Série de TD n°1

Exercice 1 :

1. La formule suivante est-elle valide dimensionnellement ? Faire une analyse dimensionnelle pour confirmer ou rectifier.

$$F = \frac{G.m_1}{R}$$

Où F est la force, G une constante dont l'unité dans le système international (SI) est le $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, $m_1$est une masse et R une longueur.

2. La masse volumique $\boldsymbol{\rho}$ d'un cylindre de masse $\boldsymbol{m}$, de rayon $\boldsymbol{R}$ et de longueur $\boldsymbol{l}$ est donnée par la relation suivante :

$$\rho = \frac{m^x}{\pi l^y R^2}$$

2.1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver les deux constantes $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ ***;***

2.2. En déduire l'expression exacte de la masse volumique $\boldsymbol{\rho}$.

Exercice 2 :

On considère, dans un repère cartésien orthonormé$\mathcal{R}(Oxyz)$, les trois vecteurs suivants :

$$\vec{V_1} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 4\vec{k} \ ; \ \vec{V_2} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k} \ ; \ \vec{V_3} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

1. Calculer leurs modules.

2. Représenter le vecteur$\vec{V_1}$.

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{U} = \vec{V_1} - 2\vec{V_2} + 3\vec{V_3}$.

4. Déterminer la composante du vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{V_1}$.

5. Calculer le produit scalaire $\vec{V_1}.\vec{V_2}$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

6. Calculer le produit vectoriel $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ et en déduire l'aire du parallélogramme formé par ces deux vecteurs.

7. Calculer le produit mixte $\vec{V_1}.\left(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}\right)$ et le double produit vectoriel $\vec{V_1} \wedge \left(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}\right)$.

Exercice 03 :

1. Calculer le gradient du champ scalaire suivant:

$$U(x,y,z) = 2x^2yz^3 - 3x^3y^2z$$

Evaluer $\overrightarrow{grad}U$ au point $M(1,-1,2)$.

2. Calculer la divergence du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (x^3y - 2xz)\vec{\imath} + (y^3z - 2yx)\vec{\jmath} + (z^3x - 2zy)\vec{k}$$

3. Calculer le rotationnel du champ vectoriel suivant :

$$\vec{V}(x,y,z) = (2xy + z^3)\vec{\imath} + (x^2 + 2y)\vec{\jmath} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$$

Exercice 04 : (supplémentaire)

Soit les fonctions vectorielles de la variable réelle $t$suivantes :

$$\vec{r}_1(t) = (3t^2)\vec{\imath} - (2t^2)\vec{\jmath} + (t+1)\vec{k}$$

$$\vec{r}_2(t) = \cos(\omega t)\,\vec{\imath} - \sin(\omega t)\,\vec{\jmath} + e^{-\alpha t}\vec{k}$$

Où αet ωsont des constantes réelles positives. Calculer :

1. Leurs dérivées première et seconde par rapport àt ainsi que leurs modules.

2. L'intégrale$\int \vec{r}_1(t)dt$ sachant que pour $t = 0$, on a $\vec{r}_{10} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Exercice 05 : (supplémentaire)

On considère dans le plan Oxy d'un repère orthonormé $Oxyz$, deux vecteurs unitaire perpendiculaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, d'origine O. Leurs sens est tel que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{k}$ forment un trièdre direct. Les vecteurs$\vec{u}$ et$\vec{v}$ tournent autour de Oz. On pose $(Ox, \vec{u}) = \theta$.

1. Exprimer $\vec{u}$ et $\vec{v}$en fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et inversement.

2. Calculer $(d\vec{u}/d\theta)$ et $(d\vec{v}/d\theta)$.

3. Si $\theta = \theta(t)$, Calculer $(d\vec{u}/dt)$ et $(d\vec{v}/dt)$.

4. Soit le vecteur $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{u}$, calculer $(d\vec{r}/dt)$ et $(d^2\vec{r}/dt^2)$.