

Exercice N°1 : (08pts)

Les coordonnées cartésiennes d'un mobile M se déplaçant dans le plan OXY sont :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(\omega t) \\ y(t) = 2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Où ω est une constante positive.

1. Calculer $x^2 + y^2$. Dédurre l'équation de sa trajectoire et sa nature.
2. Déterminer les composantes v_x et v_y de sa vitesse en fonction du temps, puis déduire le module de sa vitesse (v).
3. Déterminer les composantes a_x et a_y de son accélération en fonction du temps, puis déduire le module de son accélération (a).
4. Trouver les expressions des accélérations normale (a_n) et tangentielle (a_t) de son accélération. Quelle est la nature du mouvement de M ?
5. Ecrire les vecteurs unitaires \vec{u}_t et \vec{u}_n de la base intrinsèque dans la base cartésienne (\vec{i}, \vec{j}).
6. Donner les coordonnées polaires ρ et θ du point M.

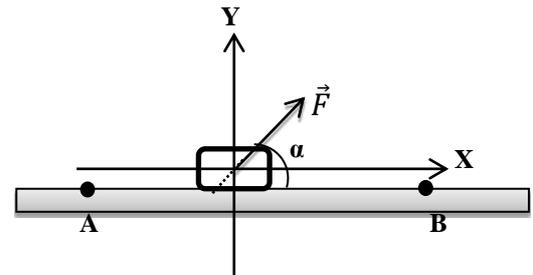
Exercice N°2 : (09pts)

Une boîte, assimilée à un point matériel de masse $m = 5\text{kg}$, se déplace sans vitesse initiale sous l'action d'une force d'entraînement \vec{F} du point A au point B sur un plan horizontal, la force \vec{F} faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ par rapport au plan horizontal (voir la figure ci-contre).

Le plan exerce sur la boîte une réaction normale \vec{R} ainsi que des frottements solides \vec{f}_s et \vec{f}_c tel que la force de frottement statique $f_s = 8.86\text{ N}$ et le coefficient de frottement cinétique est $\mu_c = 0.1$, On prend $g = 9.81\text{m. s}^2$

Partie 1 : A l'équilibre

- 1- Représenter les différentes forces agissant sur la boîte.
- 2- Ecrire le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué au mouvement de la boîte (à l'équilibre).
- 3- Projeter l'équation vectorielle obtenue sur les deux axes (OX) et (OY).
- 4- Déterminer la valeur minimale de la force d'entraînement F_{min} , pour faire bouger la boîte de sa position d'équilibre.
- 5- Dédurre le coefficient de frottement statique μ_s .



Partie 2 : En mouvement

On applique une force d'entraînement $F = 12\text{N}$ ($F > F_{min}$).

- 1- En appliquant le PFD sur la boîte, déterminer l'expression de l'accélération a . Calculer sa valeur.
- 2- Quelle est la nature de son mouvement ?
- 3- Déterminer les expressions de sa vitesse $v(t)$ et son équation horaire (t), sachant que $x(t = 0) = 0$.
- 4- Quel est le temps t_b nécessaire à la boîte pour qu'elle atteigne le point B, sachant que $AB = 5\text{m}$.

Question de cours ☹ (03pts)

- Énoncer la première loi de Newton.
- Qu'est-ce qu'un référentiel galiléen ? Donner un exemple.
- Énoncer le théorème du moment cinétique.
- Donner la définition d'un mouvement circulaire uniforme.

Bon courage

Corrigé

Exercice N° 1 : (8 Pts)

1. Calcule de $x^2 + y^2$. En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire et sa nature.

$$x^2 + y^2 = 4(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = 4 \quad (0.5)$$

D'où, l'équation cartésienne de sa trajectoire est de la forme :

$$x^2 + y^2 = 2^2 \text{ (equation d'un cercle de centre } O(0,0) \text{ et de rayon } R = 2) \Rightarrow \text{trajectoire circulaire} \quad (0.5)$$

2. Les composantes de sa vitesse

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = -2 \omega \sin \omega t & (0.5) \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 2 \omega \cos \omega t & (0.5) \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\omega \quad (0.5)$$

3. Les composantes de son accélération

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2 \omega^2 \cos \omega t & (0.5) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -2 \omega^2 \sin \omega t & (0.5) \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2\omega^2 \quad (0.5)$$

4. Les expressions des accélérations normale (a_n) et tangentielle (a_t) de son accélération

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 0, \quad (0.5) \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = a = 2\omega^2 \quad (0.5)$$

La trajectoire est **circulaire**, a_t étant nulle : **Mouvement circulaire uniforme** (0.5)

5. Les vecteurs unitaires \vec{u}_t et \vec{u}_n de la base intrinsèque dans la base (\vec{i}, \vec{j}).

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\sin \omega t \vec{i} + \cos \omega t \vec{j}, \quad (0.5) \quad \vec{u}_n = \frac{\vec{a}_n}{\|\vec{a}_n\|} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = -\cos \omega t \vec{i} - \sin \omega t \vec{j} \quad (0.5)$$

6. les coordonnées polaires ρ et θ du mobile M

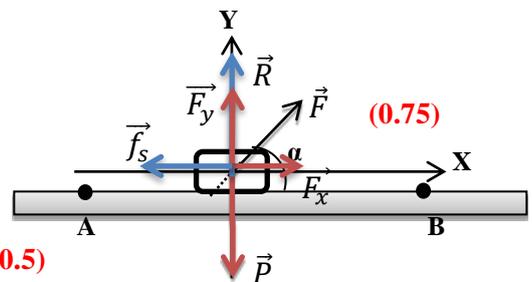
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \quad (0.5) \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \tan \omega t \Rightarrow \theta(t) = \omega t \quad (0.5)$$

Exercice N° 2: (9Pts)

Partie 1: A l'équilibre

1. Représentation des forces agissant sur la boîte (voir la figure)

2. En appliquant le PFD sur la boîte :



$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a} = \vec{0} (\vec{a} = \vec{0} : \text{en équilibre}) \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_s = \vec{0} \quad (0.5)$$

3. La projection de l'équation vectorielle sur les axes (OX) et (OY)

$$\begin{cases} (OX): F_x - f_s = 0 \dots \dots \dots (1) & (0.5) \\ (OY): R + F_y - P = 0 \dots \dots \dots (2) & (0.5) \end{cases}$$

4. La valeur minimale de la force d'entraînement F_{min}

$$\text{De (1): } F_x = f_s = 8.66 \text{ N} \Rightarrow (F_x)_{min} = 8.66 \text{ N} \quad (0.5)$$

$$F_x = F \cos \theta \Rightarrow F = \frac{F_x}{\cos \theta} \Rightarrow F_{min} = \frac{(F_x)_{min}}{\cos \theta} = 10.38 \text{ N} \quad (0.75)$$

5. Le coefficient de frottement statique μ_s

$$\text{On a: } f_s = \mu_s R \Rightarrow \mu_s = \frac{f_s}{R} \quad (0.25)$$

$$\text{De (2) : } R = P - F_y = mg - F \sin \theta \quad (0.25)$$

$$\text{D'où : } \mu_s = \frac{f_s}{mg - F \sin \theta} \Rightarrow \mu_s \cong 0.2 \quad (0.5)$$

Partie 2 : En mouvement

Supposons que $(F = 12\text{N}) > F_{min}$

1. L'accélération a de la boîte :

En appliquant le PFD :

$$\sum \vec{F}_{ex} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} + \vec{f}_s = m \vec{a} \quad (0.5)$$

Par projection :

$$\begin{cases} (OX): F_x - f_c = m a \Rightarrow a = \frac{F_x - f_c}{m} = \frac{F \cos \theta - \mu_c R}{m} & (0.5) \\ (OY): R + F_y - P = 0 \Rightarrow R = P - F_y = P - F \sin \theta & (0.5) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{F \cos \theta - \mu_c (P - F \sin \theta)}{m} \cong 1.22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (0.25)$$

2. Nature du mouvement

La trajectoire est rectiligne (suivant l'axe OX), et l'accélération constante ($a > 0$), donc le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA) (0.5)

3. Les expressions de sa vitesse $v(t)$ et son équation horaire $x(t)$

$$v(t) = a t + v_0 \Rightarrow v(t) = 1.22 t \quad (0.5) \quad x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x(t) = 0.61 t^2 \quad (0.5)$$

4. Le temps t_b nécessaire à la boîte pour qu'elle atteigne le point B

$$AB = \frac{1}{2} a t_b^2 = 0.61 t_b^2 \Rightarrow t_b = \sqrt{\frac{AB}{0.61}} \cong 2.8 \text{ s} \quad (0.5)$$

Question de cours : (3 Pts)

- Première loi de Newton (Principe d'inertie) : Tout objet non soumis à des forces (ou $\sum \vec{F}_{ex} = \vec{0}$) conserve son état de repos s'il était, ou son mouvement rectiligne uniforme. (0.75)

- Référentiel Galiléen (inertiel) : On appelle référentiel d'inertie, un système de référence (ou repère) dans lequel la première loi de Newton est applicable. **Exemple** (référentiels approximatifs): géocentrique, héliocentrique.... (0.75)

- Théorème du moment cinétique (TMC) : $\frac{dL/O}{dt} = \sum \overline{M}_{/O}(\vec{F}) = \sum \overline{OM}_i \wedge \vec{F}_i$. (0.75)

- Mouvement circulaire uniforme : Mouvement dont la trajectoire est circulaire et l'accélération tangentielle est nulle (vitesse linéaire et angulaire sont des constantes) (0.75)