt{s_{ij}s_{ij}} = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$$

$$s_i = \sigma_i - \frac{I_1}{3}\delta_{ij} = \sigma_i - \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij}, \quad s_i \quad (i=1, 2 \text{ et } 3) : \text{ les composantes principales du déviateur.}$$

$$s_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}, \quad s_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \quad \text{et} \quad s_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}$$

$$s_{II}^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \left(\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3}\right)^2$$

Après développement des calculs, il en résulte :

$$s_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]}$$

$$f = s_{II} - R\sigma_{kk} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} - R(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 0$$

En sollicitations triaxiales axisymétriques $\sigma_2 = \sigma_3$:

$$f = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_1 - \sigma_3) - R(\sigma_1 + 2\sigma_3) = 0 \dots (9)$$

b) Valeur de R à partir de la courbe expérimentale :

A la rupture : $\sigma_3 = 100 \text{ kPa}$, $q_r = 200 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_{1R} = 300 \text{ kPa}$

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_R}{\sigma_1 + 2\sigma_3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{200}{500} = 0.326$$

Loi de normalité (matériau standard $f = g$) :

$$d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_{ij}} - R \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} \right), \quad \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} = 1, \quad \frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{s_{II}} \rightarrow \begin{cases} s_1 = \frac{2}{3}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ s_2 = s_3 = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3} \end{cases}$$

$$\dot{\varepsilon}_1^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_1} - R \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_1} \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{\frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_3)} - R \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} - R \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R}{3\sqrt{2}} \right)$$

$$\dot{\varepsilon}_2^p = \dot{\varepsilon}_3^p = \dot{\lambda} \left(\frac{\partial s_{II}}{\partial \sigma_3} - R \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_3} \right) = \dot{\lambda} \left(\frac{-\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_3)} - R \right) = \dot{\lambda} \left(-\frac{1\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} - R \right) = -\dot{\lambda} \left(\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}R}{3\sqrt{2}} \right)$$

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{\dot{\varepsilon}_1^p + 2\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \left(1 + 2\frac{\dot{\varepsilon}_3^p}{\dot{\varepsilon}_1^p}\right) = 1 + 2\frac{-\frac{(\sqrt{3} + 3\sqrt{2}R)\lambda}{3\sqrt{2}}}{\frac{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R)\lambda}{3\sqrt{2}}} = 1 - 2\frac{(\sqrt{3} + 3\sqrt{2}R)}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R} = \frac{-9\sqrt{2}R}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R}$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-9\sqrt{2}R}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R} \dots\dots(10)$$

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-9\sqrt{2} \times 0,326}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \times 0,326} = -1,993$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} \cong -2 \neq 0$$

D'après la courbe $\Delta V/V = g(\varepsilon_1)$ caractérisant les variations de volume, il en ressort qu'à l'écoulement, on a :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \text{tg}\theta = 0 \text{ pour } \varepsilon_1 = 5\%$$

Donc la valeur théorique de $\dot{\varepsilon}_v^p/\dot{\varepsilon}_1^p$ ne correspond pas aux résultats expérimentaux.

c) **Plasticité parfaite avec écrouissage isotrope :**

$$f = s_{II} - R(\alpha)\sigma_{kk} = 0 \quad ; \quad \alpha : \text{variable d'écrouissage} \dots\dots(11)$$

$$\text{Eq (11)} \Rightarrow R(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + 2\sigma_3}$$

$$\sigma_3 = 100 \text{ kPa, pour : } q = \sigma_1 - \sigma_3 = 100 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_1 = 200 \text{ kPa}$$

$$R(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + 2\sigma_3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{100}{400} = 0,204$$

$$\sigma_3 = 100 \text{ kPa, pour : } q = \sigma_1 - \sigma_3 = 200 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_1 = 300 \text{ kPa}$$

$$R(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + 2\sigma_3} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{200}{500} = 0,326$$

$$0,204 \leq R(\alpha) \leq 0,326$$

Comparaison de $\dot{\varepsilon}_v^p/\dot{\varepsilon}_1^p$ aux résultats expérimentaux :

$$\text{Eq(10)} : \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} \cong \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-9\sqrt{2}R(\alpha)}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R(\alpha)}$$

$$R(\alpha) = 0,204 \Rightarrow \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} \cong \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_1^p} = \frac{-9\sqrt{2}R(\alpha)}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}R(\alpha)} = \frac{-9\sqrt{2} \times 0,204}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \times 0,204} = -0,999 \cong -1$$

D'après les résultats des calculs du paramètre $\dot{\varepsilon}_v^p/\dot{\varepsilon}_1^p$ donnés dans le tableau 4-9 ci-dessous, on remarque une divergence avec les résultats expérimentaux déterminés à partir de la courbe expérimentale $\Delta V/V = g(\varepsilon_1)$ de la figure 4-8 de l'essai triaxial.

Tableau 4-9- Valeur du paramètre $\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\epsilon}_1^p$

ϵ_1 (%)	0.5	2	3	5
$\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\epsilon}_1^p$ (théorique)	-1,00	-1,80	-1,94	-2,0
$\dot{\epsilon}_v^p / \dot{\epsilon}_1^p$ (courbe)	0,50	-0,53	-0,14	0

5 Chapitre 5

Endommagement

5.1 Introduction

L'endommagement est un phénomène de détérioration progressive d'un matériau qui précède la rupture macroscopique, il se traduit par l'ensemble des phénomènes liés à la formation des cavités et l'apparition des dislocations dans le matériau en cours du processus de déformation. Le stade final de l'endommagement est la rupture qui est précédée de fissures de tailles variables en général de: 0.1 à 1mm pour les métaux, 1cm pour les bois et 10cm pour le béton (Lemaitre et Chaboche, 1988). La théorie de l'endommagement décrit l'évolution des phénomènes entre l'état initial et l'amorçage de la fissure macroscopique, ce que la MMC ne peut prendre en charge par le biais de variables continues en vue de représenter les efforts internes de cohésion. L'endommagement intéresse tous les matériaux aux différents niveaux de températures et de sollicitations; on distingue à cet effet, l'endommagement plastique, l'endommagement de fatigue, l'endommagement par les effets cycliques (séismes),...etc.

L'action des séismes sur les structures en béton armé est potentiellement destructive. L'expérience Algérienne dénote de l'ampleur des dégâts sur les constructions et les infrastructures et des pertes humaines lors des séismes d'El Asnam en octobre 1980 et de Boumérdes en Mai 2003. En effet, les dommages enregistrés témoignent de l'intensité des séismes et mettent en évidence des insuffisances caractérisées dans la qualité des matériaux et d'exécution, des déficiences dans la conception parasismique ainsi que l'influence des effets de site (tassement, liquéfaction,...etc.). Cet état de fait dénote le caractère vulnérable de notre cadre bâti vis à vis de l'aléa sismique. En outre, l'ampleur des dommages post sismiques nous renseigne sur le comportement fortement non linéaire des structures. Par conséquent, l'approche élastique adoptée dans règlement de calcul est jugée grossière notamment dans le cas des ouvrages en béton armé.

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques lois régissant le comportement mécanique de l'endommagement ainsi que la méthodologie de son évaluation pour l'aide à la décision en matière de désaffectation (destruction) ou de réhabilitation d'un ouvrage à travers une procédure basée sur les indices de dommages.

5.2 Aperçus sur la mécanique de la rupture

5.2.1 Concentration de contraintes

En élasticité, l'existence des défauts (dislocation localisée, cavité,...) conduit à une concentration localisée de contraintes.

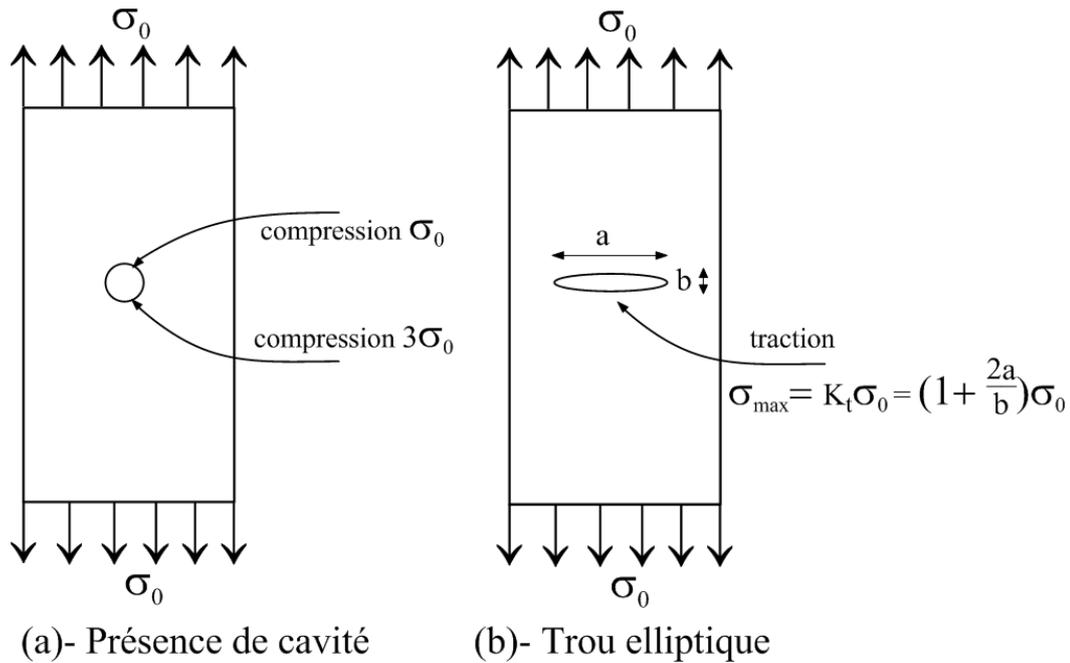


Figure 5-1. Effets du phénomène de concentration de contrainte

On appelle facteur de concentration de contraintes (Figure 5-1), le rapport adimensionnel K_t donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$$

σ_{\max} : contrainte locale maximum,

σ_0 : contrainte nominale appliquée.

Dans le cas d'un matériau ductile, cette concentration engendre localement des déformations plastiques, elle n'a pratiquement pas d'influence sur la rupture de la pièce. Cependant, pour un matériau fragile, cette concentration est très préjudiciable car elle conduit à la rupture.

Dans le cas d'un trou elliptique, si $b/a \rightarrow 0$ (cas limite d'une fissure) on remarque que : $K_t \rightarrow \infty$

Par conséquent, la présence d'une fissure se traduit par une singularité du champ de contraintes.

5.3 Endommagement

Lorsque l'on a à étudier une rupture fragile, l'approche précédente convient bien, par contre s'il s'agit d'une structure ductile, elle devient inadéquate. En effet, la rupture est l'ultime étape d'un processus de dégradation progressive de la structure. L'endommagement se manifeste par la décohésion des joints de grains, la propagation des défauts et la coalescence de tous les micro-vides ainsi créés précédemment.

L'endommagement va se traduire par une évolution d'un certain nombre de grandeurs physiques telles que le module de Young, la densité.

La mesure de l'endommagement peut s'effectuer à partir de ces grandeurs physiques, par mesure directe (micrographie), par des techniques de contrôle non destructives (ultrason, émission acoustique).

5.4 Variables d'endommagement

5.4.1 Modèles monodimensionnels

a) Elasticité

Considérons un élément de volume d'un corps endommagé (Figure...) de section transversale S . Soit S_D l'aire totale des cavités et fissures apparentes sur cette section. Par définition, l'endommagement local qui représente d'un point de vue mathématique la densité surfacique des discontinuités dans la plan de normal \vec{n} , il est donné par:

$$D_n = \frac{S_D}{S} \rightarrow \begin{cases} D_n = 0 : \text{état non endommagé (sain)} \\ D_n = 1 : \text{rupture de l'élément suivant le} \\ \quad \text{plan de normale } \vec{n} \\ 0 < D_n < 1 : \text{état d'endommagement} \end{cases} ; \text{ avec: } S_D = S - \tilde{S} \quad (4.1)$$

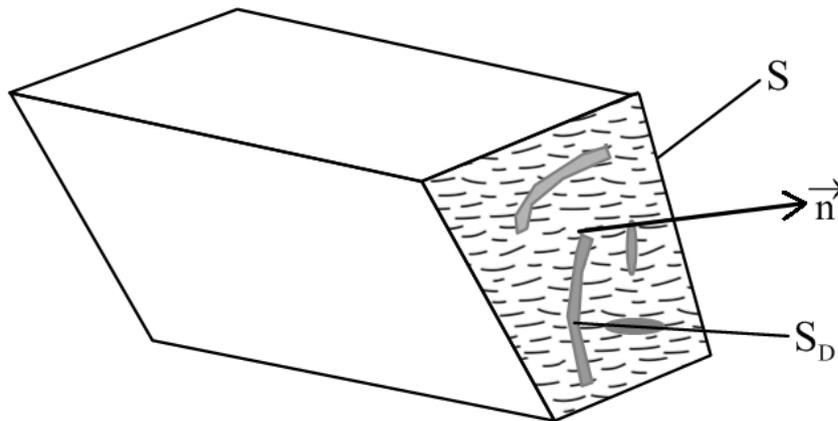


Figure 5-2. Élément endommagé

Dans le cas général, on distingue l'endommagement isotrope et anisotrope. L'endommagement isotrope ($D_n = D$) est constitué d'une distribution uniforme des fissures et cavités dans toutes les directions de l'espace. Avec l'accroissement de la microfissuration, la surface résistant effectivement à la charge appliquée décroît, il en résulte que la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ appliquée sur la section résistance est donnée par:

$$\tilde{\sigma} = \sigma \frac{S}{\tilde{S}} = \frac{\sigma}{1-D} \rightarrow \begin{cases} \tilde{\sigma} = \sigma : \text{matériau vierge} \\ \tilde{\sigma} \rightarrow \infty : \text{rupture} \end{cases} \quad (4.2)$$

En vertu du principe d'équivalence en déformation, on suppose que le comportement à la déformation n'est pas affecté par l'endommagement que sous la seule forme de la contrainte effective que ce soit en uniaxiale ou en tridimensionnel (Lemaitre et Chaboche, 1988). Cela permet d'écrire très simplement les lois de comportement couplées, puisqu'il suffit de remplacer la contrainte usuelle σ par la contrainte effective $\tilde{\sigma}$.

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \Rightarrow \sigma = (1-D)E \varepsilon_e = \tilde{E} \varepsilon_e \quad (4.3)$$

E : module de Young du matériau et $\tilde{E} = (1-D)E$ module d'élasticité du matériau endommagé. L'évolution de \tilde{E} peut permettre de chiffrer l'évolution de D .

En tridimensionnel (3D), la loi de comportement du matériau en élasticité couplée à l'endommagement est donnée par l'expression:

$$\varepsilon = \mathbf{C} : \tilde{\sigma} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1-\nu}{E} \tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\tilde{\sigma}) \mathbf{I} = \frac{1}{1-D} \left[\frac{1-\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{I} \right] \quad (4.4)$$

Tels que \mathbf{I} est la matrice identité et D est la variable d'endommagement isotrope.

b) Plasticité

Un endommagement peut accompagner les grandes déformations plastiques. Si l'évolution des déformations plastiques

5.5 Mesures de l'endommagement

Le phénomène de l'endommagement est difficilement quantifiable par des mesures physiques. Toutefois, on peut le caractériser par une variable prenant en compte le concept de contrainte effective associé au principe d'équivalence en déformation. A cet effet, les méthodes les plus usuelles de mesure de l'endommagement sont les suivantes:

- a) Mesure indirecte basé sur le module de Young après endommagement: présente des difficultés et moins précise.
- b) Méthode dynamique par ultrasons: Cette procédure est basée sur la mesure de vitesse ou du temps de propagation d'ondes ultra-sonores dans le matériau endommagé. Le module d'élasticité après endommagement est alors exprimé à partir des vitesses des ondes longitudinales (v_l) et transversales (v_t).

5.6 Endommagement des structures en béton armé

Les ouvrages en béton armé sont soumis à divers types de chargements (poids propres, charges d'exploitation, thermiques, efforts sismiques, chocs,...etc.). L'expérience montre que la vulnérabilité du bâti existant au nord Algérien est élevée vis à vis des sollicitations sismiques. Les pertes en vies humaines et les niveaux de dommages voire de ruine relevés sur des bâtiments neufs après les expertises post sismique du séisme de Boumérdes (2003) en est témoin. L'évaluation de la vulnérabilité sismique des bâtiments existant s'appuie sur les retours d'expérience des séismes antérieurs pour l'évaluation de la probabilité de dommage ainsi qu'à partir des études basées sur des modèles probabilistes.

L'application des règlements techniques (RPA/2003) à travers le respect des règles de bonne conception, de qualité d'exécution et des dispositions constructives permet la réduction des risques et du niveau de dommage à des seuils acceptables.

Compte tenu de la faible résistance du béton à la traction (12 fois plus élevée en compression qu'en traction), le processus de déformation de compression passe par l'étape élastique réversible sous faible chargement inférieur ($< \bar{\sigma}_c$), ensuite pour des sollicitations plus importantes, il s'effectue une décohésion entre la matrice cimentaire et les granulats sous forme de glissement jusqu'à l'apparition de fissure dans les cristaux des grains contribuant à la déformation plastique (permanente) qui se produit à volume constant. L'endommagement du béton est la phase de généralisation des réseaux de fissures dans la quasi-totalité de la structure dont l'étape ultime est la rupture (collapse).

5.6.1 Endommagement du béton

D'après la revue bibliographique, il existe plusieurs modèles pour la prédiction de l'endommagement du béton sous chemin de chargement monotone et cyclique. Néanmoins, la complexité du phénomène combiné avec le caractère réellement anisotrope du matériau et de la dissymétrie de comportement en traction et compression, font que la réponse de ces modèles appliqués à des cas d'études réelles sont rares. La Figure 5-3 illustre les trois phases gouvernant l'évolution de la déformation en fonction de la contrainte de compression uniaxiale. On constate qu'après rupture précédée par une élasticité (palier 1) et un écrouissage (palier 2), la rigidité se trouve dégradée après avoir accusé des déformations résiduelles ε_p , le matériau développe encore un comportement élastique en rechargement avec un module d'élasticité dégradé (\tilde{E}) qui caractérise la perte de raideur. Pour un état de contrainte donné, on remarque que les déformations sont d'autant plus grandes que l'endommagement est élevé, d'où l'importance des calculs couplés (élasticité- endommagement et plasticité- endommagement).

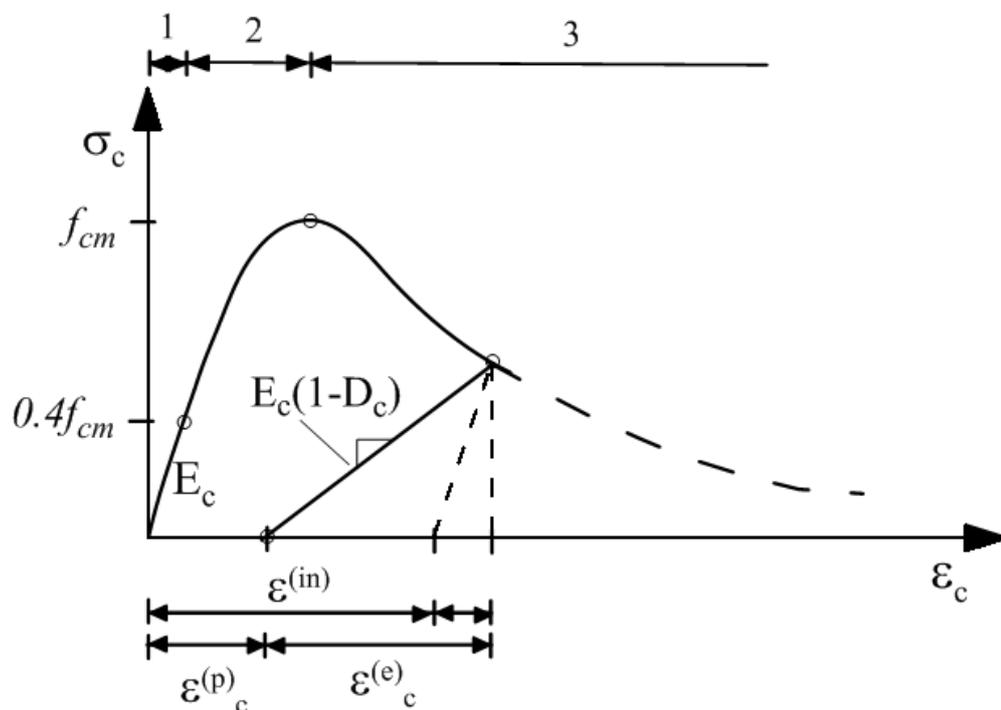


Figure 5-3. Endommagement du béton en compression d'après (Lee et Fenves, 1998)

5.6.2 Modèle d'endommagement de Mazars (1984)

Le modèle de Mazars (1984) est simple et robuste, il permet d'appréhender la diminution de rigidité du béton après apparition des micro-fissures (Figure 5-4). Il pilote l'endommagement isotrope par une seule variable scalaire D qui différencie l'endommagement en compression de celui en traction. Les observations au microscope montrent que les microfissures ont toujours une orientation préférentielle normale aux directions d'extension principales, d'où l'intérêt de considérer la partie positive des déformations principales. Le modèle de Mazars ne prend pas en compte les éventuelles déformations plastiques ni les effets visqueux (fluage) observables au cours de la déformation d'un béton.

La relation contrainte-déformation est donnée par l'équation suivante:

$$\sigma_{ij} = (1 - D) E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rightarrow \sigma = (1 - D) E \varepsilon \quad (4.5)$$

Par ailleurs, l'endommagement du béton est gouverné par la déformation équivalente (ε_{eq}) qui traduit l'état local d'extension durant le chargement. Le béton est un matériau dont le comportement

non linéaire en traction peut être traduit par le couplage entre la loi d'élasticité et un endommagement induit par la déformation. A cet effet, Mazars (1984) considère la déformation équivalente qui est définie à partir des valeurs positives du tenseur de déformation:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon \rangle_+ : \langle \varepsilon \rangle_+} \rightarrow \varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad / \text{dans le repère principal} \quad (4.6)$$

Avec: $\begin{cases} \langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 & \text{si } \varepsilon_i < 0: \text{ cas de traction} \\ \langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_i > 0: \text{ cas de compression} \end{cases}$

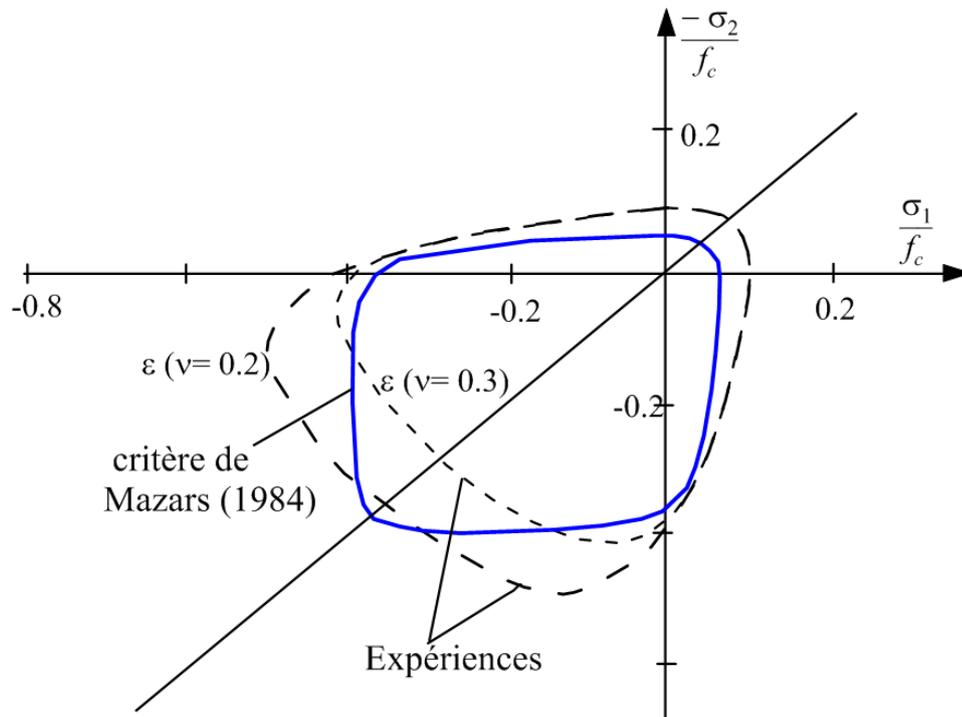


Figure 5-4. Représentation de la surface seuil du modèle de Mazars dans le plan des contraintes $\sigma_1 - \sigma_2$.

L'évolution de l'endommagement est définie à partir d'une fonction seuil donnée par:

$$f(\varepsilon, k(D)) = \varepsilon_{eq} - k(D) = 0 \quad (4.7)$$

$k(D)$ Vaut le seuil d'endommagement, $k(D) = \varepsilon_{d0}$, si: $D = 0$

ε_{d0} Déformation seuil d'endommagement, lorsque la déformation équivalente atteint cette valeur, l'endommagement s'active. La variable D est définie comme une combinaison de deux (2) modes d'endommagement [D_c (compression) et D_t (traction)] variant de 0 à 1 selon l'état d'endommagement associé. L'endommagement global et isotrope D résulte de la combinaison linéaire de ces deux endommagements.

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \quad (4.8)$$

Les coefficients α_t et α_c relient l'endommagement avec l'état de traction ou de compression ($\alpha_t = 1$ alors et $\alpha_c = 0$) lorsque la traction est activée et inversement dans le cas de la compression. Concernant (D_t et D_c), ils sont fonction de la déformation équivalente ε_{eq} , ils sont donnés par:

$$D_{t,c} = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_{t,c})}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_{t,c}}{e^{B_{t,c}(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4.9)$$

(A_t , A_c , B_t , B_c), des paramètres du matériau, ils sont obtenus à partir des essais de traction et de compression. D'après (Lemaitre et Chaboche, 1988), l'ordre de grandeur des paramètres du béton, relatifs au modèle d'endommagement de Mazars (1984) est de:

$$(E = 30 \text{ GPa}, \nu = 0.2, \varepsilon_{d0} = 10^{-4}, A = 0.8, B = 2 \times 10^4)$$

5.7 Plasticité couplée à l'endommagement

L'application du principe d'équivalence en déformation permet de formuler le comportement d'un matériau plastique écrouissable et endommageable. On remplace dans le potentiel de dissipation la contrainte σ par la contrainte effective $\tilde{\sigma}$.

La fonction de charge est donnée par:

$$f = J_2(\tilde{\sigma} - X) - R - k = J_2\left(\frac{\sigma}{1-D} - X\right) - R - k = 0 \quad (4.10)$$

La fonction de dissipation est composée de deux termes (dissipations plastique f et par endommagement φ_D). La loi de normalité se traduit alors par la loi d'écoulement et les évolutions des variables internes sont donnés par :

$$d\varepsilon_p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} ; d\alpha = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial X} ; dr = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial R} ; dD = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D}{\partial Y} \quad (4.11)$$

Dans le cas du critère de Von Mises à écrouissage isotrope, la fonction de charge f gouvernant le domaine élastique est la suivante:

$$f = \frac{\sigma_{eq}}{1-D} - R(r) - k = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{J_2}}{1-D} - R - k = 0 ; J_2 = \frac{\mathbf{s}_{ij} \cdot \mathbf{s}_{ij}}{2} \quad (4.12)$$

$$\dot{\varepsilon} = d\varepsilon_p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \frac{\sigma'}{\sigma_{eq}} \quad \text{et} \quad \dot{r} = \dot{\lambda} = (1-D) \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p = \dot{\rho}(1-D) \quad (4.13)$$

$\dot{\lambda}$ et \dot{r} s'expriment par la condition de consistance :

$$\dot{f} = df = \frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial f}{\partial R} dR + \frac{\partial f}{\partial D} dD = 0 \rightarrow \frac{3}{2} \frac{\sigma' : \sigma}{\sigma_{eq}(1-D)} - R'(r) dr + \frac{\sigma_{eq}}{(1-D)} dD = 0 \quad (4.14)$$

Avec : $\dot{r} = \dot{\lambda}$; $\frac{\sigma_{eq}}{1-D} - R - k = 0$ et $\dot{D} = dD = -\dot{\lambda} \frac{\partial \varphi_D}{\partial Y}$

Il en résulte après développement l'expression du multiplicateur plastique:

$$\dot{\lambda} = d\lambda = \frac{d\sigma_{eq}}{(1-D)R'(r) + (k + R(r)) \frac{\partial \varphi_D}{\partial Y}} \rightarrow \begin{cases} d\lambda = 0 & \text{si } \sigma_{eq} \leq 0 \\ d\lambda > 0 & \text{si } \sigma_{eq} > 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

5.8 Autres modèles d'analyse de l'endommagement

5.8.1 Modèle de Mander et Park pour les structures en béton armé

Le comportement non linéaire des structures en béton armé sous l'effet sismique peut être étudié en utilisant la méthode des éléments finis. A cet effet, la plasticité localisée ou distribuée dans les éléments poteaux poutres et voiles (flexion et bi-flexion composée) peut être appréhendée en faisant recours à des modèles à fibres associant une loi de comportement contrainte-déformation uniaxiale pour les matériaux béton et acier (lois de Mander et Parck) voir Figure 5-5. On dénote que le béton confiné présente un meilleur comportement mécanique, il dépend de la contrainte effective latérale de confinement conférée par les armatures transversales (Mander et al., 1988). Le modèle non linéaire à fibres implémenté dans les codes de calcul permet de distinguer entre le comportement du béton confiné, non confiné et les armatures.

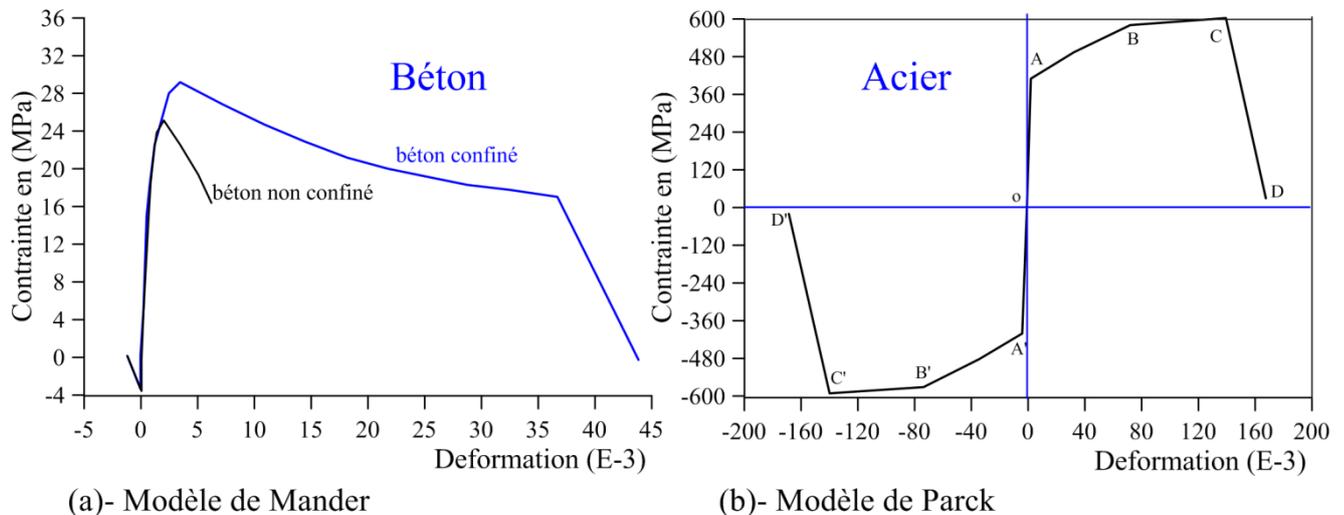


Figure 5-5. Lois de comportement de l'acier et du béton associées au modèle à fibres (Mander et Parck)

5.8.2 Modèle de Takeda

Ce modèle est bien adapté pour la modélisation du comportement non linéaire du béton armé notamment sous l'effet cyclique (Figure 5-6). Il reproduit le comportement réaliste des structures en béton armé en tenant compte à la fois des chemins de rechargement mieux que le modèle élastoplastique. La dégradation de la rigidité de décharge sans influence sur la résistance est ajustée par un paramètre β compris entre 0 et 1. Ce modèle est implémenté dans quelques codes de calculs par éléments finis en vue d'étudier le comportement non linéaire des structures sous chargement sismique.

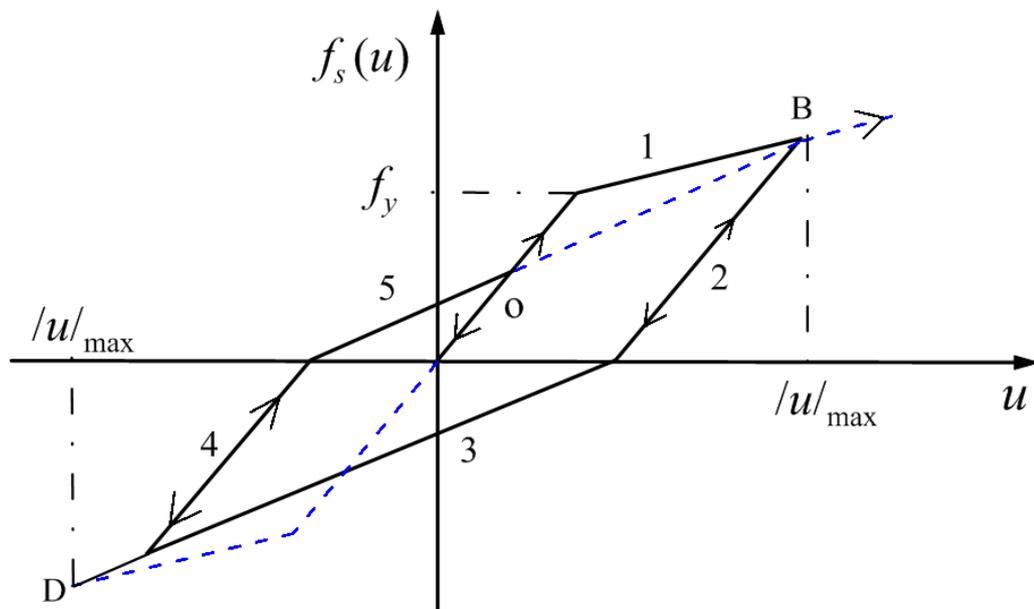


Figure 5-6. Modèle de Takeda pour le béton armé

5.9 Notion d'indices de dommage

L'approche globale du dommage à l'échelle d'une structure est souvent basée sur l'utilisation des critères de ductilité, rigidité, d'énergie ou de nombre de cycles. Généralement l'écriture de ces indicateurs repose sur l'analyse de la réponse des structures par rapport aux sollicitations monotones ou cycliques. Ils se traduisent sous formes de diagrammes moment-courbures ou force-déplacement. Quelqu'un soit la complexité, l'indice de dommage local ou global peut être un outil efficace pour le décideur contraint de choisir entre réhabiliter ou détruire un ouvrage suite à une sollicitation exceptionnelle (séisme par exemple). 1

5.10 Conclusion

De nos jours, l'analyse du comportement non linéaire des ouvrages de génie civil constitue un impératif pour l'ingénieur en vue d'appréhender la capacité de résistance d'un ouvrage et d'évaluer sa vulnérabilité vis à vis des chargements exceptionnels (sismiques). Pour ce faire, le recours à des outils d'analyse numérique par éléments finis (Sap, Etaps, Robot,...etc.) est requis. A cet effet, la maîtrise des lois de comportement élastoplastiques et la caractérisation des matériaux constitutifs au delà du seuil élastique est indispensable pour mener une meilleure analyse des résultats de calcul. Ce polycopié permet donc aux étudiants en Master d'acquérir les connaissances scientifiques de base pour bien s'imprégner dans le calcul non linéaire des structures. Pour permettre une meilleure compréhension du cours, des applications exhaustives avec corrigés détaillés clôturent chaque chapitre.

6 Bibliographie

- Bahar R., 2004.** Cours de comportement des sols, Post graduation Magistère en Génie Civil . *Université Mira Abderrahmane Bejaia*. 2004.
- Bazergui A., Bui-Quoc T., McIntyre G. et Laberge C 2002.** Résistance des matériaux, Troisième Edition. *Presses Internationales Polytechnique, Ecole Polytechnique de Montréal*. 2002, ISBN 2-553-01034-6, p. 715.
- Cardou A. 2006.** Plasticité fatigue et rupture des matériaux métalliques. *Modèles mécaniques*. 2006, p.376.
- Cazenave M. 2013.** Méthode des éléments finis, Approche pratique en mécanique des structures, 2ème édition. Edition Dunod, Paris, 2013, ISBN: 978-2-10-058536-6.
- CGS. 2003.** Règles parasismiques Algériennes- RPA99/Version 2003. *Arrêté du 11 Janvier 2004 portant du MHU portant approbation du DTR BC-2.48 relatifs aux règles parasismiques Algériennes*. Centre National de Recherche appliquée en Génie parasismique (CGS), 2003, ISBN: 9961-923-13-8, p. 89.
- Desrues J. 2002.** Limitations du choix de l'angle de frottement pour le critère de plasticité de Drucker Prager, . *Revue Française de Génie Civil (RFGC)- publié online le 04 octobre 2011*. 2002, Vol. 6, Issue 5, DOI: 10.1080/12795119.2002.9692406, pp. 853-862.
- Dhouib A. 2016.** Géotechnique appliquée aux projets de construction: Identification et classification des sols, lois de comportement, paramètres géotechniques et Justification des projets de construction- ISBN 978-2-85978-505-5. *Press des Ponts*. 2016, p. 1041.
- Eurocode8. 2008.** Norme française portant sur le calcul des structures pour leur résistance aux séismes. *NF EN-1991-1*. 2008, ISSN:0335-3931, p. 186.
- François D., Pineau A. et Zaoui A. 1999.** Comportement mécanique des matériaux, Elasticité et Plasticité. Hermes Sciences- Lavoisier, 1999, ISBN. 978-2-7462-2347-9.
- Frey F. 1994.** Analyse des structures et milieux continus. *Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, ISBN 2-88074-277-3*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1994, p. 452.
- Fuentes A. 2017.** Béton armé: Fissuration- flèches- redistribution d'efforts et formation des mécanismes de ruptures. *Office des Publications Universitaires (OPU)- 3ème Edition*. Aout 2017, ISBN: 978 9961.0.059.0, dépôt légal: 404/2003, p. 210.
- Haplhén B. et Salençon J. 1987.** Cours de calcul des structures anélastiques, Elastoplasticité. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées-Paris, 1987, Vol. V1, ISBS 2-85978-094-7, p. 448.
- Hicher py. et Shao JF. 2002.** Elastoplasticité des sols et des roches, modèles de comportement des sols et des roches. *Mécanique et Ingénierie de Matériaux*. Hermes Sciences- Lavoisier, 2002, Vol. 1, ISBN 2-7462-0436-3, p. 223.

Lemaitre J. et Chaboche JL. 1988. Mécanique des matériaux solides. *Dunod 2eme édition, publié avec le concours du CRECO (grandes déformations et endommagement) du CNRS et de l'ONERA.* 1988.

Mander JB., Priestley MJ and Park R. (1988). Theoretical stress-strain model for confined concret, *Journal of Strctural Engineering, ASCE* 114 (8) pp-1804-1826

Mestat Ph. 1993. Lois de comportement des géomatériaux et modélisation par la méthode des éléments finis (MEF). *Etudes et Recherches des Laboratoires des Ponts et Chaussées, Serie géotechnique GT52.* 1993, p. p180.

Mimoune FZ.. et Mimoune M. 2015. Calcul plastique des structures à barres. *Office des Publications Universitaires (OPU).* Edition 2ème-2.03.5252, 2015, ISBN 978.9961.0.1495.0, p. 100.

Paulay T. and Priestley MJ. 1992. Seismic design of reinforced concrete and masonry buldings, John Wiley and sons, Nex York 1992

Sidoroff. 1992. Polycopie de cours de Mécanique des solides, Tome1-mécanique des milieux continus. *Ecole Centrale de Lyon (ECL) France.* 1992, p. p194.

Temam R. 1983. Problèmes mathématiques en plasticité, méthodes mathématiques de l'informatique, Collection dirigée par J.L Lions. *Ecole Polytechnique.* Edition Bordas, 1983, ISBN 2.04. 015429-9, p. 481.

Wielgosz Ch. 1999. Résistance des matériaux, Elasticite, plasticité et éléments finis. Edition Ellipses, 1999, ISBN 2-7298-7931-5, p. 312.

Rappels des notions d'élasticité

Vecteur contrainte (formule de Cauchy): $T_i = \sigma_{ij}n_j \rightarrow \{T\} = [\sigma]\{n\}$

Polynôme

caractéristique:

$$|\sigma - \lambda I| = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 I_1 - \lambda I_2 + I_3 = 0 : (I_1, I_2 \text{ et } I_3 \text{ invariants de contraintes})$$

$$I_1 = \sigma_{ii} ; I_2 = (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})/2 = (\text{tr}^2(\sigma) - \text{tr}(\sigma)^2)/2 ; I_3 = \det(\sigma) = (\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}\sigma_{im}\sigma_{jm}\sigma_{kp})/6$$

En contraintes principales: $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ; I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3 ; I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$

Déviateur

de

contraintes:

$$\sigma_{ij}^{(d)} = s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} ; p = I_1/3 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 ; (\delta_{ij} : \text{symbole de Kronecker})$$

Invariants

du

déviateur

de

contraintes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Polynôme caractéristique: } \lambda_s^3 - J_2\lambda_s - J_3 = 0 \\ J_1 = 0 ; J_2 = \frac{s_{ij}s_{ij}}{2} = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)/2 ; J_3 = \det(s_{ij}) \end{array} \right.$$

$$\text{Déformations: } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = \frac{\gamma_{ij}}{2}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} ; \varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Equations d'équilibre: $\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 ;$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 ;$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$$

Equations de Beltrami: $\sigma_{ij,ii} + f_{i,j} + f_{j,i} + \frac{v}{1+v} f_{i,i} = 0$

Compatibilité des déformations:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$