جامعة بجاية
Tasdawit n'Bgayet
Université de Béjaïa

Université Abderrahmane MIRA-BEJAIA

Faculté des Sciences Économiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

Département des enseignements de base pour le domaine SEGC-LMD

Polycopié pédagogique

Titre

Statistique II

Réalisé par

Dr. Mousli Abdenadir

Cours destiné aux étudiants de la première année

Année: 2020/2021

Avant propos

Ce polycopié de cours à pour vocation pédagogique, il est destiné particulièrement aux étudiants en licence d'économie ou de gestion, car il correspond au programme de statistique et probabilités habituellement enseigné dans les deux premières années. Cependant, il peut être utile à toute personne souhaitant connaître les notions fondamentales de la théorie des probabilités.

Les axiomes du calcul des probabilités ainsi que les principales notions d'expérience aléatoire, d'événement, d'indépendance et de probabilité conditionnelle sont présentées de manière aussi simple que possible.

Les concepts de variables aléatoires, de lois de probabilités usuelles ainsi que celui de l'espérance mathématique ou de la variance sont développés en spécifiant le cas discret du cas continu.

Chaque chapitre se conclut par des exercices permettant de vérifier l'acquisition des notions fondamentales qui ont été introduites.

Introduction générale

La théorie des probabilités constitue un cadre mathématique pour la description du hasard et de la variabilité, ainsi que pour le raisonnement en univers incertain. La théorie des probabilités forme un tout cohérent dont les concepts, les méthodes et les résultats interviennent dans de très nombreux domaines des sciences et des technologies.

Le calcul des probabilités a commencé avec Blaise Pascal, Pierre Fermat, Christian Huygens et Jacques Bernoulli par l'analyse des jeux dits de hasard. Le mot hasard est d'ailleurs emprunté à l'arabe az-zahr (jeu de dés, alea en latin) au 17ème siècle, d'où est venue cette expression jeu de hasard au 16 ème siècle. La théorie des probabilités servira ensuite d'outil de base à un ensemble de méthodes ou de règles objectives permettant d'utiliser des données pour fixer la précision avec laquelle on estime certains paramètres (théorie de l'estimation) ou on teste certaines hypothèses (théorie des tests)

Bien que le calcul de probabilités sur des questions liées au hasard existe depuis longtemps, la formalisation mathématique n'est que récente. Elle date du début du $20^{ème}$ siècle avec l'axiomatique de Kolmogorov.

Dans le domaine économique et industriel, la théorie des probabilités intervient généralement à l'étude de la fiabilité et la performance des systèmes et des procédés, dont le comportement comme l'environnement de fonctionnement sont variables, à la gestion des approvisionnements et des stocks, aux politiques d'assurance, aux prévisions économiques, aux décisions d'investissement, et à l'évaluation et la gestion du risque, etc.

Chapitre 1 : Analyse combinatoire

Introduction

L'analyse combinatoire est la branche des mathématiques dont le but est de dénombrer les différentes dispositions que l'on peut former avec un nombre fini d'éléments.

L'analyse combinatoire comprend un ensemble de méthodes qui permettent de déterminer le nombre de tous les résultats possible d'une expérience particulière.

La connaissance de ses méthodes de dénombrement est indispensable au calcul des probabilités qui constituent le fondement des statistiques.

1.1. Principe fondamental de l'analyse combinatoire

Si une procédure quelconque peut être représentée de n_1 façons différentes, si après, cette procédure peut être présentée de n_2 façons différentes, et si ensuite une troisième procédure peut être présentée de n_3 façons différentes, et ainsi de suite, alors le nombre de façons différentes permettant d'exécuter les procédures dans l'ordre indique est égal au produit

$$\boxed{N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times ...}$$

Exemple :

Supposant qu'une plaque d'immatriculation contient deux lettres distinctes suivies de trois chiffres dont le premier est différent de zéro. Combien de plaques différentes peut-on *imprimer ?*

Réponse :

Il y a 26 façons différentes d'imprimer la première lettre, 25 façons différentes d'imprimer la seconde lettre, 9 façons différentes d'imprimer le premier chiffre et dix façons différentes d'imprimer les deux autres chiffres, on déduit que l'on peut imprimer :

L1	L2	C1	C2	C3

$\mathrm{N} = 26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000$ plaques différentes

1.2. Arrangement sans répétition

Un arrangement de p éléments dans un groupe parmi n éléments est une disposition ordonnée sans répétition de p éléments on note :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemple 1 :

Combien de mots à 2 lettres distinctes peut-on former avec les lettres a,b,c ?

Réponse :

Un tirage correspond à un arrangement de deux éléments parmi trois. En effet, l'ordre de tirage est important mais on effectue le tirage sans remise donc il ne peut y avoir de répétitions. On a donc : ab ba ac ca bc cb

Donc : $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times 2\times 1!}{1!} = 6$

Exemple 2*:*

On dispose d'une urne contenant trois boules différentes, numérotées 1, 2 et 3 et on en tire deux (sans remise) parmi les trois.

Combien de tirages différents peut-on effectuer ?

Réponse :

Même chose, on peut trouver 6 tirages différents :

$(1-2),(2-1),(1-3),(3-1),(2-3),(3-2)$

$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\times 2\times 1!}{1!} = 6$ tirages possibles.

1.3. Permutation sans répétition

C'est un arrangement sans répétition de **n** objet parmi **n** en tenant compte de l'ordre (Autrement dit, c'est une liste ordonnée d'entiers distincts entre 1 et n).

$$\boxed{P_n = n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1}$$

Exemple 1 :

Combien de mots à 3 lettres distinctes peut-on former avec les lettres a,b,c ?

Réponse :

abc acb bac bca cab cba

Donc : $P_3 = 3! = 3\times 2\times 1 = 6$

Exemple 2 :

Combien y a-t-il de façons de placer huit personnes autour d'une table ?

Réponse :

$P_8! = 8! = 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 40320$

Exemple 3:

4 Américains, 5 Suisses et 7 japonais doivent s'asseoir sur un même banc, et doivent rester groupés par nationalité. Combien y a-t-il de dispositions possibles ?

Réponse :

$P = 3! \times 4! \times 5! \times 7!$ (Le $3!$ pour le trois nationalités)

1.4. Combinaison sans répétition

Une combinaison sans répétition de **p** éléments parmi **n** est une disposition non ordonné (on ne tient pas compte de l'ordre) on note :

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{P!(n-p)!}}$$

Exemple 1:

Combien de combinaison de 2 lettres peut-on former avec les lettres a,b,c ?

Réponse :

ab, ac, bc

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Exemple 2:

Une loterie avec 100 inscrits, on tire 3 numéros au hasard :

1) Ils gagnant tous 6000DA. Ici, l'ordre n'est pas important. C'est une combinaison d'où le nombre de possibilités de tirage est donc égale au nombre de manières de tirer 3 numéros parmi 100, soit : $C_{100}^3 = \dfrac{100!}{3!(100-3)!} = \dfrac{100!}{3! \times 97!} = \dfrac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{6 \times 97!} = 161700 \text{ possibilités}$

2) Le premier gagne 6000DA, le deuxième en gagne 5000DA et le troisième 2000DA. Ici, l'ordre est important, c'est un arrangement. Soit :

$$A_{100}^3 = \frac{100!}{(100-3)!} = \frac{100 \times 99 \times 98 \times 97!}{97!} = 970200 \ \textit{possibilités}$$

1.5. Le triangle de Pascal

Les coefficients binomiaux (C_n^p) qui sont les coefficients de la formule du binôme de Newton figurent dans de nombreuses formules mathématiques, notamment pour le calcul des probabilités de la **loi binomiale**. Ces coefficients peuvent être obtenus facilement à l'aide du **triangle de Pascal**.

Tableau 1.1. Le triangle de pascal

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	…	p-1	p
1	1	1	0							
2	1	2	1	0						
3	1	3	3	1	0					
4	1	4	6	4	1	0				
5	1	5	10	10	5	1	0			
6	1	6	15	20+	15	6	1	…		
7	1	7	21	35	=35	21	7	…		
…	…	…	…	…	…	…	…	…		
n-1									C_{n-1}^{p-1} + →	C_{n-1}^{p} ↓
n										$=C_n^p$

Source : Seymour Lipschiuts. *Probabilités : cours et problèmes (dix-huitième tirage)*. Séries Schaum, p20.

Par exemple : $C_8^3 = 56$: il y a 56 choix de 3 objets parmi 8.

Propriétés :

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p},\ 1 \le p \le n \ \text{(formule de Pascal)}$$

$$C_n^p = C_n^{n-p} \ \text{(Formule de symétrie)}$$

Par exemple $C_7^4 = C_7^{7-4} = C_7^3 = 35$

Théorème du Binôme de Newton

$$\forall (a,b) \in R, n \in N, (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

Exemple : $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1.6. Les répétitions

Si les n objets dont on dispose existent en plusieurs exemplaires alors il peut y avoir la répétition du même objet. Dans ce cas on obtient :

1.6.1. Arrangement avec répétition

On dit un arrangement avec répétition de ***p*** objets distincts toutes dispositions ordonnées de ***p*** objets parmi les *n* objets où un objet peut apparaitre plusieurs fois.

$$\boxed{A_n^p = n^P}$$

Exemple : combien de mots différents de 5 lettres peut-on faire avec les lettres du mot « COMBIEN » telle que une lettre peut apparaître plus d'une fois.

Réponse : il y a $A_7^5 = 7^5$ **= 16807** mots différents.

1.6.2. Permutation avec répétition

Ici on veut déterminer le nombre de permutations dans un ensemble de n objets quand certains de ces objets sont indistinguables les uns des autres.

Théorème :

Il y a $\left[P_n = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\right]$ permutations différentes de n objets parmi lesquels n_1 indistinguable entre eux, n_2 autres entre eux également……., n_k entre eux.

Exemple1 :

Considérons le mot « CELLULE». Le nombre de mots possibles (avec ou sans signification) que l'on peut écrire en permutant ces 7 lettres est :

$P_7 = \dfrac{7!}{2!3!} = 420$ mots en considérant deux groupes de lettres identiques L (3fois) et E (2fois)

Exemple2:

Parmi les 10 participants à un tournoi d'échec, on compte 4 Russes, 3 Américains, 2 Anglais et un Brésilien. Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leurs identités, à combien de classements individuels différents une telle liste correspond-elles ?

Réponse : $P_{10} = \dfrac{10!}{4!3!2!1!} = 12600$ classement s possibles

1.6.3. Combinaison avec répétition

Une combinaison avec répétition de k objets pris dans un ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots ,x_n\}$ de n objets est une manière de sélectionner k fois de suite un objet dans E, sans tenir compte de l'ordre des k choix et « avec remise », le même objet pouvant donc être sélectionné plusieurs fois, on note :

$$\boxed{C'^{p}_{n} = C^{p}_{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{P!(n-1)!}}$$

Exemple:

Lors d'un sondage, on pose à 100 étudiants une question comportant 3 réponses possibles.

-Quelle est le nombre de configuration peut-on avoir ?

Réponse :

C'est le nombre de combinaisons avec répétition

$$C'^{3}_{100} = C^{3}_{100+3-1} = C^{3}_{102} = \frac{102!}{3!(99)!} = \frac{102\times101\times100\times99!}{3\times2\times1\times99!} = 171700 \text{ configurat ions}$$

Exercices :

Exercice 1 :

Combien peut-on former de plaques d'immatriculation différentes constituées de 4 lettres distinctes suivies de 4 chiffres dont le premier est différent de zéro

Réponse :

Le nombre d'immatriculation différentes qu'on peut former est donné par le principe fondamental de l'analyse combinatoire soit :

L1	L2	L3	L4	C1	C2	C3	C4

$$N = 26\times 25\times 24\times 23\times 9\ \times\ 10\times 10\times 10 = 32299200000 \text{ plaques différente s}$$

Exercice 2 :

Combien peut-on former de plaques d'immatriculation différentes constituées de :

a) quatre chiffres?

b) quatre chiffres distincts?

c) quatre chiffres dont le premier est différent de zéro ?

Réponse :

a) L'ordre est important, il s'agit d'un arrangement avec répétition (n=10, p=4)

$$A_{10}^{4} = 10^{4} = 10000$$

b) Ici**,** il s'agit d'un arrangement sans répétition (n=10, p=4)

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10\times 9\times 8\times 7 = 5040.$$

c) $A_{9}^{1}\cdot A_{10}^{3} = 9\times 10^{3} = 9000$

Exercice 3 :

Avec les lettres A, B, C, D, E et F combien de mots différents de 5 lettres peut-on former :

a) au total?

b) si les répétitions des lettres ne sont pas permises?

c) si les répétitions des lettres ne sont pas permises et le mot commence par une consonne?

Réponse :

a) L'ordre est important, il s'agit d'un arrangement avec répétition (n=6, p=5)

$$A_{6}^{5} = 6^{5} = 7776$$

b) L'ordre est important, il s'agit d'un arrangement sans répétition (n=6, p=5)

$$A_{6}^{5} = \frac{6!}{(6-5)!} = 720$$

c) $A_{4}^{1}A_{5}^{4} = 4\times(5\times 4\times 3\times 2\times 1) = 480$

Exercices 4 :

Les 7 tomes d'un dictionnaire de l'économie sont rangés au hasard dans une bibliothèque.

a) De combien de façon peut-on les classer ?
b) Parmi toutes ces façons combien y en t-il où les tomes 1,2,3 se trouvent côte dans cet ordre ?

Réponse :

a) Le nombre de façons de classer les 7 tomes est :

$$P_7 = 7! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 5040$$

b) Il y a 5 places possibles pour le tome 1, les places du tome 2 et du tome 3 sont déterminées. Il y a 4 !façons de ranger les 4 autres tomes. On a alors 5.4 !façons possibles.

Exercices 5 :

Combien de nombres à 5 chiffres (distincts) peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les cas suivants :

1. sans aucune restriction.
2. le nombre est un multiple de 2.
3. le nombre est divisible par 5.
4. le nombre est impair.
5. le nombre est supérieur à 50000.

Réponse :

Le nombre des nombres à 5 chiffres distincts qu'on peut former avec les 9 chiffres est :

1. **Sans aucune restriction**

$$A_9^5 = 9\times8\times7\times6\times5 = 15120$$

2. **Le nombre est un multiple de 2**

$$A_8^4 A_4^1 = 8\times7\times6\times5\times4 = 6720$$

3. **Le nombre est divisible par 5**

$$A_8^4 A_1^1 = 8\times7\times6\times5\times1 = 1680$$

4. **Le nombre est impair**

$$A_8^4 A_5^1 = 8\times7\times6\times5\times5 = 8400$$

5. **Le nombre est supérieur à 50000**

$$A_4^1 A_8^4 = 4 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 6720$$

Exercices 6 :

Un clavier de 10 touches (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9); permet de composer le code d'entrée d'un coffre d'une banque, à l'aide d'un nombre de 4 chiffres.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?

Réponse :

1. Le nombre de codes différents qu'on peut former est :

$$N_1 = A_{10}^4 = 10^4 = 10000$$

2. Le nombre de codes sans le chiffre 1 est :

$$N_2 = A_9^4 = 9^4 = 6561$$

3. Le nombre de codes comportant au moins une fois le chiffre 1est :

Pour trouver le nombre de codes contenant au moins une fois le chiffre 1, il suffit de retrancher le nombre de codes sans le chiffre 1 du nombre total de codes.

$$\text{donc : } N_3 = N_1 - N_2 = 10000 - 6561 = 3439$$

4. Le nombre de code comportant des chiffres distincts est :

$$N_4 = A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = 5040$$

Exercices 7 :

Soit un lot de 7 pièces dont 4 sont bonnes et 3 sont défectueuses

a) Combien d'échantillon de 3 pièces peut-on réaliser ?
b) Combien parmi ces échantillons contiennent 3 bonnes pièces ?
c) Combien parmi ces échantillons contiennent au moins une pièce bonne ?

Réponse :

a) **On peut réaliser :**

$$C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35 \text{ échantillo ns de 3 pièces}$$

b) **Parmi ces échantillons de 3 pièces, il y en a :**

$$C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \text{ qui contiennent 3 pièces bonnes.}$$

c) Parmi ces échantillons de 3 pièces, il y en a :

$$C_4^3 + C_3^2 C_4^1 + C_3^1 C_4^2 \text{ qui contiennent au moins une pièce bonne.}$$

Exercices 8 :

Une classe comprend 25 élèves dont 15 garçons et 10 filles. Pour des travaux pratiques on choisit des sous groupes de 5 étudiants :

a) Combien de sous groupes différents peut-on former ?

b) Combien de sous groupes contenant 3 garçons et 2 filles seulement peut-on former ?

Réponse :

a) On peut former :

$$C_{25}^5 = \frac{25!}{(25-5)! \cdot 5!} = 53130 \text{ sous groupes différents}$$

b) On peut former :

$$C_{15}^3 C_{10}^2 = \frac{15!}{(15-3)! \cdot 3!} \times \frac{10!}{(10-2)! \cdot 2!} = 20475 \text{ sous groupes contenant 3 garçons et 2 filles}$$

Chapitre 2 : Introduction aux calculs de probabilités

2.1. Notion d'expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une épreuve dont le résultat est imprévisible, c'à d le résultat ne peut être prévu à priori.

Exemple1 :

Le lancé d'une pièce de monnaie est une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont : {pile, face}

Exemple2 :

Le jet d'un dé, est une expérience aléatoire dont les résultats possibles sont : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2.2. Espace fondamental

C'est l'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire. Il est noté Ω

Exemple : On jette deux fois une pièce de monnaie :

$\Omega = \{(F.F), (F.P), (P.F), (P.P)\}$

2.3. Notion d'événement

Soit Ω l'espace fondamental associé à une expérience aléatoire. L'ensemble des parties de Ω noté $P(\Omega)$ représente l'ensemble des événements associés à Ω .

Exemple : jet un dé : expérience aléatoire. Son espace fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A : événement d'avoir un chiffre pair. $A = \{2, 4, 6\}$

2.4. Notion de cardinal

Si Ω à un nombre fini d'éléments, alors toute partie A de Ω $(A \subset P(\Omega))$ a également un nombre fini d'éléments.

Le cardinal de A, noté $card(A)$, est le nombre d'éléments de A

Exemple : on a : $A = \{2, 4, 6\}$, $card(A) = 3$

Propriétés :

- $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$
- $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$
- $card(A / B) = card(A) - card(A \cap B)$
- $card(\phi) = 0$

2.5. Correspondance entre le langage probabiliste et le langage ensembliste

***2.5.1. L'événement certain* :** C'est l'événement qui se produit quelque soit le résultat d'une expérience aléatoire.

Exemple : jet un dé, **A** événement d'avoir un chiffre positif.

***2.5.2. L'événement impossible* :** C'est l'événement qui ne se réalise pas quelque soit le résultat d'une expérience.

Exemple : jet un dé, **A** événement d'avoir un chiffre supérieur à 6.

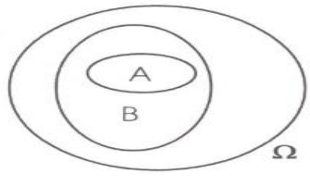
***2.5.3. Implication* :** On dit que l'événement **A** implique l'événement **B** si à chaque fois que **A** réalisé, **B** l'est aussi, on écrit $A \subset B$

Figure 2.1

Exemple :

Jet un dé : **A** événement d'avoir un chiffre pair

: **B** événement d'avoir un chiffre positif. Donc $A \subset B$



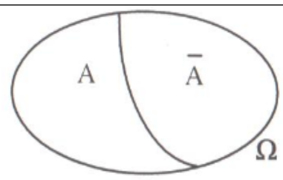
***2.5.4. La négation* :** le contraire de l'événement **A**, noté $\overline{A}$ est l'événement qui se réalise si et si seulement si (ssi) **A** n'est pas réalisé.

Figure 2.2

Exemple :

Jet un dé : A événement d'avoir un chiffre pair.

: $\overline{A}$ événement d'avoir un chiffre impair.



***2.5.5. La conjonction* :** l'événement **A** et **B**, noté $(A \cap B)$ est l'événement qui est réalisé si A et B sont simultanément réalisés.

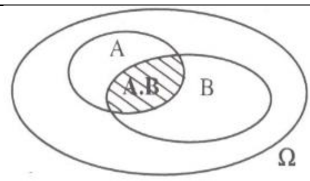
Figure 2.3

Exemple :

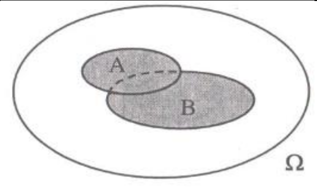
Jet un dé : **A** événement d'avoir un chiffre inférieur à **4**, **A={1,2,3}**

: **B** événement d'avoir un chiffre impair. **B={1,3,5}.**

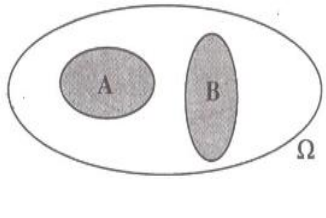
Donc : A$\cap$B={1,3}



2.5.6. La disconjonction **:** l'événement **A** ou **B**, noté $(A \cup B)$ est l'événement qui est réalisé si l'un au moins des deux événements **A** ou **B** est réalisé. **Figure 2.4**

Exemple : Jet un dé : **A** événement d'avoir un chiffre inférieur à **4**, **A={1,2,3}.** : **B** événement d'avoir un chiffre impair. **B={1,3,5}.** **Donc : A $\cup$ B={1,2,3,5}**	

2.5.7. L'événements incompatibles **:** Deux événements **A** et **B** sont dit incompatibles, s'ils ne peuvent être réalisés simultanément : c'à d : $A \cap B = \phi$. **Figure 2.5**

Exemple : jet un dé **A** événement d'avoir un chiffre inférieure à **3**,**A= {1,2}** **B** événement d'avoir un chiffre supérieure à **4**, **B= {5,6}** **Donc : A $\cap$ B=ϕ**	

2.6. Espace de probabilité $\{\Omega, P(\Omega)\}$

Si on effectue une expérience aléatoire dont l'espace fondamental Ω. A chaque événement A_i de Ω, on lui associe un pourcentage de chance pour qu'il soit réalisé. Ce pourcentage de chance représente la probabilité pour qu'un événement A_i quelconque se réalise. Donc : on appelle probabilité sur $\{\Omega, P(\Omega)\}$ une application P de $P(\Omega)$ dans [0 , 1] qui satisfait : $P(\Omega) = 1$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

Conséquence **:** $\forall A \subset \Omega : 0 \leq P(A) \leq 1$

Propriétés **:**

1) $P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad \forall \text{A} \in \Omega$
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad Si\ \text{A} \cap \text{B} \neq \phi$
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad Si\ \text{A} \cap \text{B} = \phi$ (incompatible)
4) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Cas d'équiprobabilité **:** L'équiprobabilité est le cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité d'être réalisé. Donc, s'il y a **n** événements $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, chacun a la même probabilité $\left(\frac{1}{n}\right)$ d'apparaître. Dans ce cas une autre définition de la probabilité.

Soit Ω fini dont les éléments sont équiprobables et **A** un événement quelconque de Ω.

On a : $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorable à A}}{\text{nombre de cas total}}$

Exercice 1 **:** une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On fait 2 tirages avec remise. Calculer la probabilité d'avoir 2 boules rouges.

Solution **:**

L'espace fondamental : $\Omega = \{(B,B),(B,R),(R,B),(R,R)\}$ Card(Ω)=4

E : l'événement d'avoir 2 boules rouges $E = \{(R,R)\}$, Card(E)=1

$$P(E) = \frac{card(E)}{card(\Omega)} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$$

Exercice 2 **:** on lance 2 dés identiques. Quelle est la probabilité d'avoir :

A : la somme égale à 8

B : 2 chiffres semblables

C : la différence supérieure à 3

Solution **:**

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,6)\} \quad \text{card}(\Omega) = 36$$

$$A = \{(6,2),(2,6),(5,3),(3,5),(4,4)\} \qquad \text{card}(A) = 5,\ P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{5}{36} = 0{,}13$$

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \quad \text{card}(B) = 6,\ P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = 0{,}16$$

$$C = \{(6,1),(1,6),(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\} \qquad \text{card}(C) = 6,\ P(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)} = \frac{6}{36} = 0{,}16$$

2.7. Probabilité conditionnelle, Notion d'indépendance

2.7.1. Théorème des probabilités composées

Soient deux événements **A** et **B** réalisés respectivement **n** et **m** fois au cours de N épreuves. De plus, si A et B sont réalisés simultanément k fois.

Alors : $P(A) = \frac{n}{N}$, $\quad P(B) = \frac{m}{N} \quad\quad P(A \cap B) = \frac{k}{N}$

-Que peut on dire de la probabilité réalisée de l'événement A sachant que B est déjà réalisée ?

Cette probabilité s'appelle probabilité **conditionnelle** de A sachant B. on note :

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A/B).P(B)$$

2.7.2. Conséquences

2 événements A et B sont dit **indépendants** si : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

Remarque **:** indépendant $\neq$ incompatible.

$$\begin{cases}\text{- incompatible} = \textit{A et B ne peuvent pas se réaliser au même temps}\\ \text{- indépendant} = \textit{lorsque la réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B}\end{cases}$$

Exercice **:**

Dans un concours 25% des candidats échouent en statistique, 35% échouent en Maths et 15% échouent en Maths et en statistique.

On prend un candidat au hasard, qu'elle est la probabilité pour qu'il échoue en statistique sachant qu'il a échoué en Maths.

Solution **:** **S :** événement que le candidat échoue en statistique **M :** événement que le candidat échoue en Maths.	$P(S/M)=\frac{P(S\cap M)}{P(M)}=\frac{0{,}15}{0{,}35}=0{,}42$

2.7.3. Théorème de Bayes (Probabilité de cause)

Soit **A** un événement qui dépend de N causes $C_k\,(k=1,...,N)$ différentes et incompatibles deux à deux. Étant donné que l'événement **A** est réalisé, quelle est la probabilité que se soit C_k qui est la cause. C'à d, quelle est la probabilité de réaliser un des événements de la suite C_k si l'événement **A** est déjà réalisé.

La valeur de cette probabilité est donnée par le théorème des probabilités conditionnelles donnée par la formule de Bayes

$$P(C_k/A)=\frac{P(A/C_k).P(C_k)}{\sum_{i=1}^{N}P(A/C_i)P(C_i)}$$

Remarque **:** la probabilité $P=\sum_{i=1}^{N}P(A/C_i)P(C_i)$ représente la probabilité totale pour que l'événement A soit réaliser quelque soit la cause C_k

Exercice **:**

Une entreprise utilise 3 machines **A, B, C** pour fabriquer des pièces, 40% de ces pièces sont fabriquées par la machine **A**, 30%par la machine **B** et 30% par la machine **C**. cependant

2% des pièces fabriquées par **A**, 4% fabriquées par **B** et 5% fabriquées par **C** sont défectueuses.

1- On prend une pièce au hasard, quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse.

2- On choisi une pièce défectueuse, qu'elle est la probabilité pour qu'elle provient de **B**

Réponse **:**

A : événement la pièce provient de A : $P(A)=0{,}4$

B : événement la pièce provient de B : $P(B)=0{,}3$

C : événement la pièce provient de C : $P(C)=0{,}3$

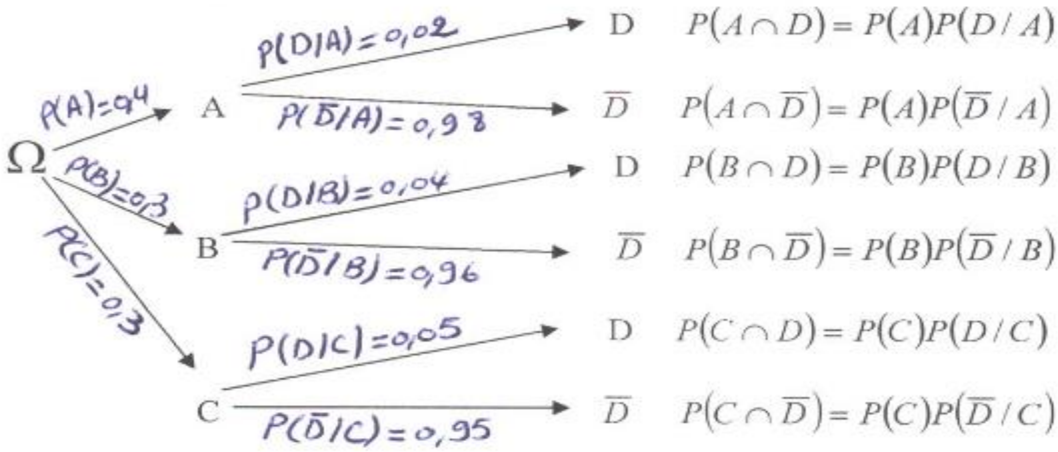
D : événement de la pièce défectueuse

1. La probabilité pour qu'elle soit défectueuse

$$D=(A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)\Rightarrow P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$$
$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)$$
$$P(D)=0{,}4\times0{,}02+0{,}3\times0{,}04+0{,}3\times0{,}05=0{,}035$$

2. La probabilité pour qu'elle provient de B sachant qu'elle est défectueuse

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}==\frac{0{,}3\times0{,}04}{0{,}035}=\frac{0{,}012}{0{,}035}=0{,}342$$



***Exercices* :**

***Exercice 1* :**

Une urne A contient 3 boules noires et 2 boules vertes, une urne B contient 4 boules noires et 5 boules vertes. On tire sans remise deux boules de l'urne A et une boule de l'urne B.

1. Quelle est la probabilité pour que le tirage donne 3 boules vertes?
2. Quelle est la probabilité pour que le tirage donne 1 boule verte et 2 boules noires ?
3. Quelle est la probabilité pour que le tirage donne au moins 2 boules vertes ?
4. Quelle est la probabilité pour que le tirage donne au plus 2 boules noires ?

***Réponse* :**

On a : urne **A** (3N, 2V), urne **B** (4N, 5V)

On tire sans remise **2** boules de l'urne A et **1** de l'urne B

1. ***La probabilité pour que le tirage donne 3 boules vertes***

   Soit l'événement A : le tirage donne 3 boules vertes

$$P(A) = \frac{\left(C_2^2 C_3^0\right)\left(C_4^0 C_5^1\right)}{C_5^2 C_9^1} = \frac{(1\cdot 1)\times(1\cdot 5)}{10\cdot 9} = \frac{5}{90} = 0{,}055$$

2. ***La probabilité pour que le tirage donne 1 boule verte et 2 boules noires***

   Soit l'événement B : le tirage donne 1 boule verte et 2 boules noires

$$P(B) = \frac{\left(C_2^1 C_3^1\right)\left(C_4^1 C_5^0\right) + \left(C_2^0 C_3^2\right)\left(C_4^0 C_5^1\right)}{C_5^2 C_9^1} = \frac{(2\cdot 3)(4\cdot 1) + (1\cdot 3)(1\cdot 5)}{10\times 9} = \frac{39}{90} = 0{,}43$$

3. ***La probabilité pour que le tirage donne au moins 2 boules vertes***

   Soit l'événement C : le tirage donne au moins 2 boules vertes

$$P(C) = \mathrm{P(2B\ V + 1B\ N) + P(3B\ V + 0B\ N)}$$

$$P(C) = \frac{\left(C_2^2 C_3^0\right)\left(C_4^1 C_5^0\right) + \left(C_2^1 C_3^1\right)\left(C_4^0 C_5^1\right)}{C_5^2 C_9^1} + 0{,}055 = 0{,}377 + 0{,}055 = 0{,}432$$

4. ***La probabilité pour que le tirage donne au plus 2 boules noires***

   Soit l'événement D : le tirage donne au plus 2 boules noires

$$P(D) = \mathrm{P(3B\ V + 0B\ N) + P(2B\ V + 1B\ N) + P(1B\ V + 2B\ N)}$$

$$P(D) = 0{,}055 + 0{,}377 + \frac{\left(C_2^1 C_3^1\right)\left(C_4^1 C_5^0\right) + \left(C_2^0 C_3^2\right)\left(C_4^0 C_5^1\right)}{C_5^2 C_9^1} = 0{,}432 + \frac{39}{90} = 0{,}865$$

***Exercice 2* :**

Soit une famille de 05 enfants.

1) Calculer la probabilité que dans cette famille, il y ait 3 garçons et 2 filles.
2) Trouver la probabilité que parmi les 5 enfants, il y ait 3 garçons au plus.

On suppose que la probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon est la même et égale à $\frac{1}{2}$. Sachant que k est le nombre de garçon dans la famille

***Réponse* :**

On suppose que la probabilité de naissance d'une fille ou d'un garçon est la même.

1) Soit A : événement qu'il y a dans la famille 3 G et 2 F

$$P(A) = C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}31$$

Soient les événements :

A_0 : Dans la famille, il y a 5 filles

A_1 : Dans la famille, il y a 1 garçon et 4filles

A_2 : Dans la famille, il y a 2 garçon et 3filles

A_3 : Dans la famille, il y a 3 garçon et 2filles

B : Parmi les 5 enfants, il y a 3 garçon au plus

On a :

$$P(B) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$
$$= C_5^0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}81$$

***Exercices 3* :**

Une urne contient 6 boules blanches et 10 boules noires

1. On tire simultanément 10 boules de cette urne. Calculer la probabilité que l'on ait 5 boules noires et 5 seulement.
2. Calculer la probabilité de tirer 5 boules noires parmi les 10 boules tirées si le tirage est fait avec remise

***Réponse* :**

1. Parmi les 10 boules tirées, il y a 5 noires et 5 blanches ; la probabilité cherchée est :

$$P = \frac{C_{10}^5 C_6^5}{C_{16}^{10}} = 0{,}19$$

2. Nous somme dans un cas d'épreuve de Bernoulli. Cette est répétée 10 fois. La probabilité d'apparition d'une boule noire vaut p=10/16, donc la probabilité cherchée est:

$$P(X=5)=C_{10}^{5}\left(\frac{10}{16}\right)^{5}\left(1-\frac{10}{16}\right)^{5}=0{,}18$$

***Exercice 4*:**

3.

On lance 2 dés identiques. Quelle est la probabilité d'avoir :

A : 2 chiffres divisibles par 2

B : la somme égale à 6

C : la différence supérieure à 2

***Réponse* :**

Soit : $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6),\ldots,(6,6)\}\quad \text{card}(\Omega)=36$

Soit l'événement A : 2 chiffres divisibles par 2

$$A=\{(2,2),(2,4),(4,2),(2,6),(6,2),(4,4),(4,6),(6,4),(6,6)\},\ \text{card}(A)=9,\ P(A)=\frac{card(A)}{card(\Omega)}=\frac{9}{36}=0{,}25$$

Soit l'événement B : la somme égale à 6

$$B=\{(4,2),(2,4),(5,1),(1,5),(3,3)\}\quad \text{card}(B)=5,\ P(B)=\frac{card(B)}{card(\Omega)}=\frac{5}{36}=0{,}13$$

Soit l'événement C : la différence supérieure à 2

$$C=\{(6,1),(1,6),(6,2),(2,6),(5,1),(1,5)\}\quad \text{card}(C)=6,\ \ P(C)=\frac{card(C)}{card(\Omega)}=\frac{6}{36}=0{,}16$$

***Exercice 5*:**

Une classe est constituée par 14 garçons et 12 filles. Une délégation de deux personnes est élue. Quelle est la probabilité d'élire :

1) Deux garçons ?
2) Deux filles ?
3) Une fille et un garçon ?

***Réponse* :**

Soient les événements :

A : élire 2 garçons

B : élire 2filles

C : élire 1 fille et 1 garçon

$$P(A)=\frac{C_{14}^{2}C_{12}^{0}}{C_{26}^{2}}=\frac{91}{325}=0{,}28$$

$$P(B)=\frac{C_{14}^{0}C_{12}^{2}}{C_{26}^{2}}=\frac{66}{325}=0,20$$

$$P(C)=\frac{C_{14}^{1}C_{12}^{1}}{C_{26}^{2}}=\frac{168}{325}=0,516$$

Exercice 7 **:**

Une unité de production est gérée par 10 personnes comprenant 4 femmes et 6 hommes. On veut élire parmi eux un comité de 3 personnes. Calculer la probabilité pour que le comité comprenne :

1) 3 femmes exactement.

2) Au moins 2 femmes.

3) Au plus 2 hommes.

Réponse **:**

1. ***La probabilité pour que le comité comprenne 3 femmes exactement*** **:**

Soit l'événement A : avoir 3 femmes exactement

$$p(A)=\frac{NCF}{NCP}=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=0,033$$

2. ***La probabilité pour que le comité comprenne au moins 2 femmes*** **:**

Soit l'événement B : avoir au moins 2 femmes

$$p(B)=p(2F)+P(3F)=\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}+\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}=0,33$$

3. ***La probabilité pour que le comité comprenne au plus 2 hommes*** **:**

Soit l'événement C : avoir au plus 2 hommes

$$p(C)=p(0H)+P(1H)+P(2H)=\frac{C_4^3C_6^0}{C_{10}^3}+\frac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}+\frac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=0,833$$

Exercice 6**:**

Une urne A contient 5 boules rouges, 3 boules noires et 8 boules vertes. Une urne B contient 3 boules rouges et 5 boules noires. On jette un dé bien équilibré. Si c'est le 3 ou le 6 qui apparaissent on tire une boule de l'urne B sinon on tire une boule de l'urne A

1) Calculer la probabilité que l'on tire :

- Une boule rouge c'à d : $P(R)=P(A)P(R/A)+P(B)P(R/B)$
- Une boule noire
- Une boule verte

2) Si c'est une boule rouge qui a été tirée, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne A. $P(A/R)$

***Réponse* :**

Soit les événements :

A : l'urne A est choisie

B : l'urne B est choisie

R : La boule tirée est rouge

N : La boule tirée est noire

V : La boule tirée est verte

1.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = \frac{4}{6}\frac{5}{16} + \frac{2}{6}\frac{3}{8} = 0,33$$

$$P(N) = P(A)P(N/A) + P(B)P(N/B) = \frac{4}{6}\frac{3}{16} + \frac{2}{6}\frac{5}{8} = 0,33$$

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) = \frac{4}{6}\frac{8}{16} + \frac{2}{6} \times 0 = 0,33$$

2.

$$P(A/R) = \frac{P(A)P(R/A)}{P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B)} = 0,63$$

***Exercice 7* :**

Deux machines M1 et M2 fabriquent des tiges. Elles produisent respectivement **0.33** et **0.67**de la production. La machine M1 produit 5% de tiges défectueuses et M2 en produit 6%. Soit les événements **A** : "la tige est fabriquée par M1", **B** : "la tige est fabriquée par M2", et D : "la tige est défectueuse".

1. Quelle est la probabilité pour que la tige soit fabriquée par M1 ?

2. On tire une tige de la production de M1. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

3. On tire une tige de la production. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de M1 et qu'elle soit défectueuse ?

4. On tire une tige de la production. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?

5. Quelle est la probabilité qu'une tige défectueuse ait été fabriquée par M1?

***Réponse* :**

1. $p(A) = \frac{1}{3}$
2. $p(^{D}/_{A}) = 5\% = \frac{5}{100}$

3. $p(A \cap D) = P(D/_A)P(A) = \frac{5}{100}.\frac{1}{3} = 0{,}0166$
4. $p(D) = P(D/_A)P(A) + P(D/_B)P(B) = \frac{5}{100}.\frac{1}{3} + \frac{6}{100}.\frac{2}{3} = 0{,}0566$
5. $P(A/_D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}0166}{0{,}0566} = 0{,}294$

***Exercice 8* :**

Deux grandes entreprises **A** et **B** fabriquent des pneus. Elles produisent respectivement **1/3** et **2/3** de la production. L'entreprise **A** produit **(5/100)** de pneus défectueux et **B** en produit (**6/100)**. Soit les événements **A** : "le pneu est fabriqué par l'entreprise **A**", **B** : " le pneu est fabriqué par l'entreprise **B**", et **D** : " le pneu est défectueux".

1. Quelle est la probabilité pour que le pneu soit fabriqué par l'entreprise **A** ?

2. On tire un pneu produit par l'entreprise **A**. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

3. On tire un pneu de la production. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'entreprise **A** et qu'il soit défectueux ?

4. On tire un pneu de la production. Quelle est la probabilité pour qu'il soit défectueux ?

5. Quelle est la probabilité qu'un pneu défectueux ait été fabriqué par **A**?

***Réponse* :**

A : "le pneu est fabriqué par l'entreprise A",

B : "le pneu est fabriqué par l'entreprise B",

D : " le pneu est défectueux".

1. $p(A) = \frac{1}{3}$
2. $p(D/_A) = 5\% = \frac{5}{100}$
3. $p(A \cap D) = P(D/_A)P(A) = \frac{5}{100}.\frac{1}{3} = 0{,}0166$
4. $p(D) = P(D/_A)P(A) + P(D/_B)P(B) = \frac{5}{100}.\frac{1}{3} + \frac{6}{100}.\frac{2}{3} = 0{,}0566$
5. $P(A/_D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{0{,}0166}{0{,}0566} = 0{,}294$

***Exercice 9* :**

Le service comptable d'un magasin réalise une étude sur le fichier des clients qui ont fait des achats le premier samedi du mois de novembre 2006. Il constate que 15 % des clients ont effectués leurs achats avec une carte fidélité. Parmi ceux-ci, 80% ont réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 euros. Parmi les clients qui n'ont pas effectué leurs achats avec une carte de fidélité, 60% ont réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 euros. On choisit au hasard une fiche de ce fichier. On admet que toutes les fiches ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements suivants :

F : "le client a effectué ses achats avec une carte de fidélité"

S : "le client a réalisé des achats d'un montant total supérieur à 50 euros".

1. Donner les probabilités $P(F)$, $P(S/F)$, $P(\bar{S}/F)$ et $P(\bar{S}/\bar{F})$
2. Calculer la probabilité $P(S \cap F)$.
3. Montrer que la probabilité de l'événement S est égale à 0,63.

***Réponse* :**

1. $P(F)=0{,}15$ $\quad P(S/F)=0{,}8$ $\quad P(\bar{S}/F)=0{,}2$ $\quad P(\bar{S}/\bar{F})=0{,}4$
2. $P(S \cap F)=P(F)P(S/F)=0{,}15\times 0{,}8=0{,}12$
3. $P(S)=P(S \cap F)+P(S \cap \bar{F})=P(F)P(S/F)+P(\bar{F})P(S/\bar{F})=0{,}15\times 0{,}8$

   $P(S)=0{,}15\times 0{,}8+0{,}85\times 0{,}6=0{,}12+0{,}51=0{,}63$

Chapitre 3 : Variable Aléatoire et lois de probabilités

3.1. Introduction

Dans la plupart des phénomènes aléatoires, le résultat d'une épreuve peut se traduire par une grandeur mathématique, très souvent représentée par un nombre entier ou réel. La notion mathématique qui représente efficacement ce genre de situation est celle de la **variable aléatoire (V.A).**

***Exemple* :** Le résultat du jet d'un dé est une V.A $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

: Le nombre de oui dans un sondage est une V.A.

3.2. Définition de la variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction qui associe à chaque résultat d'une expérience aléatoire un nombre réel.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to IR \\ \omega &\to X(\omega) \end{aligned}$$

- Elle nous fournit un moyen de décrire de façon numérique les résultats d'une expérience.
- Elle associe une valeur numérique à chaque résultat possible.

***Exemple* :** On jette 2 fois une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire du nombre de face obtenues.

$$\Omega = \{(F.F),(P.F)(F.P),(P.P)\}$$

$X = \{0,1,2\}$.

3.3. Variables aléatoires discrètes (V.A.D)

3.3.1. Définition

Une variable aléatoire est dite discrète si elle ne peut prendre que des valeurs discontinues. En règle générale, toutes les variables qui résultent d'un dénombrement ou d'une numérotation sont de type discret.

3.3.2. Loi de probabilité

Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle **« la loi de probabilité »** ou **« la distribution de probabilité »** de variable aléatoire.

Exemple : On jette 2 pièces de monnaie,

X : variable aléatoire de nombre de face obtenues

$\Omega = \{(F.F),(P.F)(F.P),(P.P)\}$

$X = \{0,1, 2\}$

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4

$P(X = 0) = 1/4 \; P(X = 1) = 2/4 \; P(X = 2) = 1/4$

Remarque **:** Une loi de probabilité n'est établie que si $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

3.3.3. Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X , la fonction F définit par :

$$F : IR \to IR$$
$$x \to F(x) = P(X \leq x)$$

Concrètement F correspond à la distribution des probabilités cumulées :

1) $\forall x \in IR : 0 \leq P(x) \leq 1$
2) F est croissante sur IR
3) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \; \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
4) Si $a \leq b : P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$

Exemple **:** On considère l'élément ω « lancer 3 pièces de monnaie »

Soit X : La variable aléatoire du nombre de nombre de face obtenues.

$\Omega = \{(P.P.P),(P.P.F),(P.F.F),(F.P.F)(P.F.P),(F.P.P),(F.F.F),(F.F.P)\}$, $\mathrm{car}(\Omega) = 8$

$X = \{0,1, 2, 3\}$

$P(X = 0) = 1/8 \; P(X = 1) = 3/8 \; P(X = 2) = 3/8 \; P(X = 3) = 1/8$

$F(x) = P(X_i \leq x_i)$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8
$F(x)$	1/8	4/8	7/8	8/8=1

Représentation graphique de la loi de probabilité et de la fonction de répartition

Figure 3.1 : Diagramme en bâtons de la loi de probabilité de la variable aléatoire X

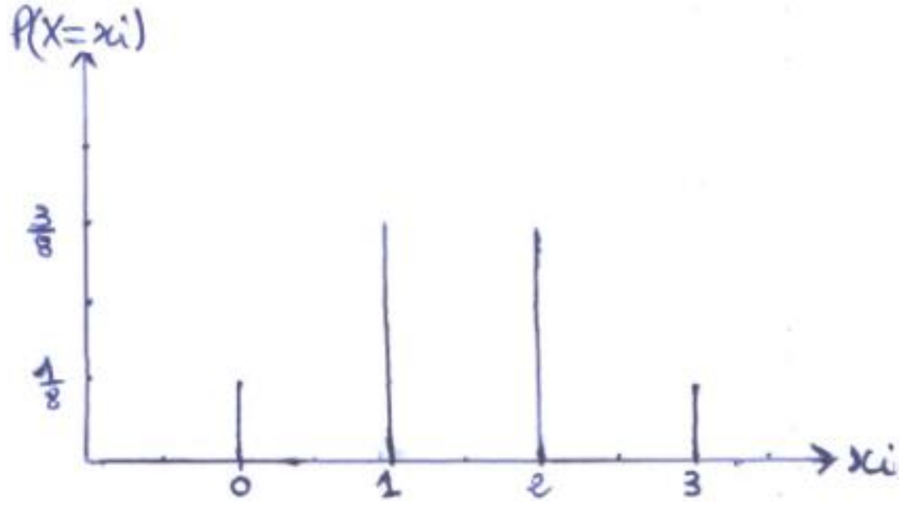
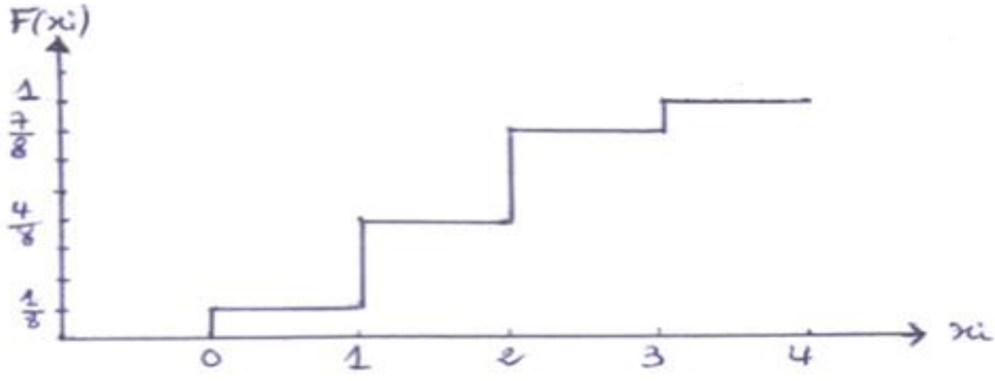


Figure 3.2 : Diagramme en escalier de la fonction de répartition de la variable aléatoire X



3.3.4. Caractéristique de variable aléatoire discrète

a. L'espérance **:** L'espérance d'une variable aléatoire X correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers fini Ω, on appelle espérance de variable aléatoire X le réel $E(X)$, définit par:

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$$

Si X est une variable aléatoire de loi de probabilité (x_i, p_i) alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i X_i$

Exemple **:** On jette deux pièces de monnaie.

X : Une variable aléatoire représentant le nombre de face obtenu.

$X = x_i$	0	1	2	$\sum$
$P(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4	$\frac{4}{4} = 1$
$x_i \times p_i$	0	2/4	2/4	1

$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = 1$

b. La variance **:** La variance d'une variable aléatoire X, notée $V(X)$, est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique. Donc, si X est une variable aléatoire ayant une espérance $E(X)$, la variance de X est le réel définit par :

$$V(X) = E(X - E(X))^2 \qquad \forall X : V(X) \geq 0$$

Définition **:** Si X une variable aléatoire ayant une variance $V(X)$, on appelle écart-type de X le réel définit par : $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X - E(X))^2 = E\left(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2\right) \\ &= E\left(X^2\right) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \\ &= E\left(X^2\right) - 2E(X)^2 + E(X)^2 \\ &= E\left(X^2\right) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Si X est une variable aléatoire de loi de probabilité (x_i, p_i) alors la variance de X est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2 \qquad \text{Avec : } E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Exemple **:** On jette deux pièces de monnaies. X est le nombre de face obtenues

$X = x_i$	0	1	2	$\sum$
$P(X = x_i)$	1/4	2/4	1/4	$\frac{4}{4} = 1$
$x_i \times p_i$	0	2/4	2/4	1
$x_i^2 \times p_i$	0	2/4	4/4	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1$$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i = \frac{3}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$$

$$\delta(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1/2}$$

3.4. Variable aléatoire continue (V.A.C)

3.4.1. Définition

Une variable aléatoire est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné.

Exemple **:** -La durée de vie appareils, des individus, etc.

-Les grilles des salaires journaliers des travailleurs d'une entreprise.

3.4.2. Fonction densité de probabilité

Dans le cas d'une variable aléatoire continue, la loi de probabilité associe une probabilité à chaque ensemble de valeurs définies dans un intervalle donné.

Définition n°01

On appelle densité de probabilité toute application continue par morceaux

$$\begin{aligned} f : IR &\to IR \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

Telle que : $\forall x \in IR : f(x) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

f : est appelée **fonction densité de probabilité.**

Définition n°02

Une variable aléatoire continue définie sur Ω est absolument continue, s'il existe une fonction densité de probabilité f, telle que :

$$\forall x \in IR : P(X \leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Dans le cas général :

$$P(a \prec X \leq b)=\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Exemple **:** Soit une variable aléatoire continue dont la fonction densité de probabilité est représentée sur la figure 3.3 suivante :

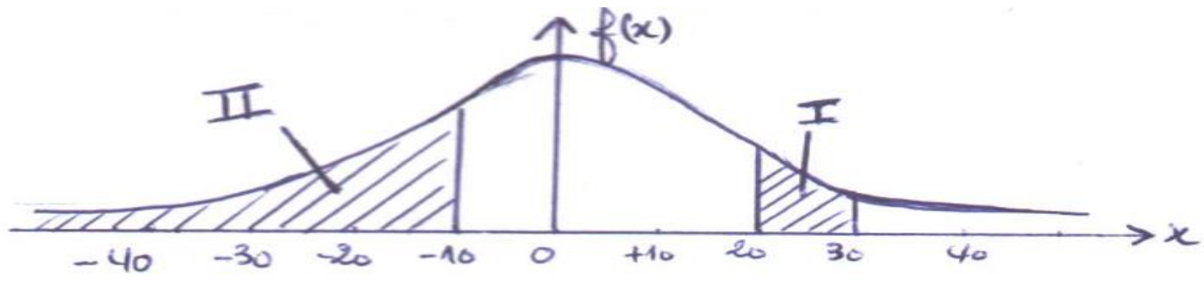


Figure 3.3

$$I : P(20 \prec X \prec 30) = \int_{20}^{30} f(x)dx$$

$$II : P(X \prec -10) = \int_{-\infty}^{-10} f(x)dx$$

3.4.3. Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire X , la fonction F définit par :

$$F : IR \to IR$$
$$x \to F(x) = P(X \le x)$$

Par conséquent, il existe une relation entre la fonction densité de probabilité et la fonction de répartition :

$$\forall x \in IR : F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \Rightarrow f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Propriétés **:**

1. $P(a \prec X \prec b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

2. F est continue sur IR

3. F est croissante sur IR

4. F est à valeurs dans [0,1]

5. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Exemple **:**

On considère la variable aléatoire continue X à laquelle on associe la fonction densité de probabilité :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \prec -2 \\ \frac{a}{2}x+a & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -ax+a & \text{si } 0 \le x \prec 1 \\ 0 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de **a** f est une densité de probabilité.
2. Donnez sa fonction de répartition.

Solution **:**

1. Fonction de densité

f est densité de probabilité si et seulement si : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-2} 0dx + \int_{-2}^{0}\left(\frac{a}{2}x+a\right)dx + \int_{0}^{1}(-ax+a)dx + \int_{1}^{+\infty} 0dx = 1$$

$$= 0 + \left[\frac{a}{4}x^2+ax\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-ax^2}{2}+ax\right]_{0}^{1} + 0 = 1$$

$$= -(a-2a) + \left(\frac{-a}{2}+a\right) = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

Donc on a :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \prec -2 \\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} & \text{si } 0 \le x \prec 1 \\ 0 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

2. Fonction de répartition

$*\text{si } x \prec 2 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$

$*\text{si } -2 \prec x \prec 0 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right)dt = 0 + \left[\frac{1}{6}t^2 + \frac{2}{3}t\right]_{-2}^{x}$

$= \left(\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x\right) - \left(\frac{4}{6} - \frac{4}{3}\right) = \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

$*\text{si } 0 \le x \prec 1 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right)dt + \int_{0}^{x}\left(-\frac{2}{3}t + \frac{2}{3}\right)dt$

$= 0 + \left[\frac{t^2}{6} + \frac{2}{3}t\right]_{-2}^{0} + \left[-\frac{2}{6}t^2 + \frac{2}{3}t\right]_{0}^{x} = 0 - \left(\frac{4}{6} - \frac{4}{3}\right) - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$

$*\text{si } x \ge 1 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec -2 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -\frac{x^2}{3} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3} & \text{si } 0 \le x \prec 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

3.4.4. Caractéristique de variable aléatoire continue

a. L'espérance

Si X est une variable aléatoire continue de densité f, on appelle espérance de X, le réel E(X), définit par:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec -2 \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si } 0 \le x \prec 1 \\ 0 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{-2} x.0dx+\int_{-2}^{0} x.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{0}^{1} x.\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{1}^{+\infty} x.0dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{-2x^3}{9}+\frac{x^2}{3}\right]_{0}^{1}=0-\left(\frac{-8}{9}+\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{-2}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

b. La variance

Si X est une variable aléatoire continue de densité f, on appelle variance de X, le réel V(X), définit par:

$$V(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(x)^2\right)f(x)dx$$

Ou bien : $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}X^2 f(X)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}Xf(X)dx\right]^2$

L'écart type $\delta(X)=\sqrt{V(X)}$

Exemple : Soit X une variable aléatoire continue de densité :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\prec -2\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3} & \text{si } -2\leq x\leq 0\\ -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3} & \text{si } 0\leq x\prec 1\\ 0 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{9}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{-2}0dx+\int_{-2}^{0}x^2.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{0}^{1}x^2.\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{1}^{+\infty}0dx$$

$$=0+\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)dx+0$$

$$=0+\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{2}{12}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_{0}^{1}+0$$

$$=0-\left(\frac{16}{12}-\frac{16}{9}\right)+\left(-\frac{2}{12}+\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{81}=\frac{78}{243}=0,32$$

***3.5. Propriétés des caractéristiques des variables aléatoires*:**

$1)\forall(a,b)\in IR^2 : E(ax+b)=aE(x)+b$

$2)\forall(a,b)\in IR^2 : V(ax+b)=a^2V(x)$

***Exercices* :**

***Exercice 1* :**

Une unité de production est gérée par 10 personnes comprenant 4 femmes et 6 hommes. On veut élire parmi eux un comité de 3 personnes. Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre de femmes choisies.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Donner la fonction de répartition de X et sa représentation graphique.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. Quelle est la probabilité de choisir au plus une femme ?

***Réponse* :**

1.La loi de probabilité

X : la variable aléatoire qui détermine le nombre de femmes choisies

$X = \{0,1,2,3\}$

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1\times 20}{120} = \frac{5}{30} \qquad P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4\times 15}{120} = \frac{60}{120} = \frac{15}{30}$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{6\times 6}{120} = \frac{36}{120} = \frac{9}{30} \qquad P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{4\times 1}{120} = \frac{1}{30}$$

X	0	1	2	3	La somme
$P(X=x_i)$	$\frac{5}{30}=0{,}17$	$\frac{15}{30}=0{,}5$	$\frac{9}{30}=0{,}3$	$\frac{1}{30}=0{,}033$	1
$F_X(x_i)$	0,17	0,67	0,97	1	-
$x_i \times p_i$	0	0,5	0,6	0,1	1,2
$x_i^2 \times p_i$	$\frac{0}{30}=0$	$\frac{15}{30}=0{,}5$	$\frac{36}{30}=1{,}2$	$\frac{9}{30}=0{,}3$	$\frac{60}{30}=2$

2. La fonction de répartition $F_X(x_i)$ **:** (voir le tableau)

3. Calcul de l'espérance et de la variance

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1{,}2$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - E(X)^2 = 2 - (1{,}2)^2 = 0{,}56$$

4- La probabilité de choisir au plus une femme

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{5}{30} + \frac{15}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} = 0{,}67$$

Exercice 2 **:**

Une classe est constituée par **7** garçons et **6** filles. Une délégation de 3 personnes est élue. Soit : X la variable aléatoire qui détermine le nombre de filles choisies.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Donner sa fonction de répartition et sa représentation graphique.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X.
4. Quelle est la probabilité de choisir au moins deux garçons ?

Réponse **:**

1. La loi de probabilité

X : la variable aléatoire qui détermine le nombre de filles choisies

$X = \{0,1,2,3\}$

$P(X=0) = \frac{C_7^3 C_6^0}{C_{13}^3} = \frac{35\times 1}{286} = 0{,}12$ $\quad P(X=1) = \frac{C_7^2 C_6^1}{C_{13}^3} = \frac{21\times 6}{286} = 0{,}44$

$P(X=2) = \frac{C_7^1 C_6^2}{C_{13}^3} = \frac{7\times 15}{286} = 0{,}37$ $\quad P(X=3) = \frac{C_7^0 C_6^3}{C_{13}^3} = \frac{1\times 20}{286} = 0{,}07$

X	0	1	2	3	La somme
$P(X=x_i)$	0,12	0,44	0,37	0,07	1
$F_X(x_i)$	0,12	0,56	0,93	1	-
$x_i \times p_i$	0	0,44	0,74	0,21	1,39
$x_i^2 \times p_i$	0	0,44	1,48	0,63	2,55

2. La fonction de répartition $F_X(x_i)$ **:** (voir le tableau)

3. Calcul de l'espérance, de la variance et l'écart type

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1{,}39$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - E(X)^2 = 2{,}55 - (1{,}39)^2 = 0{,}61$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}61} = 0{,}78$$

4. La probabilité de choisir au moins deux garçons

Ici, il s'agit de la probabilité d'avoir au plus une femme.

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}12 + 0{,}44 = 0{,}66$$

***Exercice 3*:**

Une urne contient 3 boules noires et 4 boules vertes. On tire sans remise trois boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui détermine le nombre de boules noires obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Donner sa fonction de répartition et sa représentation graphique.
3. Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X.
4. Quelle est la probabilité de choisir au moins deux boules vertes ?

***Réponse* :**

1. ***La loi de probabilité***

X : la variable aléatoire qui détermine le nombre de boules noires

$X = \{0,1,2,3\}$

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_4^3}{C_7^3} = \frac{1\times 4}{35} = 0{,}11 \qquad P(X=1) = \frac{C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{3\times 6}{35} = 0{,}51$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 C_4^1}{C_7^3} = \frac{3\times 4}{35} = 0{,}35 \qquad P(X=3) = \frac{C_3^3 C_4^0}{C_7^3} = \frac{1\times 1}{35} = 0{,}03$$

X	0	1	2	3	La somme
$P(X=x_i)$	0,11	0,51	0,35	0,03	1
$F_X(x_i)$	0,11	0,62	0,97	1	-
$\sum_i x_i p_i$	0	0,51	0,7	0,09	1,3
$\sum_i x_i^2 p_i$	0	0,51	1,4	0,27	2.18

2. La fonction de répartition $F_X(x_i)$ **:**(voir le tableau)

3. Calcul de l'espérance, de la variance et l'écart type

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 1{,}3$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i - E(X)^2 = 2{,}18 - (1{,}3)^2 = 0{,}49$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$$

4. La probabilité de choisir au moins deux boules vertes

Ici, il s'agit de la probabilité de choisir au plus une boule noire

$$P(X \le 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}11 + 0{,}51 = 0{,}62$$

***Exercice 4*:**

Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité de probabilité f donnée par :

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in[0\ ;\ 1[\\ 2-x & \text{si } x\in[1\ ;\ 2[\\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction densité de probabilité.

2. Donner la fonction de répartition de la variable X.

3. Calculer l'espérance et la variance de la variable X.

4. Calculer la probabilité P (0,5 < X < 1,5).

***Réponse* :**

1. *Montrons que f est une fonction de densité*

f est une densité ssi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}xdx+\int_{1}^{2}(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty}0dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=\frac{1}{2}+(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Donc f est une densité de probabilité

2. La fonction de répartition

$$\text{-si } x\in[0\ ;\ 1[: F_X(x)=\int_0^x tdt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}x^2$$

$$\text{-si } x\in[1\ ;\ 2[: F_X(x)=\int_0^1 xdx+\int_1^x(2-t)dt=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[2t-\frac{t^2}{2}\right]_1^x$$

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$$

$$\text{-si } x\in[2\ ;+\infty[: F_X(x)=1[$$

3. Calcul de l'espérance et de la variance

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0}x.0dx+\int_{0}^{1}x.xdx+\int_{1}^{2}x.(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty}x.0dx$$

$$=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2\left(2x-x^2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{2x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\left(\frac{1}{3}\right)+\left(4-\frac{8}{3}\right)-\left(1-\frac{1}{3}\right)=1$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$V(X)=\int_{-\infty}^{0}x^2.0dx+\int_{0}^{1}x^2.xdx+\int_{1}^{2}x^2.(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty}x^2.0dx-(1)^2$$
$$V(X)=\int_{0}^{1}x^3dx+\int_{1}^{2}(2x^2-x^3)dx-1$$
$$V(X)=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_1^2-1=\frac{7}{6}-1=\frac{1}{6}$$

4. Calcul de probabilité P (0,5 < X < 1,5)

$$P(0{,}5\prec \mathrm{X}\prec 1{,}5)=F(1{,}5)-F(0{,}5)$$
$$P(0{,}5\prec \mathrm{X}\prec 1{,}5)=\left(2(1{,}5)-\frac{1}{2}(1{,}5)^2-1\right)-\left(2(0{,}5)-\frac{1}{2}(0{,}5)^2-1\right)=1$$

Exercices 5 **:**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est donnée par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\prec -2\\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} & \text{si} -2\le x\le 0\\ -\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{2}{3} & \text{si } 0\le x\prec 1\\ 1 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

1) Calculer : $P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$
2) Trouver la densité de probabilité de la variable aléatoire X
3) Calculer $E(X),V(X)$

Réponse **:**

1. ***Calcul de*** $P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)$

$$P\left(\frac{1}{2}\le X\le 1\right)=F(1)-F\left(\frac{1}{2}\right)=1-\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

2. ***Par calcul direct on trouve*** **:**

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\prec -2\\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3} & \text{si} -2\le x\le 0\\ -\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3} & \text{si } 0\le x\prec 1\\ 0 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

3. ***Calcul de*** $E(X)$ et $V(X)$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{-2} x.0dx+\int_{-2}^{0} x.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{0}^{1} x.\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{1}^{+\infty} x.0dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{-2x^3}{9}+\frac{x^2}{3}\right]_{0}^{1}=0-\left(\frac{-8}{9}+\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{-2}{9}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{-2}0dx+\int_{-2}^{0}x^2.\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{0}^{1}x^2.\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\right)dx+\int_{1}^{+\infty}0dx$$

$$=0+\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)dx+\int_{0}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}x^2\right)dx+0$$

$$=0+\left[\frac{1}{12}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{2}{12}x^4+\frac{2}{9}x^3\right]_{0}^{1}+0=0-\left(\frac{16}{12}-\frac{16}{9}\right)+\left(-\frac{2}{12}+\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{81}=\frac{78}{243}=0{,}32.$$

Exercices 6 **:**

Soit la fonction $f(x)$ définie sur par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2) & \text{si } \ 0\le x\le 1\\ 0 & \text{si non}\end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition $F(x)$
2. Calculer $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$
3. Calculer : $P\left(\frac{1}{4}\le X\le\frac{3}{4}\right), P\left(X\le\frac{1}{4}\right)$

Réponse **:**

1. Fonction de répartition

$*$si $x\prec 0 : F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0dx=0$

$*$si $0\le x\le 1 : F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dx+\frac{3}{2}\int_{0}^{x}(1-t^2)dt=0+\frac{3}{2}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{0}^{x}$

$$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)=-\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x$$

$*$si $x\succ 1 : F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{1}\frac{3}{2}(1-t^2)dt+\int_{1}^{x}(0)dt=1$

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } \ x\prec 0\\ -\frac{x^3}{2}+\frac{3}{2}x & \text{si } 0\le x\le 1\\ 1 & \text{si } \ x\succ 1\end{cases}$$

2. Calcul de $E(X), V(X)$ et $\sigma(X)$

- ***L'espérance***

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x.0dx + \int_{0}^{1} x.\frac{3}{2}(1-x^2)dx + +\int_{1}^{+\infty} x.0dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

- ***La variance*** **:**

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 f(X) dx - \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x^2.0dx + \int_{0}^{1} x^2.\frac{3}{2}(1-x^2)dx + +\int_{1}^{+\infty} x^2.0dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1}(x^2 - x^4)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{5} - \frac{9}{64} = \frac{19}{320} = 0.06$$

- ***L'écart –type*** **:**

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{19}{320}} = 0,24$$

3. Calcul des probabilités

$$*P\left(\frac{1}{4} \le X \le \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)\right) \text{-} \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= -\frac{27}{128} + \frac{9}{8} + \frac{1}{128} - \frac{3}{8} = \frac{-27+144+1-48}{128} = \frac{70}{128} = 0.54$$

$$*P\left(X \le \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{128} + \frac{3}{8} = \frac{-1+48}{128} = 0.36$$

Chapitre 4: Lois de probabilité d'une variable aléatoire discrète

4.1. Introduction

Il est toujours possible d'associer à une variable aléatoire une probabilité et ainsi ce qu'on appelle une loi de probabilité.

Identifier la loi de probabilité suivit par une variable aléatoire est essentiel car cela conditionne le choix des méthodes employées pour l'étude des phénomènes aléatoires.

4.2. Loi de Bernoulli

Soit Ω un univers constitué de deux éventualités qu'on appelle S (succès) et E (échec), c'à d : $\Omega = \{S, E\}$. Dans cet univers on construit une variable aléatoire X qui représente le nombre de succès au cours d'une épreuve.

Tel que : Si S est réalisé : $X = 1$

Si E est réalisé : $X = 0$

Cette variable aléatoire X est appelée **variable de Bernoulli.**

La loi de probabilité associée à cette variable est :

$P(X = 0) = q$ et $P(X = 1) = p$, avec $p + q = 1$

Elle est appelée la loi de Bernoulli. On note B(1,P).

Exemple **:**

On jette une pièce de monnaie. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de succès obtenu.

On définit $\begin{cases} \text{Succès : Pile,} & X = 1 \\ \text{échec : Face,} & X = 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{matrix} P(X = 0) = \left.\dfrac{1}{2}\right\} q \\ P(X = 1) = \left.\dfrac{1}{2}\right\} p \end{matrix}\right\} \Rightarrow p + q = 1$$

Espérance et variance

-L'espérance d'une variable de Bernoulli est $E(X) = p$ car : on a $E(X) = \sum_{i=1}^{2} x_i \cdot p_i = 0.q + 1.p = p$

-La variance d'une variable de Bernoulli est $V(X) = p.q$

4.3. Loi de Binomiale

Démontré pour la première fois par le suisse Jacob Bernoulli en 1713. Elle est l'une des distributions de probabilité les plus répandues en statistiques appliquées.

Soit $X : \Omega^n \to IR^n$ $\quad (X = X_1 + X_2 + \cdots X_n)$

La variable X représente le nombre de succès obtenu lors de la répétition de n épreuves **identiques et indépendantes** et chaque épreuve ne pouvant donnée que deux résultats possibles : succès et Échec.

La variable X , où p est la probabilité d'avoir le résultat succès lors d'une seule expérience de Bernoulli, suit une loi de Binomiale de paramètre n et p . On note :

$X \to B(n, p)$. Où : n est le nombre d'épreuve.

La probabilité pour que $X = k$, c'à d obtenir le succès lors des n expériences est donnée par :

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad \text{avec} : C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

***Exemple* :**

On jette 20 fois une pièce de monnaie dans les mêmes conditions. Calculer la probabilité d'avoir :

1) 13 fois pile.
2) 8 fois face.

***Solution* :**

La variable aléatoire X qui donne le nombre de succès obtenu suit une loi binomiale. $X \to B\left(20, \frac{1}{2}\right)$

$$\text{soit} : \begin{cases} \text{Succès : Pile} \\ \text{échec : Face} \end{cases} \quad P(X = k) = C_{20}^k (0{,}5)^k (0{,}5)^{20-k}$$

1. $P(X = 13) = C_{20}^{13} (0{,}5)^{13} (0{,}5)^7$
2. $P(X = 12) = C_{20}^{12} (0{,}5)^{12} (0{,}5)^8$

Espérance et variance

L'espérance d'une variable aléatoire de binomiale est $E(X) = n.p$

Car $E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P = n.p$

La variance d'une variable aléatoire de binomiale est $V(X) = n.p.q$

Car $V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = n.p.q$

4.4. Loi de Poisson

Découverte au début du 19$^{\text{ème}}$ siècle par le magistrat français : **Simon-Denis Poisson.** Elle s'applique souvent aux phénomènes accidentels où la probabilité P est très faible $(P \prec 0{,}05)$

***Définition* :**

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \succ 0$, si les réels $P(X = k)$ donnant la probabilité pour que $X = k$ est donnée par :

$P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ λ : Espérance de X

La loi de Poisson vérifie :

1. $\forall k : P(X=k)\succ 0$

2. $\sum_{k\succ 0} P(X=k)=1$

Espérance et variance

L'espérance d'une variable aléatoire de Poisson est : $E(X)=\lambda$;

La variance d'une variable aléatoire de Poisson est : $V(X)=\lambda$

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

Lorsque (n) devient très grand où p très petit, les calculs de probabilité par la loi binomiale peut être approximative à d'autre loi de probabilité.

Condition d'approximation par la loi de Poisson

Une loi binomiale $B(n, p)$ peut être approximer par une loi de poisson de paramètre $\lambda = n.p$ si :

- n est grand $n \geq 50$
- p est petit $P \leq 0{,}1$

Exercice **:**

On opère 100 fois une expérience aléatoire dans laquelle la probabilité d'avoir succès est p=0,05.

1. Calculer la probabilité d'avoir 3 succès
2. Calculer la probabilité d'avoir au moins 5 succès

Réponse **:**

1. $P(X=3)=C_{100}^{3}(0{,}05)^3(0{,}95)^{97}$

2. $P(X\geq 5)=1-P(X\prec 5)=1-[P(X=0)+P(X=1)+\cdots+P(X=4)]$

On a : $n=100\succ 50$ $P=0{,}05\prec 0{,}1$

$$B(100\,,0{,}05)\rightarrow P(\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\ \lambda=np=100\times 0{,}05=5$$

$$P(X=3)=e^{-5}\frac{5^3}{3!}$$

$$P(X\geq 5)=1-P(X\prec 5)=1-\left[e^{-5}\frac{5^0}{0!}+e^{-5}\frac{5^1}{1!}+e^{-5}\frac{5^2}{2!}+e^{-5}\frac{5^3}{3!}+e^{-5}\frac{5^4}{4!}\right]$$

4.5. Loi géométrique

La loi géométrique est une loi de probabilité discrète qui modélise l'observation du nombre d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes devant se succéder pour espérer un premier succès.

Elle n'a donc qu'un paramètre, la probabilité de succès p . De cette probabilité découle celle d'un échec $q = 1 - p$. Le fait qu'une variable aléatoire X suive une loi géométrique de paramètre p s'écrit… $X \rightarrow G(P)$

Soit n le nombre de tirages. La probabilité de remporter un premier succès à l'épreuve n est égale à : $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$

Espérance et variance

L'espérance d'une loi géométrique est : $E(X) = \frac{1}{p}$;

Par exemple, il faut en moyenne six essais pour obtenir un 6 avec un dé non truqué (l'inverse de 1/6).

La variance d'une loi géométrique est : $V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2} = E(X)(E(X)-1)$

***Exemple*:**

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules rouges. On les tire une à une avec remise jusqu'à ce que l'on obtienne une boule blanche. Soit X : la variable aléatoire "rang de la première boule blanche". X suit une loi géométrique de paramètre p=1/2.

Calculer la probabilité de tirer la première boule blanche au cinquième tirage.

Calculer l'espérance et la variance de la V.A.X

***Réponse* :**

$$P(X = 5) = p(1-p)^{5-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^5} = 0{,}031$$

Espérance

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times \frac{2}{1} = 2$$

Variance

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$$

***Exercices* :**

***Exercice 1* :**

On jette 4 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. 4 fois face
2. 3 fois pile et une fois face
3. Au moins une fois pile

***Réponse* :**

1. $P(\text{Obtenir 4 face}) = C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}0625$

2. $P(\text{Obtenir 3 fois pile et une fois face}) = C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}25$

$$3)P(\text{Obtenir au moins une fois pile}) = C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0$$
$$= 0{,}9375$$

***Exercice 2* :**

Dix pour cent des articles produits par une machine sont défectueux. On prélève au hasard 6 articles. Quelle est la probabilité que parmi ces 6 articles :

1. Un est défectueux
2. Moins de 3 sont défectueux

***Réponse* :**

La probabilité qu'un article soit défectueux parmi la production de la machine est p=0,1. La probabilité que cet article soit non défectueux est $q = 1 - p = 0{,}9$.

On note par X la variable aléatoire représentant le nombre d'articles défectueux parmi les 6 prélevés. On a :

1) $P(\mathrm{X}=1) = C_6^1(0{,}1)^1(0{,}9)^5 = 0{,}35$

$$\begin{aligned}2)P(\mathrm{X} \prec 3) &= P(\mathrm{X}=0) + P(\mathrm{X}=1) + P(\mathrm{X}=2)\\ &= C_6^0(0{,}1)^0(0{,}9)^6 + C_6^1(0{,}1)^1(0{,}9)^5 + C_6^2(0{,}1)^2(0{,}9)^4\\ &= 0{,}53 + 0{,}35 + 0{,}1 = 0{,}98.\end{aligned}$$

***Exercice 3* :**

Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. On suppose que le nombre d'appels pendant un intervalle de temps suit une loi de Poisson.

Calculer la probabilité que durant deux minutes la centrale reçoit :

1. Trois appels

2. Au moins un appel
3. Au plus deux appels

Réponse **:**

Pendant deux minutes la centrale reçoit en moyenne $2\times\frac{300}{60}=10$ appels. $\lambda=10$ est le paramètre de la loi de poisson.

Si X est la V.A représentant le nombre d'appels durant deux minutes on a :

$$1)P(X=3)=e^{-10}\frac{10^3}{3!}=0{,}0067$$

$$2)P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-e^{-10}\frac{10^0}{0!}=0{,}9999$$

$$3)P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=e^{-10}\left(1+\frac{10^1}{1!}+\frac{10^2}{2!}\right)=0{,}0025$$

Exercice 3 **:**

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25 % sont avariés. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit *X* le « nombre de pommes avariées dans un emballage ». Déterminer la loi de probabilité de *X*.

2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier?

3. Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes?

Réponse **:**

Soit *X* : la variable aléatoire « nombre de pommes avariées dans un emballage ».

1. La variable aléatoire *X* suit une loi binomiale de paramètres (5, 0,25). $[X\rightarrow\beta(5,\ 0{,}25)]$

2. Un client se plaint s'il trouve au moins 2 pommes avariées, donc :

$$P(X\geq 2)=1-P(X\prec 2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$$

$$=1-\left[C_5^0(0{,}25)^0(0{,}75)^5+C_5^1(0{,}25)^1(0{,}75)^4\right]=\frac{47}{128}\approx 0{,}37.$$

3. Soit Y: La variable aléatoire « nombre de clients non satisfaits ». Elle suit une loi binomiale de paramètres (100, 0,37). $[Y\rightarrow\beta(100,\ 0{,}37)]$. On en cherche l'espérance :

$$E(Y)=100\cdot 0{,}37=37$$

Sur les 100 clients, environ 37 viendront se plaindre en moyenne.

Chapitre 5: Lois de probabilité d’une variable aléatoire continue

5.1. Loi uniforme

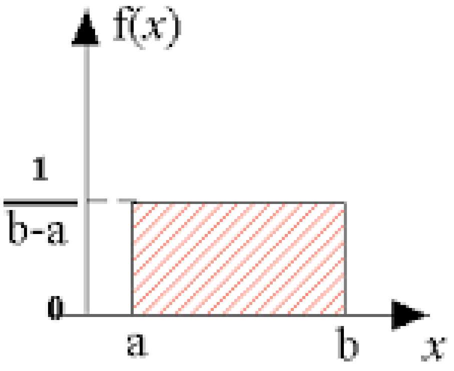
On dit qu’une variable aléatoire continue X suit une loi uniforme sur le segment [a , b] si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

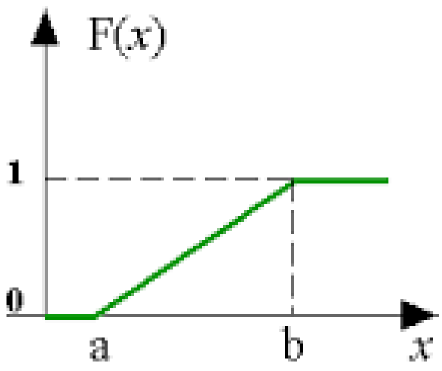
5.1.1. Propriétés

$$1.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \prec a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x \ge b \end{cases}$$

$$2.\ P(a' \prec X \prec b') = \int_{a'}^{b'} f(x)dx = \frac{b'-a'}{b-a}$$



Fonction de densité de probabilité



Fonction de répartition

5.1.2. Espérance et variance

L’espérance de la loi uniforme est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{b'-a'}{b-a}$$

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

La variance de la loi uniforme est :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(b-a)^2}{2}$$

5.2. Loi normale ou loi de Laplace Gauss

On parle de loi normale lorsqu'on à faire à une variable aléatoire continue qui dépend d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'additionnent et dont aucun n'est prépondérant.

5.2.1. Définition

Une variable aléatoire continue X suit une loi normale de paramètres μ et δ^2 si sa densité de probabilité est de la forme :

$$f : IR \to IR$$

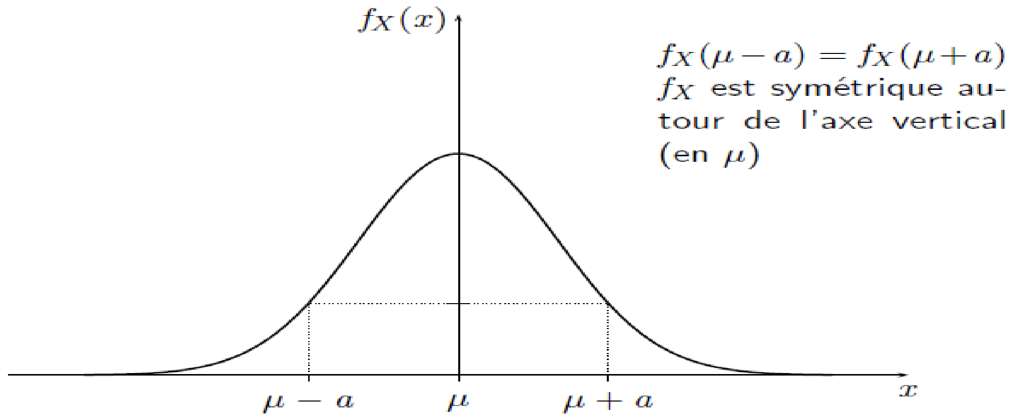
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\delta^2}} \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}, x \in R \text{ avec } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

On note $X \to N(\mu, \delta^2)$

f est paire autour de $a = \mu$ si : $f(\mu - a) = f(\mu + a)$

$f' \to= (a-\mu) f(x)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow a = \mu$



5.2.2. Espérance et variance

- L'espérance d'une loi normale est : $E(X) = \mu$
- La variance d'une loi normale est : $V(X) = \delta^2$

5.3. La loi normale centré et réduite

Une variable aléatoire continue X suit une loi normale centrée réduite si sa densité de probabilité est de la forme :

$$f : IR \to IR$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad f' = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}(-x)e^{-\frac{x^2}{2}} = -x \cdot f(x)$$

Si X suit une loi normale $X \to N(\mu, \delta^2)$ alors la variable aléatoire $Z = \dfrac{x-\mu}{\delta}$ suit une loi normale centrée réduite : $Z \to N(0,1)$

$$E(Z) = E(\frac{x-\mu}{\delta}) = \frac{E(x)-\mu}{\delta} = \frac{\mu-\mu}{\delta} = 0$$

$$V(Z) = V(\frac{x-\mu}{\delta}) = \frac{1}{\delta^2}V(x) = \frac{1}{\delta^2}\cdot\delta^2 = 1$$

5.3.1. Espérance et variance d'une loi normale

- L'espérance d'une loi normale centrée réduite est : $E(X) = 0$
- La variance d'une loi normale centrée réduite est : $V(X) = 1$

5.3.2. Fonction de répartition

On peut ramener tout calcul de la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(\mu, \delta^2)$ à un calcul sur la fonction de répartition notée $\Phi(x)$ d'une variable aléatoire normale $N(0,1)$:

- En effet si : $X \to N(\mu, \delta^2)$
- $P[x \le a] = P\left[\frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{a-\mu}{\delta}\right] = P\left[Z \le \frac{a-\mu}{\delta}\right] = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\delta}\right)$

5.3.3. Calcul de probabilités

Théorème **:** Si une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite alors pour tous réels a et b tels que $a \le b$, on a :

- $P(X \le a) = \Phi(a)$
- $P(a \le X \le b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $P(X \le -a) = \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

***Exemple 1*:**

Soit une population gaussienne de moyenne 60 et d'écart-type 5.

1. Quelle est la proportion des valeurs dépassant 65 ?
2. Quelle est la proportion des valeurs comprises entre 56 et 63 ?
3. Quelle est la valeur dépassée par 30% des valeurs ?

Solution **:**

1) $X \to N(60, 5^2)$

$$P[x \succ 65] = 1 - P[x \le 65]$$

$$= 1 - P\left[\frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{65-60}{5}\right]$$

$$= 1 - P[Z \le 1] = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.1587$$

Donc $P[x \succ 65] \approx 16\%$ des valeurs dépassent 65

2) $$P[56 \le x \le 63] = P\left[\frac{56-60}{5} \le \frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{63-60}{5}\right]$$

$$= P\left[\frac{-4}{5} \le Z \le \frac{3}{5}\right]$$

$$= \Phi\left(\frac{3}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-4}{5}\right)$$

$$= \Phi(0,6) - [1 - \Phi(0.8)]$$

$$= \Phi(0.6) - 1 + \Phi(0.8)$$

$$= 0,72 - 1 + 0,78 = 0,51$$

Donc $P[56 \le x \le 63] = 51\%$ des valeurs comprises entre 56 et 63

3) En dessous de la valeur cherchée se trouvent 70% des valeurs. Dans la table de la loi normale $N(0,1)$, le nombre 0,7 correspond à t = 0,52

On a alors $z = \dfrac{x-60}{5} = 0,52$ la valeur cherchée x est : $x = 62,6$

Exemples **:** Une variable aléatoire X suit une loi normale centrée réduite. À l'aide d'une table des valeurs de Φ déterminer les probabilités suivantes :

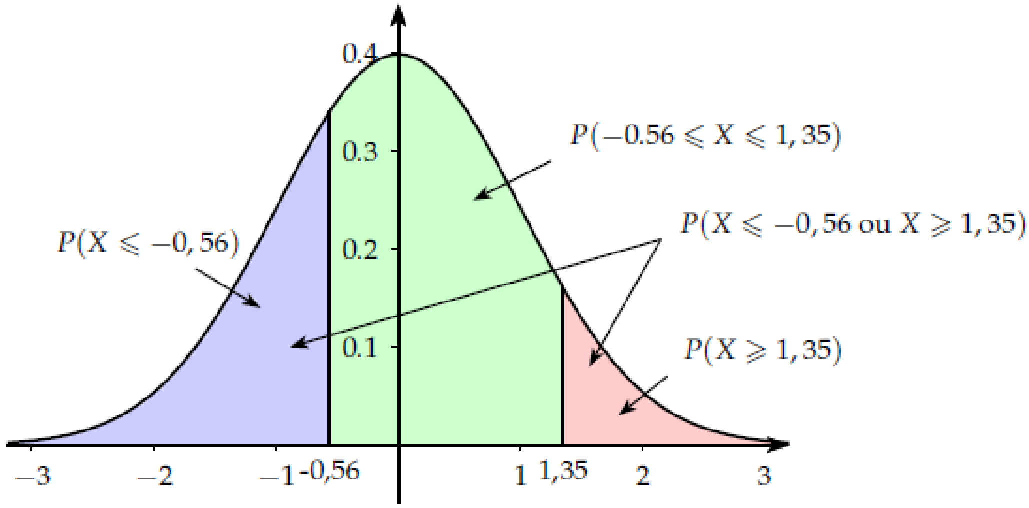
- **a)** $P(X \ge 1,35)$
- **b)** $P(X \le 0,56)$
- **c)** $P(-0,56 \le X \le 1,35)$
- **d)** $P(X \le -0,56 \text{ ou } X \ge 1,35)$

Réponse **:**

On repère sur la table les valeurs : $\Phi(0,56) \approx 0,7123$ et $\Phi(1,35) \approx 0,9115$

- **a)** $P(X \ge 1,35) = 1 - P(X \le 1,35) = 1 - \Phi(1,35) = 1 - 0,9115 = 0,0885$
- **b)** $P(X \le -0,56) = \Phi(-0,56) = 1 - \Phi(0,56) = 1 - 0,7123 = 0,2877$
- **c)** $P(-0,56 \le X \le 1,35) = \Phi(1,35) - \Phi(-0,56) = 0,9115 - 0,2877 = 0,6238$

d) $P(X \leq -0{,}56 \text{ ou } X \geq 1{,}35) = P(X \leq -0{,}56\ ) + P(\ X \geq 1{,}35)$
$P(X \leq -0{,}56 \text{ ou } X \geq 1{,}35) = 0{,}2877 + 0{,}0885 = 0{,}3762$



5.3.4. Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètre B(n,p)si :

$E(X) = n \cdot p \succ 5 \Rightarrow$On approxime la loi binomiale par loi normale $N(\mu, \delta^2)$avec :

$\mu : E(X) = n \cdot p \qquad\qquad \delta^2 = V(X) = n \cdot p \cdot q$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\delta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta^2}(x-\mu)^2\right\}$$

Exemple **:**

La probabilité pour qu'un individu soit atteint par une maladie donnée est p= 0,4. Calculer la probabilité pour que dans une population de 100 individus, moins de 50 individus seraient atteint de cette maladie.

Réponse **:**

Si on applique la loi binomiale {succès : atteint 0,4 et échec : 0,6}

$P(X = k) = C_{100}^{k}(0{,}4)^k(0{,}6)^{100-k}$

$P(X \prec 50) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 49)$ (calcul trop long)

On aura : $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}4 = 40 \succ 5 \Rightarrow$ on approxime par la loi normale

$\mu = n \cdot p = 40 \ ; \ \delta^2 = n \cdot p \cdot q = 100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 24$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\delta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\delta^2}(x-\mu)^2\right\}$$

$$P(X \prec 50) = \int_{-\infty}^{50} \frac{1}{\sqrt{2\Pi\delta^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right)^2\right\}dx \quad x = 50 \Rightarrow z = \frac{50-40}{2\sqrt{6}} = 2{,}204$$

si $x \to -\infty$ alors $z \to -\infty$

On pose :

$$Z = \frac{x-\mu}{\delta} \Rightarrow \delta Z = x - \mu$$
$$\Rightarrow \delta dz = dx$$

$$P(X \prec 50) = \int_{-\infty}^{2,04} \frac{1}{\delta\sqrt{2\Pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}Z^2\right\}\delta dz = \int_{-\infty}^{2,04} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}Z^2\right\} dz = 0,9793$$

5.4. Loi exponentielle

Soit α un réel strictement positif. Une variable aléatoire ***X*** suit une loi exponentielle de paramètre α lorsque sa densité de probabilité est la fonction ***f*** définie sur [0 ; + ∞ [par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \mathrm{x} \prec 0 \end{cases}$$

5.4.1. Espérance et variance d'une loi exponentielle

L'espérance de la loi exponentielle est :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

$$E(X) = \frac{1}{\alpha}$$

La variance de la loi exponentielle est :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

5.4.2. Fonction de répartition

Si ***X*** est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre α, on définit la fonction ***F*** appelée fonction de répartition de ***X*** de la façon suivante :

Pour tout : $x \in R, F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si} : x \prec 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{si} : x \geq 0 \end{cases}$

***Exemple* :**

La durée de vie d'un ordinateur portable exprimée en années est une variable aléatoire *X* suivant la loi exponentielle de paramètre α =0,125.

La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans est :

$$P(X \geq 5) = 1 - \int_0^5 0,125 e^{-0,125x} dx = e^{-0,125 \times 5} \approx 0,535.$$

La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable soit inférieure à 3 ans est :

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 0,125 e^{-0,125x} dx = 1 - e^{-0,125 \times 3} \approx 0,313.$$

***Exercices* :**

***Exercice 1* :**

La société A conditionne et commercialise du sucre en sachets. Portant la mention « Poids net 1kg ». Une machine met le sucre en sachet. Elle peut être réglée au moyen d'un dispositif gradué en gramme ; lorsque la machine est réglée sur la valeur « μ » lepoids moyen des sacs remplis est **M.** La v.a X mesurant le poids en gramme d'un sachet, suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type 8.

Calculer la probabilité de l'événement $\{x \leq 1000\}$ pour chaque des trois réglages suivant :

$$\begin{cases} \mu = 1000 \\ \mu = 992 \\ \mu = 1008 \end{cases}$$

***Réponse* :**

On a : X variable aléatoire qui mesure le poids en gramme.

$X \rightarrow N(M, 8^2)$

1. μ =1000

$$P[x \leq 1000] = P\left[\frac{x-\mu}{\delta} \leq \frac{1000-1000}{8}\right] = P[Z \leq 0] = \Phi(0) = 0{,}5$$

2. μ =992

$$P[x \leq 1000] = P\left[\frac{x-\mu}{\delta} \leq \frac{1000-992}{8}\right] = P[Z \leq 1] = \Phi(1) = 0{,}84$$

3. μ =1008

$$\begin{aligned} P[x \leq 1000] &= P\left[\frac{x-\mu}{\delta} \leq \frac{1000-1008}{8}\right] \\ &= P[Z \leq -1] \\ &= \Phi(-1) \\ &= 1-\Phi(1) \\ &= 1-0{,}84 = 0{,}16 \end{aligned}$$

***Exercice 2* :** soit $X \rightarrow N(\mu, \delta^2)$, calculer :

1. $P[\mu-\delta \prec x \prec \mu+\delta]$
2. $P[\mu-2\delta \prec x \prec \mu+2\delta]$
3. $P[\mu-3\delta \prec x \prec \mu+3\delta]$

***Réponse* :**

1) $P[\mu-\delta \prec x \prec \mu+\delta] = P[\mu-\delta-\mu \prec x-\mu \prec \mu+\delta-\mu]$

$$= P\left[\frac{\mu-\delta-\mu}{\delta} \prec \frac{x-\mu}{\delta} \prec \frac{\mu+\delta-\mu}{\delta}\right]$$

$$= P[-1 \prec Z \prec 1]$$

$$== \Phi(1) - \Phi(-1)$$

$$= \Phi(1) - [1-\Phi(1)] = 0{,}68$$

$$= 0{,}84 - [1-0{,}84]$$

$$= 0{,}68$$

2) $P[\mu-2\delta \prec x \prec \mu+2\delta] = P[\mu-2\delta-\mu \prec x-\mu \prec \mu+2\delta-\mu]$

$$= P\left[\frac{\mu-2\delta-\mu}{\delta} \prec \frac{x-\mu}{\delta} \prec \frac{\mu+2\delta-\mu}{\delta}\right]$$

$$= P[-2 \prec Z \prec 2]$$

$$= \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(2) - [1-\Phi(2)]$$

$$= 0{,}97 - [1-0{,}97]$$

$$= 0{,}94$$

3) $P[\mu-3\delta \prec x \prec \mu+3\delta] = P[\mu-3\delta-\mu \prec x-\mu \prec \mu+23-\mu]$

$$= P\left[\frac{\mu-3\delta-\mu}{\delta} \prec \frac{x-\mu}{\delta} \prec \frac{\mu+23-\mu}{\delta}\right]$$

$$= P[-3 \prec Z \prec 3]$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3)$$

$$= \Phi(3) - [1-\Phi(3)]$$

$$= 0{,}99 - [1-0{,}99]$$

$$= 0{,}98$$

***Exercice 3* :**

Sur une route principale où la vitesse est limitée à 80 km/h, un radar a mesuré la vitesse de toutes les automobiles pendant une journée. En supposant que les vitesses recueillies soient distribuées selon une loi normale avec une moyenne de 72km/ h et un ´écart-type de 8 km/h, répondez aux questions suivantes.

1. Quelle est la proportion de conducteurs qui devront payer une amende pour excès de vitesse?
2. Sachant qu'en plus de l'amende, un excès de plus de 30 km/h implique un retrait de permis, quelle est la proportion des conducteurs qui vont se faire retirer le permis parmi ceux qui vont avoir une amende?

Réponse **:**

Soit X la variable aléatoire représentant la vitesse mesurée. Cette variable aléatoire suit une loi normale $N(72, 64)$.

1. La proportion de conducteurs qui recevront une amende est égale à la probabilité que X soit plus grand que 80, soit :

   $$P(X \succ 80) = P\left(Z \succ \frac{80-72}{8}\right) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 0{,}16$$

   Z suivant une loi normale centrée et réduite.

2. On cherche la probabilité conditionnelle de mesurer une vitesse supérieure à 110 en sachant que le conducteur est déjà passible d'une amende. On calcule donc :

   $$P((X \succ 110)/(X \succ 80)) = \frac{P[(X \succ 110) \cap (X \succ 80)]}{P(X \succ 80)}$$
   $$= \frac{P(X \succ 110)}{P(X \succ 80)} = \frac{1-\Phi(4{,}75)}{1-\Phi(1)} \approx 0$$

   La probabilité est presque nulle.

Exercice 3 **:**

La durée de vie, en heures, d'un appareil électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\alpha = 0{,}005$.

1. Quelle est la probabilité que l'un des appareils pris au hasard :

a. Ait une durée de vie inférieure à 100 h ?

b. Soit encore en état de marche au bout de 250h ?

2. Calculer la durée de vie moyenne de l'un de ces appareils

Réponse **:**

1) a) $p(0 \leq X \leq 100) = \int_0^{100} 0{,}005 e^{-0{,}005 \times x} dx = \left[-e^{-0{,}005 \times x}\right]_0^{100} = e^{-0{,}005 \times 0} - e^{-0{,}005 \times 100} = 1 - e^{-0{,}5} \approx 0{,}39$

b) On calcule : $p(X \geq 250) = 1 - p(X \prec 250) = 1 - \int_0^{250} 0{,}005 e^{-0{,}005 \times x} dx = 1 - \left[-e^{-0{,}005 \times x}\right]_0^{25}$

$$= 1 - \left(e^{-0{,}005 \times 0} - e^{-0{,}005 \times 250}\right) = e^{-0{,}005 \times 250} e^{-1{,}25} \approx 0{,}29$$

2) La durée de vie moyenne de l'un de ces appareils est égale à :

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{,}005} = 200$$

Conclusion générale

En conclusion, on pourrait dire que ce polycopié de cours et d'exercices corrigés se fixe pour but d'illustrer façon aussi simple que possible les concepts de base de la théorie des probabilités. Nous devons retenir que :

- Le modèle associé à une expérience aléatoire est arbitraire et doit être choisi le plus simple possible, compte tenu du problème à résoudre. Il est très souvent souhaitable de retenir un ensemble fondamental tel que les événements élémentaires soient équiprobables, même si dans la réalité on ne peut pas les distinguer, car le calcul des probabilités est alors ramené à un problème de dénombrement.
- Une probabilité est une application et non pas un nombre. Il faut toujours vérifier que la somme des probabilités des événements élémentaires est égale à un et, dans le cas d'un nombre fini d'événements, ne pas calculer la probabilité du dernier en retranchant à un la probabilité de tous les autres, car cela exclut cette vérification permettant de repérer éventuellement une erreur dans le calcul des ces probabilités.
- L'indépendance de deux événements est définie relativement à une probabilité. L'indépendance mutuelle d'un nombre quelconque d'événements est une condition plus forte que l'indépendance de ces événements pris seulement deux à deux.
- Une variable aléatoire est une application qui à un événement fait correspondre un nombre.
- La loi de probabilité d'une variable aléatoire peut toujours être définie par sa fonction de répartition F, où F(x) représente la probabilité de toutes les valeurs strictement inférieures au réels x.
- Les deux principales caractéristiques d'une distribution de probabilités sont l'espérance mathématique qui est une caractéristique de valeur centrale et la variance qui est une caractéristique de dispersion autour du centre.
- Le calcul de la variance s'effectue presque souvent à partir de la formule développée (espérance du carré moins carré de l'espérance.)
- Pour calculer la loi de probabilité d'une variable aléatoire (que ce soit dans le cas discret ou continu), il est presque toujours préférable de déterminer au préalable sa fonction de répartition.
- En théorie des probabilités et en statistique, une loi de probabilité décrit le comportement aléatoire d'un phénomène dépendant du hasard. L'étude des phénomènes aléatoires a commencé avec l'étude des jeux de hasard.

- Les lois de probabilités permettent de modéliser ces incertitudes et de décrire des phénomènes physiques, biologiques, économiques, etc. Le domaine de la statistique permet de trouver des lois de probabilités adaptées aux phénomènes aléatoires.
- Il existe beaucoup de lois de probabilités différentes. Parmi toutes ces lois, la loi normale a une importance particulière puisque, d'après le théorème central limite, elle approche le comportement asymptotique de nombreuses lois de probabilités.
- Le concept de loi de probabilité se formalise mathématiquement à l'aide de la théorie de la mesure : une loi de probabilité est une mesure, souvent vue comme la loi décrivant le comportement d'une variable aléatoire, discrète ou continue. Une mesure est une loi de probabilité si sa masse totale vaut un. L'étude d'une variable aléatoire suivant une loi de probabilité discrète fait apparaître des calculs de sommes et de séries, alors que si sa loi est continue, l'étude de la variable aléatoire fait apparaître des calculs d'intégrales.

Références bibliographiques

- Cantoni Eva, Huber Philippe, and Ronchetti Elvezio (2006)**. Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique.** Springer-Verlag France, Paris.
- Corina Reischer, Raymond Leblanc, Bruno Rémillard, Denis Larocque (2002), **Théorie des probabilités : Problèmes et solution.** Presses de l'Université du Québec.
- Hervé Carrieu (2008), **Probabilité : exercices corrigés.** EDP Sciences, France.
- Jean-François Delmas (2010), **Introduction au calcul des probabilités et à la statistique Exercices, Problèmes et corrections,** Les presses de L'ENSTA, Paris.
- Khaldi Khaled (2000), Méthodes statistiques et probabilités, édition casbah, Alger.
- Le Coutre J.-P(2006), **Statistique et probabilités**, Dunod, 3e édition, Paris.
- Michel Lejeune(2004), **Statistique La Théorie et ses applications.** Springer, Paris.
- Saporta Gilbert (1990). **Probabilités, analyse de données et statistique**. Éditions Technip, France.
- Seymour Lipschiuts. **Probabilités : cours et problèmes (dix-huitième tirage**). Séries Schaum
- Sheldon M. Ross, (1994). **Introduction aux probabilités**. Traduction de la quatrième édition Américaine. Traduit de l'américain par Christian Hofer et Frédéric Dorsaz. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne
- Renée Veysseyre (2001). **Statistique et probabilités pour l'ingénieur**. Dunod, Paris
- Yves Tillé(2001), **Théorie des sondages : échantillonnage et estimation en population finie : cours et exercices avec solutions**. Dunod, Paris.
  - Séries de TD de Stat II proposées par l'équipe pédagogique composé de : Dr. Berrah K., Dr. Bouakline S., Me. Bouaissaoui S., Mme Chalane T., Mme. Hamoudi Z. Dr. Meziani N., Dr. Mousli A., Mme Samoune T,. Dr. Yahi Z. (Faculté des Sciences Économiques, Université de Bejaia).