

Examen de remplacement

Exercice 1 (07 pts)

Le mouvement d'un point matériel M , dans un référentiel (OXY) muni de la base cartésienne (\vec{i}, \vec{j}) , est décrit par les équations paramétriques suivantes : $x(t) = 5t$; $y(t) = -5t(t - 1)$

- 1- Donner l'équation de la trajectoire de M ;
- 2- Calculer les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules ;
- 3- Discuter en fonction de temps les phases du mouvement.
- 4- Déterminer les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire ;
- 5- Si m est la masse du point matériel M , déterminer sa quantité de mouvement et la force qu'il subit.
- 6- Trouver les instants t_0 et t_1 pour lesquels l'ordonnée du mobile est nul.
- 7- Donner la vitesse du mobile aux instants t_0 et t_1 . Conclure ?

Exercice 02 (04 pts)

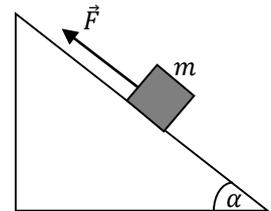
Un point M décrit une trajectoire curviligne dans le plan XOY est repéré en coordonnées polaires par les équations :

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{b}} ; \theta = \frac{t}{b} \text{ avec } \rho_0 \text{ et } b \text{ des constants.}$$

- 1- Dans la base polaire trouver des vecteurs vitesse et accélération de M en coordonnées polaires. En déduire les normes de ces vecteurs.
- 2- Calculer l'accélération tangentielle et normale de M . Déduire le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 3 (07pts)

Soit un corps de masse $m = 2 \text{ kg}$ qui glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport à l'horizontale. Les coefficients du frottement statique et cinétique entre les surfaces en contact sont $\mu_s = 0.50$ et $\mu_c = 0.20$, respectivement. On applique sur le corps une force \vec{F} horizontale au plan incliné (voir figure ci-contre). On prendra $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Déterminer la valeur de cette force telle que la masse m :

- a-** reste immobile **b-** se déplace avec une vitesse constante $v = 1 \text{ m/s}$ **c-** se déplace avec une accélération constante $a = 1 \text{ m/s}^2$

Question de cours (02pts)

- Enoncer le fondamental de la dynamique pour le cas où la masse est variable (cas générale).
- Monter qu'on peut écrire le rayon de courbure de la trajectoire R_c d'un mobile par la relation

$$R_c = \frac{v^3}{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}, \text{ avec } \vec{a} \text{ et } \vec{v} \text{ sont le vecteur accélération et vitesse du mobile.}$$

Bon courage

Corrigé

Exercice 1 (07pts)

1- L'équation de la trajectoire de M :

$$x = 5t \Rightarrow t = \frac{x}{5} \Rightarrow y = -\frac{x}{5}(x - 5) \quad (0.5)$$

2- Les composantes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs modules :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 5 & (0.25) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = -5(2t - 1) & (0.25) \end{cases} ; \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 & (0.25) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -10 & (0.25) \end{cases}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5\sqrt{(2t - 1)^2 + 1} \quad (0.5) \quad ; \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 10 \quad (0.5)$$

3- La nature de mouvement : $\vec{a} \cdot \vec{v} = 50(2t - 1) \quad (0.5)$

Mouvement uniformément accéléré $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} > 0 \Rightarrow t > \frac{1}{2} \quad (0.5)$

Mouvement uniformément décéléré $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow 0 < t < \frac{1}{2} \quad (0.5)$

4- Les composantes tangentielle a_t et normale a_n de l'accélération. En déduire le rayon de courbure de la trajectoire :

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{10(2t - 1)}{\sqrt{(2t - 1)^2 + 1}} \quad ; \quad (0.5) \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{10}{\sqrt{(2t - 1)^2 + 1}} \quad (0.5)$$

$$R_c = \frac{v^2}{a_n} = \frac{((2t - 1)^2 + 1)^{3/2}}{10} \quad (0.5)$$

5- La quantité de mouvement et la force subie par M .

$$\vec{P} = m\vec{v} = m[5\vec{i} - 5(2t - 1)\vec{j}] \quad (0.5) \quad ; \quad \vec{F} = m\vec{a} = -10\vec{j} \quad (0.5)$$

6- $y = 0 \Rightarrow -5t(t - 1) = 0 \Rightarrow t_0 = 0s$ ou $t_0 = 1s \quad (0.5)$

7- On a $v = 5\sqrt{(2t - 1)^2 + 1}$ donc ;

$$t_0 = 0s \Rightarrow v_0 = 5\sqrt{2} u.a \quad (0.25) \quad t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 5\sqrt{2} u.a \quad (0.25)$$

$$v_0 = v_1$$

Exercice 2 (04pts)

1. Vecteurs vitesse et accélération :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad (0.25) \quad \dot{\rho} = -\frac{\rho}{b} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{1}{b} \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\rho}{b}(-\vec{u}_\rho + \vec{u}_\theta) \quad (0.25)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \quad (0.25) \quad \ddot{\rho} = \frac{1}{b^2}\rho \text{ et } \ddot{\theta} = 0 \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \left(\frac{1}{b^2}\rho - \rho \frac{1}{b^2}\right)\vec{u}_\rho - 2\rho \frac{1}{b^2}\vec{u}_\theta = -2\frac{\rho}{b^2}\vec{u}_\theta \quad (0.25)$$

$$\|\vec{v}\| = \frac{\sqrt{2}}{b}\rho \quad (0.5); \quad \|\vec{a}\| = \frac{2}{b^2}\rho \quad (0.5)$$

$$2. \quad a_T = \frac{dv}{dt} = -\sqrt{2}\frac{\rho}{b^2} \quad (0.5); \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{2}\frac{\rho}{b^2} \quad (0.5)$$

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \sqrt{2}\rho \quad (0.5)$$

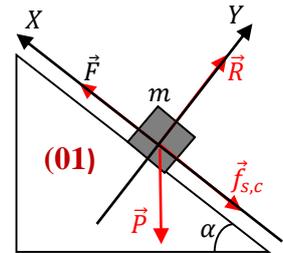
Exercice 3 (07pts)

PFD :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} : \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f}_{s,c} = m\vec{a} \quad (0.75)$$

Projection :

$$\begin{cases} (OX) : F - P_x - f_{s,c} = ma \quad (0.5) \\ (OY) : R - P_y = 0 \quad (0.5) \end{cases}$$



Force de frottement :

$$f_{s,c} = \mu_{s,c}R = \mu_{s,c}P_y = \mu_{s,c}mg \cos \alpha \quad (0.5)$$

Expression de la force F :

$$F = P_x + f_{s,c} + ma = mg(\sin \alpha + \mu_{s,c} \cos \alpha) + ma \quad (0.75)$$

a- Le corps reste immobile : $\mu = \mu_s ; a = 0 \quad (0.5)$

$$F = mg(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) = 18.6 \text{ N} \quad (0.5)$$

b- Le corps se déplace avec une vitesse constante $v = 1 \text{ m/s} : \mu = \mu_c ; a = 0 \quad (0.5)$

$$F = mg(\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) = 13.46 \text{ N} \quad (0.5)$$

c- Le corps se déplace avec une accélération constante $a = 1 \text{ m/s}^2 : \mu = \mu_c \quad (0.5)$

$$F = mg(\sin \alpha + \mu_c \cos \alpha) + ma = 15.46 \text{ N} \quad (0.5)$$

Question de cours (02Pts)

La résultante des forces extérieures appliquée sur un corps égale à la variation de son vecteur de quantité de mouvement par rapport au temps $\sum \vec{F}_{ext} = d\vec{p}/dt. \quad (01)$

$$- \quad a_N = a \cdot \sin(\alpha)$$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{v}\| = a \cdot v \cdot \sin(\alpha) \rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}{a \cdot v} \quad (0.5)$$

$$R_C = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^2}{a \cdot \sin(\alpha)} = \frac{v^2}{a \cdot \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|}{a \cdot v}} = \frac{v^3}{\|\vec{a} \wedge \vec{v}\|} \quad (0.5)$$

