corrigé de la série 3

Exo1. Montrons que $f'(x)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle $]0,1[$.

f continue sur $[0,1]$

f dérivable sur $]0,1[$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3.0 - 11.0 + 12.0 - 4.0 + 2 = 2 \\ f(1) = 3.1 - 11.1 + 12.1 - 4.1 + 2 = 2 \end{array}\right\} f(0) = f(1)$$

donc d'après le théorème de Rolle

$\exists\, c \in]0,1[$ t.q $f'(c) = 0$.

Exo2 $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \cos^2 x}$

f continue sur $[a, a+2\pi]$

f dérivable sur $]a, a+2\pi[$

$$f(a) = \frac{\sin a + \cos a}{1 + \cos^2 a}$$

$$f(a+2\pi) = \frac{\sin(a+2\pi) + \cos(a+2\pi)}{1 + \cos^2(a+2\pi)}$$

$\sin(a+2\pi) = \sin a \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \cos a \underbrace{\sin 2\pi}_{0} = \sin a$

$\cos(a+2\pi) = \cos a \underbrace{\cos 2\pi}_{1} + \sin a \underbrace{\sin 2\pi}_{0}$

$= \cos a.$

$$\cos^2(a+2\pi) = \cos(a+2\pi)\cos(a+2\pi)$$ 2/

$$= \cos a \cdot \cos a = \cos^2 a$$

donc $f(a+2\pi) = \dfrac{\sin a + \cos a}{1+\cos^2 a} = f(a)$

d'après le théorème de Rolle, $\exists c \in]a, a+2\pi[$

t.q $f'(c) = 0$

Exo 3. $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

f continue sur $[0, x]$ $\forall x > 0$

f dérivable sur $]0, x[$ $\forall x > 0$

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

d'après le Théorème des accroissement fini

$\exists c \in]0, x[$. t.q $f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$

$$\operatorname{arctg} x - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0} = \frac{1}{1+c^2} \cdot x$$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+c^2}$$

$\forall c \in]0, x[\iff 0 < c < x$

$$\Rightarrow 0 < c^2 < x^2$$

$$\Rightarrow 1 < 1+c^2 < 1+x^2$$

3

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$$

$$\Rightarrow \forall x > 0 \quad \frac{x}{1+x^2} < \frac{x}{1+c^2} < x$$

$$\text{donc } \forall x > 0 \quad \frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x$$

Exo 4. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \exists c \in]x, x+1[\quad f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$.

f continue $\forall x \in \mathbb{R}^*$

f derivable $\forall x \in \mathbb{R}^*$

d'après le théorème des accroissement fini

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists c \in]x, x+1[$ t.q.

$$f(x+1) - f(x) = f'(c)(x+1-x)$$

$$e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}.$$

$$f(x) = e^{1/x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

$$\Rightarrow f(x+1) - f(x) = -\frac{1}{c^2} e^{1/c}$$

$$\Rightarrow f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} e^{1/c}.$$

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = x^2 \frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{c^2} e^{\frac{1}{c}}$

$= +\infty$ car $\frac{1}{c^2} e^{\frac{1}{c}} > 0$.

Exo5. $\forall x>0 \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$

on considère $f(x) = \ln x$. sur l'intervalle $]x, x+1[$

$f(x)$ continue sur $[x, x+1]$ $\forall x>0$
f dérivable sur $]x, x+1[$. $\forall x>0$
d'après le TAF $\exists c \in]x, x+1[$

t.q $f'(c) = \frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = \ln(x+1) - \ln(x)$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \ln(x+1) - \ln(x)$$

$c \in]x, x+1[\Rightarrow x < c < x+1$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}.$$

donc $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$

5

$f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monotone ?

on pose $h(n) = L_n(f(n)) = n L_n\left(1+\frac{1}{n}\right) = n L_n\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= n\left(L_n(n+1) - L_n(n)\right)$

$h'(n) = L_n(n+1) - L_n(n) + n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$

$= \left(L_n(n+1) - L_n n\right) - \frac{1}{n+1} > 0$

car $L_n(n+1) - L_n n > \frac{1}{n+1}$

donc $h'(n) = \left(L_n f(n)\right)' > 0$

$h'(n) = \frac{f'(n)}{f(n)} > 0 \Rightarrow f'(n) > 0$

car $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0, \forall n > 0$

donc f est strictement croissante

soit $g(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

on pose $h(n) = L_n g(n) = (n+1) L_n\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$h'(n) = L_n(g(n))' = \frac{g'(n)}{g(n)}$

$= L_n\left(1+\frac{1}{n}\right) + \cancel{(n+1)}\left(\frac{-1}{n\cancel{(n+1)}}\right)$

$= \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$.

$= \left(\ln(x+1) - \ln x\right) - \frac{1}{x} < 0$

car $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$.

donc $h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} < 0$

~~comme~~ comme $g(x) > 0 \Rightarrow g'(x) < 0$

$\Rightarrow g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ est strictement décroissante.

Exo6. $f(x) = x^2 \ln x = g(x) \cdot h(x)$.

$g(x) = x^2$

$g'(x) = 2x$

$g''(x) = 2$

$g^{(3)}(x) = 0$

$h(x) = \ln x$

$h'(x) = \frac{1}{x}$

$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$h^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$

$h^{(4)}(x) = \frac{-3 \cdot 2}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}$

$h^{(5)}(x) = \frac{4 \cdot 3!}{x^5} = \frac{4!}{x^5}$

$\vdots$

$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$

on applique la Formule de Leibnitz. 7

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k\geq 0} C_n^k \, g^{(k)} h^{(n-k)} = \sum_{k\geq 0} C_n^k \, g^{(n-k)} h^{(k)}$$

$$= C_n^0 \, g \, h^{(n)} + C_n^1 g^1 h^{(n-1)} + C_n^2 g^{(2)} h^{(n-2)} + C_n^3 g^{(3)} h^{(n-3)}$$

$$= g(x) h^{(n)}(x) + (n-1) \, g^{(1)}(x) h^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} g^{(2)}(x) \, h^{(n-2)}(x)$$

$$= x^2 \cdot \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n} + (n-1) \, 2x \, \frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^{n-2}} + \frac{(n-1)! \, (-1)^n \cdot 2}{x^{n-2}}$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} \, n \cdot (n-1) \, (n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{x^{n-2}} \left((-1)^{n+1}(n-1)! + 2(-1)^n (n-1)! + n(n-1)(-1)^{n-1}(n-3)! \right.$$

$$= \frac{-(-1)^n (n-1)!}{n-1} \cdot \frac{1}{x^{n-2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n-2)!}{x^{n-2}}.$$

Ex 8 $\quad f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)\ln x}{x=1}$

(8 / 3

$D_f = \{x \in \mathbb{R}.\ x > 0 \text{ et } x \neq 1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(1+x^2)\ln(x)}{x-1} = \frac{\ln 2 \times 0}{0^+} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2x}{1+x^2}\ln x + \frac{\ln(1+x^2)}{x}}{1} = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x\ln x}{1+x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{x}\right.$$

$$= \frac{2\cdot 1 \ln 1}{1+1} + \frac{\ln(1+1)}{1}$$

$$= \frac{0}{0} + \ln 2 = \ln 2$$

donc f est prolongeable par continuité en pt 1

soit $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \ln 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

$g(x)$ est une fonction dérivable.