Université A. Mira de Béjaia — *Année 2007/2008*
Faculté de la Technologie — *11 mars 2008*
Département des Sciences et Techniques (ST) 1ère année — *Durée : 02 heures*

~ Epreuve de moyenne durée ~
Module: Physique 1 (Mécanique)

Exercice n°1 *(04 pts)*

Les coordonnées *(x,y)* d'une particule dans un repère orthonormé *xOy* sont données en fonction du temps *t* par : $x(t)=t-1$ et $y(t)=-t^2+1$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule.
2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
3. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

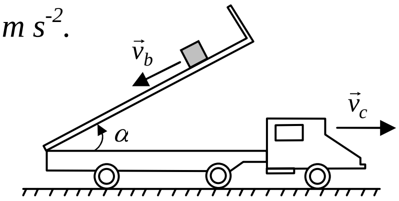
Exercice n°2 *(06 pts)*

Dans un plan *xOy*, une particule *M* est repérée à un instant *t* par ses coordonnées polaires (ρ,θ) telles que : $\rho(t)=a\cos(\omega t)$; $\theta(t)=\omega t$. a et ω sont des constantes positives.

1. Dans la base locale $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\theta)$, associée aux coordonnées polaires, déterminer les vecteurs position, vitesse et accélération du point *M*.
2. Toujours dans la même base, déterminer puis représenter les vecteurs position, vitesse et accélération de la particule aux instants $t_1=0\,s$ et $t_2=\pi/(4\omega)\,s$.

Exercice n°3 *(05.5 pts)*

1. On considère un camion immobile à benne baissée. On pose sur la benne une brique de masse *m=3 kg*. Le camion soulève sa benne progressivement. Les coefficients de frottements statique et cinétique entre la benne et la brique sont respectivement $\mu_s=0.6$ et $\mu_c=0.3$.
   a. Calculer l'angle limite α_0 d'inclinaison de la benne par rapport à l'horizontale pour provoquer le glissement de la brique.
   b. Si $\alpha=45°$, déterminer l'accélération de la brique. Prendre $g=10\ m\ s^{-2}$.



2. Le camion roule maintenant en ligne droite avec une vitesse constante $\vec{v}_c$. Une boîte, considérée ponctuelle, glisse sur sa benne avec une vitesse $v_b=0.5\ m/s$ (figure ci-contre). Sachant que la benne est inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle $\alpha=60°$,
   a. Déterminer la vitesse du camion pour qu'un observateur au sol puisse voir la boîte tomber verticalement. En déduire la vitesse de la boîte par rapport au sol.
   b. Que devient la vitesse de la boîte par rapport au sol si la vitesse du camion est $v_c=0.5\ m/s$. Faire le schéma de composition des vitesses.

Exercice n°4 *(04.5 pts)*

Un satellite de masse *m* décrit autour de la terre, de masse *M*, une orbite circulaire à la distance *r* du centre *O* de la terre.

1. Déterminer, en fonction de la constante universelle de gravitation *G*, des masses *M* et *m* et du rayon *r* de l'orbite :
   a. la vitesse linéaire v et la vitesse angulaire ω du satellite ;
   b. la durée *T* d'une révolution autour de la terre (période) ;
   c. l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et l'énergie mécanique totale E_M du satellite.
2. Application numérique : Si le satellite est à une altitude *h*, calculer v, ω, T, E_c, E_p, et E_M.
   On donne : $G=6.7\ 10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$, $m=100\ kg$, $M=6\ 10^{24}\ kg$,
   $h=800\ km$ et $R=6400\ km$ (rayon de la terre).

Bon courage

~ Epreuve de moyenne durée ~
Module: Physique 1 (Mécanique)
(CORRIGÉ)

Exercice n°1 *(04 pts)*

1. Equation de la trajectoire : $\boxed{y(x) = -x^2 - 2x}$

2. Composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération :

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = -t^2 + 1 \end{cases} \rightarrow \boxed{\vec{v} \begin{cases} v_x(t) = 1 \\ v_y(t) = -2t \end{cases}} \rightarrow \boxed{\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -2 \end{cases}}$$

3. Composante tangentielle de l'accélération :

on a : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + 4t^2} \rightarrow$ $\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1 + 4t^2}}}$

Composante normale de l'accélération :

On a : $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \rightarrow$ $\boxed{a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + 4t^2}}}$

Rayon R de courbure de la trajectoire :

On a : $a_n = \frac{v^2}{R} \rightarrow$ $\boxed{R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(1 + 4t^2)^{3/2}}{2}}$

Exercice n°2 *(06 pts)*

1. Vecteurs position, vitesse et accélération

Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho = a\cos\omega t\,\vec{e}_\rho$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a\omega[-\sin\omega t\,\vec{e}_\rho + \cos\omega t\,\vec{e}_\theta]$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2a\omega^2[\cos\omega t\,\vec{e}_\rho + \sin\omega t\,\vec{e}_\theta]$

2. Détermination et Représentation des vecteurs position, vitesse et accélération de la particule aux instants $t_1 = 0\,s$ et $t_2 = \pi/(4\omega)\,s$.

t(s)	Positions	Vitesses	Accélérations
$t_1 = 0\,s$	$\overrightarrow{OM}_1 = a\,\vec{e}_\rho$	$\vec{v}_1 = a\omega\,\vec{e}_\theta$	$\vec{a}_1 = -2a\omega^2\,\vec{e}_\rho$
$t_2 = \pi/(4\omega)\,s$	$\overrightarrow{OM}_2 = a\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\rho$	$\vec{v}_2 = a\omega\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\rho + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\theta\right]$	$\vec{a}_2 = -2a\omega^2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\rho + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_\theta\right]$

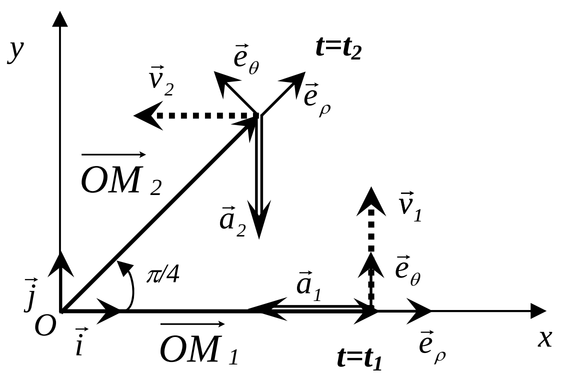
On a : $\|\overrightarrow{OM}_1\| = a$. $\|\overrightarrow{OM}_2\| = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\|\vec{v}_1\| = \|\vec{v}_2\| = a\omega$.

$\|\vec{a}_1\| = \|\vec{a}_2\| = 2a\omega^2$.

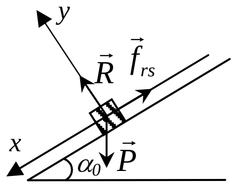
Représentation des vecteurs :
- position
- vitesse
- accélération

aux instants t_1 et t_2



Exercice n°3 *(05.5 pts)*

1. a. Angle limite α_0 pour provoquer le glissement de la brique :



PFD appliqué à la boîte : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}_{rs}=\vec{0}$

Projection sur les axes : $\begin{cases} Ox : P\sin\alpha_0 - f_{rs} = 0 \\ Oy : R - P\cos\alpha_0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_{rs} = P\sin\alpha_0 \\ R = P\cos\alpha_0 \end{cases}$

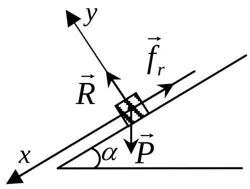
Juste à la rupture de l'équilibre, on a :

$$\mu_S = \frac{f_{rs}}{R} = \frac{P\sin\alpha_0}{P\cos\alpha_0} = tg\alpha \rightarrow \boxed{\alpha_0 = arctg\,\mu_s}$$

<u>A.N.</u> : $\boxed{\alpha_0 = 31°}$

b. *Accélération de la boîte* :

PFD appliqué à la boîte : $\vec{P}+\vec{R}+\vec{f}_r = m\,\vec{a}$



Projection sur les axes : $\begin{cases} Ox : P\sin\alpha - f_r = ma \quad (1) \\ Oy : R - P\cos\alpha = 0 \quad (2) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow a = \frac{P\sin\alpha - f_r}{m} \qquad (3)$$

d'autre part, on a : $\mu_C = \dfrac{f_r}{R}$

de *(2)* : $R = P\cos\alpha$. Donc : $f_r = \mu_C\, P\cos\alpha \quad (4)$

(4) dans *(3)* : $\boxed{a = g(\sin\alpha - \mu_C\cos\alpha)}$

<u>A.N</u> : $\boxed{a = 4.95\ m.s^{-2}}$

2. Vitesse du camion et vitesse de la boîte par rapport au sol :

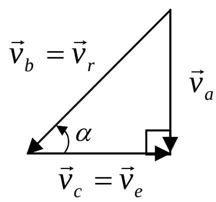
Considérant : *(R)* : référentiel lié au sol. *(R')* : référentiel lié au camion

Donc : $\vec{v}_c = \vec{v}_e$ (vitesse du camion dans *(R)* =vitesse d'entraînement)

$\vec{v}_b = \vec{v}_r$ (vitesse de la boîte dans *(R')*=vitesse relative)

$\vec{v}_a$ (vitesse de la boîte dans *(R)*=vitesse absolue)

Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$



a. Vitesse du camion *:*

Du schéma, on a : $v_c = v_b\cos\alpha$.

<u>A.N.</u> : $\boxed{v_c = 0.25 m/s}$

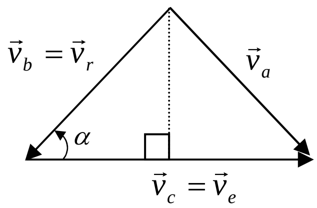
Vitesse de la boîte*:*

Du schéma, on a : $v_a = v_b\sin\alpha$

<u>A.N.</u> : $\boxed{v_a = 0.43 m/s}$

b. Vitesse de la boite par rapport au sol si la vitesse du camion est $v_c = 0.5 m/s$:

$v_r = v_e = 0.5 m/s$ et $\alpha = 60° \rightarrow$ Le triangle formé par les vecteurs vitesse est équilatéral. Donc $v_a = v_r = v_e$.



Sinon : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \rightarrow v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_e})}$

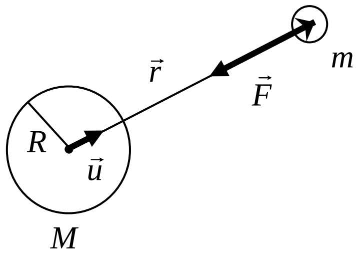
avec $(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_e}) = (\pi - \alpha)$. <u>A.N.</u> : $\boxed{v_a = 0.5 m/s}$

Exercice n°4 *(04.5 pts)*

1.a. La vitesse linéaire et la vitesse angulaire du satellite :

Vitesse linéaire :
La seule force agissant sur le satellite est la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{u}$$



L'accélération $\vec{a} = \vec{a}_n = -\frac{v^2}{r}\vec{u}$

PFD : $G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$

Vitesse angulaire :
On a : $\boxed{\omega = \frac{v}{r} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}}$

b. *Période* :
On a : $T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$

c. Energie cinétique E_c, énergie potentielle E_p et énergie mécanique totale E_M du satellite.

On a : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow \boxed{E_c = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}}$

$\boxed{E_p = -G\frac{Mm}{r}}$

$\rightarrow \boxed{E_M = E_c + E_p = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}}$

2. Application numérique :
Avec $r=R+h$, on trouve

$v = 7.47\ 10^3$ m/s	$E_c = 2.79\ 10^9$ J
$\omega = 10^{-3}$ s^{-1}	$E_p = -5.58\ 10^9$ J
$T = 6.28\ 10^3$ s	$E_M = -2.79\ 10^9$ J