## Série de TD n°2

### Exercice 1 :

Le mouvement rectiligne d'un point est défini par l'équation horaire suivante :

$$x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$$

1. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération à l'instant *t.*
2. Etudier le mouvement du point lorsque t croît de 0s à $+\infty$ . (Dire dans quel sens se déplace le point et si le mouvement est accéléré ou retardé)

### Exercice 2 :

On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un point mobile par rapport à un référentiel :

$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t^2 - 4t \end{cases}$$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire. Quelle est son allure ?
2. Calculer la vitesse du mobile.
3. Montrer que son accélération est constante.
4. Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération dans un repère de Frénet.
5. En déduire le rayon de courbure.

### Exercice 3 :

Dans un repère cartésien (*O, x, y, z*), muni de la base orthonormée$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les équations horaires d'un point *M* en mouvement sont les suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

**1-** Donner l'équation de la trajectoire et montrer que c'est un cercle de centre C à déterminer.

**2-** Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}$. Préciser sa direction par rapport à la trajectoire et calculer son module. Le mouvement est-il uniforme ?

**3-** Exprimer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Donner la valeur de $\omega$.

**4-** Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$. Le comparer avec le vecteur $\overrightarrow{CM}$.Que peut-on dire de ce vecteur par rapport au vecteur vitesse $\vec{V}$ et par rapport à la trajectoire. Donner la valeur de *a*.

**5-** Représenter la trajectoire, le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$, le vecteur vitesse $\vec{V}$ ainsi que le vecteur accélération $\vec{a}$ en un point *M* quelconque.

**Exercice 4 :**

Une particule soumise à des champs électriques et magnétiques complexes est en mouvement dans un référentiel galiléen. Les équations horaires sont, en coordonnées polaires :

$$r = r_0 e^{-\frac{t}{b}} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{t}{b}$$

Où $r_0$ et $b$ sont des constantes positives.

1) Calculer le vecteur vitesse de la particule.
2) Montrer que l'angle $\alpha = \left(\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{e_\theta}}\right)$ est constant. Que vaut cet angle ?
3) Calculer le vecteur accélération de la particule.
4) Montrer que l'angle $\beta = \left(\widehat{\vec{a}, \overrightarrow{u_n}}\right)$ est constant. Que vaut cet angle ? (On se servira de la question 2) .
5) Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

**Exercice 5 :**

En roulant sous la pluie à $100\ km/h$ sur une route plane, un conducteur remarque que les gouttes de pluie ont, vues à travers les vitres latérales de sa voiture, des trajectoires qui font un angle de 80° avec la verticale. Ayant arrêté sa voiture, il remarque que la pluie tombe en fait verticalement. Calculer la vitesse de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture se déplaçant à$100\ km/h$.

## Corrigé

### Exercice 1 :

1) Pour calculer la vitesse il suffit de dériver l'équation horaire par rapport au temps :

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t + 12}$$

En dérivant la vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération :

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18}$$

2) L'étude du mouvement du mobile nécessite une étude mathématique de la fonction $x(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit $av$. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de $v$.

Dressons le tableau de variation :

$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1; t = 2$ ; $a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1{,}5$

| $t$ | 0     1 | 1     1,5 | 1,5     2 | 2     $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $a$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $av$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $M^{vt}$ | Retardé<br>Sens $\rightarrow x+$ | Accéléré<br>Sens $\rightarrow x-$ | Retardé<br>Sens $\rightarrow x-$ | Accéléré<br>Sens $\rightarrow x+$ |

### Exercice 2 :

1) Equation de la trajectoire :

$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$, on remplace dans l'expression de $y$, on trouve :

$\boxed{y = x^2 - x}$ : C'est l'équation d'une parabole

2) Vitesse du mobile : on dérive le vecteur position par rapport au temps :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = 8t - 4 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(8t-4)^2 + 4}}\ (m.s^{-1})$$

3) Accélération du mobile : on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps :

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 8 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a = 8\ (m.s^{-2})} = cte$$

4) L'accélération tangentielle :

$$\boxed{a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{8(8t-4)}{\sqrt{(8t-4)^2+4}} \quad (m.s^{-1})}$$

Pour l'accélération normale on a :

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \Rightarrow a_n^2 = a^2 - a_t^2$$

$$\boxed{a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{16}{\sqrt{(8t-4)^2+4}} \quad (m.s^{-1})}$$

5) Rayon de courbure :

$$a_n = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{a_n}$$

$$\boxed{R_c = \frac{((8t-4)^2+4)^{\frac{3}{2}}}{16}}$$

**Exercice 3 :**

1) L'équation de la trajectoire :

On a $\begin{cases} x(t) = 1 + \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = 0 \end{cases}$

Donc : $(x-1)^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ $\Rightarrow$ la trajectoire est un cercle de centre $C(1,0)$ et de rayon $R = 1$.

2) La vitesse :

$$\vec{V} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -\sin t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \cos t \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = (-\sin t)\vec{\imath} + (\cos t)\,\vec{\jmath}}$$

Le module :

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = \boxed{1\ m.s^{-1}}$$

La vitesse est constante, le mouvement est donc uniforme. Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire (perpendiculaire au rayon correspondant).

3) La vitesse angulaire :

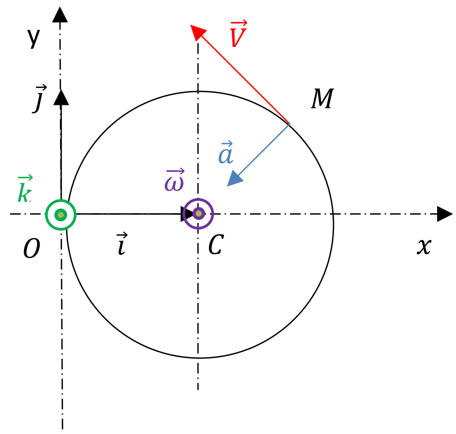
$$\boxed{\vec{\omega} = \omega.\vec{k} \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = 1\, rad.s^{-1}}$$

4) Le vecteur accélération :

$$\vec{a}\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -\cos t \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -\sin t \\ a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -(\cos t)\,\vec{\imath} - (\sin t)\,\vec{\jmath}}$$

Ce vecteur est normal et centripète (mouvement circulaire uniforme) dirigé de M vers C. Ce vecteur est perpendiculaire au vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{CM} = (x - x_C)\vec{\imath} + (y - y_C)\vec{\jmath} + (z - z_C)\vec{k}$$
$$= \cos t\,\vec{\imath} + (\sin t)\,\vec{\jmath}$$
$$= -\vec{a}$$




## Exercice 4 :

1) En coordonnées polaires le vecteur position s'écrit comme suit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

Donc :

$$\boxed{\vec{r} = r_0 e^{-\frac{t}{b}}\,\overrightarrow{u_r}}$$

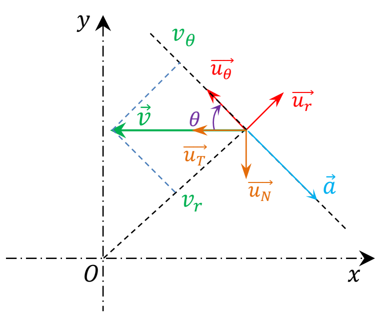
Le vecteur vitesse : c'est la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{v} = v_r\overrightarrow{u_r} + v_\theta\overrightarrow{u_\theta} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$$

Rappelons que : $\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ , $\dfrac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_r} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_r}$

Avec : $\dot{\theta} = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{b}$

Ce qui donne : $\vec{v} = -\dfrac{r}{b}e^{-\frac{t}{b}}\,\overrightarrow{u_r} + \dfrac{r}{b}e^{-\frac{t}{b}}\,\overrightarrow{u_\theta}$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}} \left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta}\right)}$$

Le module : $\|\vec{v}\| = \frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}} \|(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta})\| = \frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}}\left(\sqrt{2}\right)$

$$\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{2}\frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}}}$$

2) Pour calculer l'angle $\alpha = \left(\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{u_\theta}}\right)$ , on fait appel aux propriétés du produit scalaire

$\vec{v}.\overrightarrow{u_\theta} = v.u.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{v}.\overrightarrow{u_\theta}}{\|\vec{v}\|.\|\overrightarrow{u_\theta}\|}$

On remplace *v* et *v* par leurs expressions respectives :

$$\cos\alpha = \frac{\frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}} \left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta}\right).\overrightarrow{u_\theta}}{\sqrt{2}\frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}}.1}$$

Avec : $\overrightarrow{u_r}.\overrightarrow{u_\theta} = 0$ et $\overrightarrow{u_{r\theta}}.\overrightarrow{u_\theta} = 1$

Ce qui donne :

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \;\; ou \;\; \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Selon le schéma on a :

$$tg\ \alpha = \frac{v_r}{v_\theta} = -\frac{\frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}}}{\frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}}} = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \left(\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{u_\theta}}\right) = -\frac{\pi}{4}}$$

3) L'expression du vecteur accélération en coordonnées polaires est :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta}$$

Dans notre cas :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\frac{r_0}{b} e^{-\frac{t}{b}} \left(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{r_0}{b^2} e^{-\frac{t}{b}} - \frac{r_0}{b^2} e^{-\frac{t}{b}}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(-2\frac{r_0}{b^2} e^{-\frac{t}{b}}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-2\frac{r_0}{b^2} e^{-\frac{t}{b}}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

4) Calcul de l'angle $\beta = \left(\widehat{\vec{a}, \overrightarrow{u_N}}\right)$:

$\vec{a}$ est porté par $(-\overrightarrow{u_\theta})$ et d'après la question 2° $\left(\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{u_\theta}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ donc $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

Comme $\vec{v} = v.\overrightarrow{u_T}$ , on aura : $\left(\widehat{\vec{a}, \overrightarrow{u_T}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

Mais : $\left(\widehat{\overrightarrow{u_N},\overrightarrow{u_T}}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = \left(\widehat{\vec{a},\overrightarrow{u_N}}\right) = \frac{\pi}{4}}$

5) Rayon de courbure :

$$a_n = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{a_n}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_c = \sqrt{2}r_0 e^{-\frac{t}{b}}}$$

**<u>Exercice 5 :</u>**

Identifions d'abord les vitesses : absolue, relative et d'entrainement.

Pluie → mobile

Sol ≡ voiture immobile → repère absolu

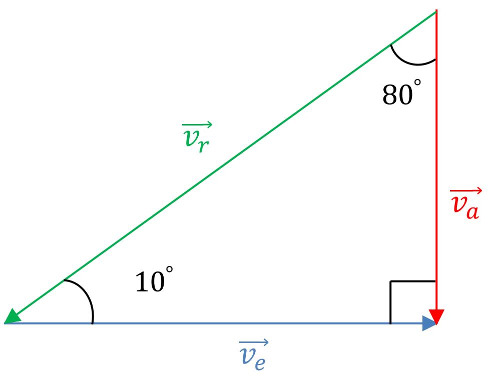
Voiture mobile → repère relatif

⇒ vitesse pluie / sol ⟶ vitesse absolue $V_a = V_{p/sol} = ?$

vitesse pluie / voiture ⟶ vitesse relative $V_r = V_{p/voit} = ?$

vitesse voiture / sol ⟶ vitesse d'entrainement $V_e = V_{voit/sol} = 100\ km/h$

D'après le schéma ci-contre on a :




$$\sin 80° = \frac{v_e}{v_r} = \frac{100}{v_r}$$

$$v_r = \frac{100}{\sin 80°} \cong 106{,}4km/h$$

$$\boxed{v_r = v_{p/voit} = 106{,}4km/h}$$

$$tg\ 10° = \frac{v_a}{v_e} \Rightarrow v_a = v_e\ tg\ 10° = 17{,}63\ km/h$$

$$\boxed{v_r = v_{p/sol} = 17{,}63\ km/h}$$