Université A/Mira de Bejaia Bejaia 2024/2025
Département de Recherche opérationnelle
L2 MA.

Série de TD N° 1 d'Analyse 3

Exercice 1. Déterminer la nature et calculer la somme dans le cas de la convergence des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \sum_{n\geq 1} \cos\frac{1}{n}, \quad \sum_{n\geq 0} \sin n, \quad \sum_{n\geq 1} (1+\frac{1}{n})^n$$

$$2)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+2}}{3^n}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{e^{i\theta n}}{2^n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{q^n}\ (q\in\mathbb{R}^*), \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

Exercice 2. 1) Montrer que la série de terme général

$$u_n = n^{-1} + \ln(n) - \ln(n+1),\ n\in\mathbb{N}^*$$

est convergente.
2) Déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $a_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$ est convergente.

Exercice 3. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec

$$u_n = \ln(\cos\frac{1}{2^n})$$

est convergente et calculer sa somme.
Indication : on utilisera la formule trigonométrie

$$\sin\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2\sin(\frac{1}{2^n})\cos(\frac{1}{2^n})$$

Exercice 4. Etudier la nature des séries de terme général :

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n}, \quad u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}, \quad u_n = \frac{1}{n\sin^2 n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

$$u_n = \sqrt{n^4+2n-1} - \sqrt{n^4+4n}, \quad u_n = \frac{\sin n}{n^{\frac{3}{2}}},\ n\in\mathbb{N}^*$$

$$u_n = \frac{3^n+n}{2^n+1},\ n\in\mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt{\ln(2n+1)} - \sqrt{\ln(2n)},\ n\in\mathbb{N}^*$$

$$u_n = \left(\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\right)^n, \quad u_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{(2n)^n},\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Exercice 5. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ dans les cas suivants :

$$1)\ u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad 2)\ u_n = (-1)^n\frac{2^n}{n!}, \quad 3)\ \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

Exercice 6. Montrer que les séries suivantes sont convergentes, puis calculer leurs sommes

$$1)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad 2)\ \sum_{n\geq 1} \arctan\frac{1}{2n^2}$$