Chapitre II

Cinématique du point

II- 1. Introduction

L'étude de la cinématique consiste à décrire la manière dont un corps se déplace dans l'espace en fonction du temps sans s'attacher aux causes qui produisent ce mouvement.

II-1-1. Système de référence

Pour exprimer les notions de repos et de mouvement par rapport à un référentiel, considérons un repère orthonormé $\mathcal{R}\ (x, y, z)$ dans lequel est repérée la position M(x, y, z) d'un cops. Le corps est au repos par rapport à ce repère si ses coordonnées sont constantes au cours du temps. Cependant, si au moins l'une d'elles varie, le corps est en mouvement par rapport à R.

1- Notion du point matériel

Un point matériel est défini comme étant un objet sans dimension spatiales. En réalité on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point sur lequel toute la masse est concentré en son centre de gravité.

2- Trajectoire

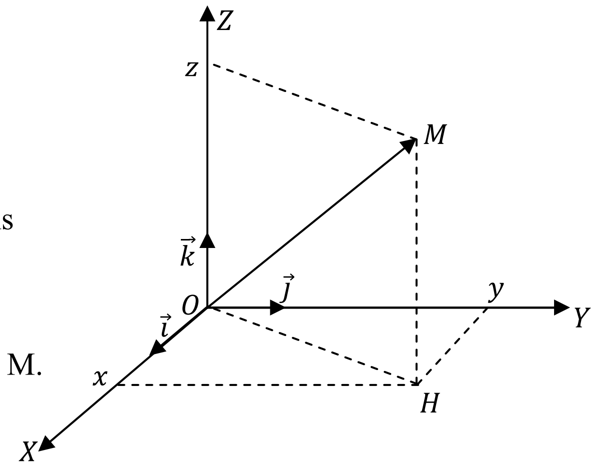
On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps.

II- 2. Repérage d'un point : système de coordonnées.

II-2-1. Coordonnées cartésiennes

Soit $\mathcal{R}(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct d'origine O et de base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

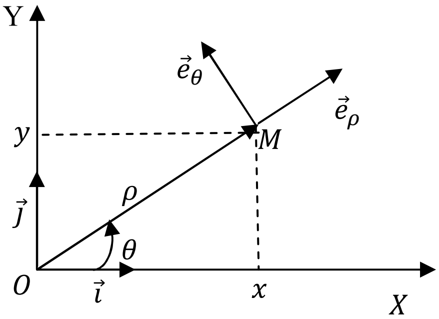


$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

où (x, y, z) sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

x = abscisse de M ; *y* = ordonnée de M ; *z* = côte de M.

II-2-2. Coordonnées polaires :



Soient $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$, $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM}})$

Un point M dans le plan (OXY) peut être repéré par les données de (ρ, θ), appelées coordonnées polaires.

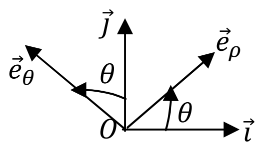
Pour recouvrir tout le plan : $0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \theta < 2\pi$.

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Base locale associée aux coordonnées polaires : $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$



$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\, \vec{\imath} + \sin\theta \vec{\jmath}$$

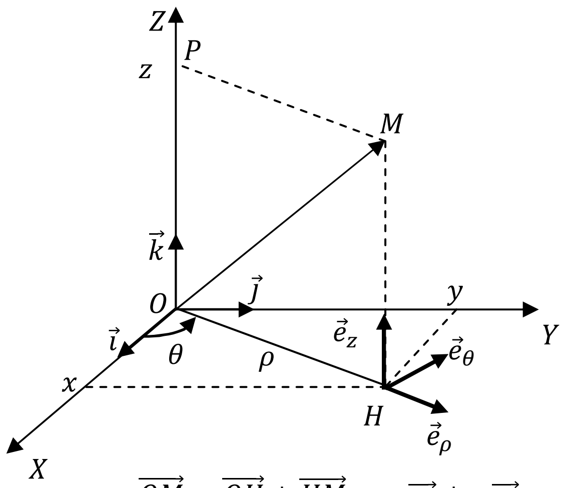
$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\, \vec{\imath} + \cos\theta \vec{\jmath}$$

$$\rightarrow \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta} \; et \; \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho}$$

Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta})$:

- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho}$

II- 2 -3. Coordonnées cylindriques



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

Soit H la projection de *M* sur le plan *(OXY)*.

Le point *M* est repéré par :

- ρ la distance *PM* ou encore *OH*;

$\rho = \|\overrightarrow{OH}\| = \|\overrightarrow{PM}\|$;

- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}})$;

- z tel que $z = \overline{OP}$.

(ρ, θ, z) sont les coordonnées cylindriques du point M.

ρ est appelé rayon polaire; θ est l'angle polaire et z la cote.

Pour recouvrir tout l'espace :

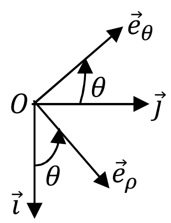
$0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \theta < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Base locale associée aux coordonnées cylindriques : $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$

$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$

$\overrightarrow{e_z} = \vec{k}$



$(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est la base locale associée aux coordonnées cylindriques, c'est une base orthonormée directe.

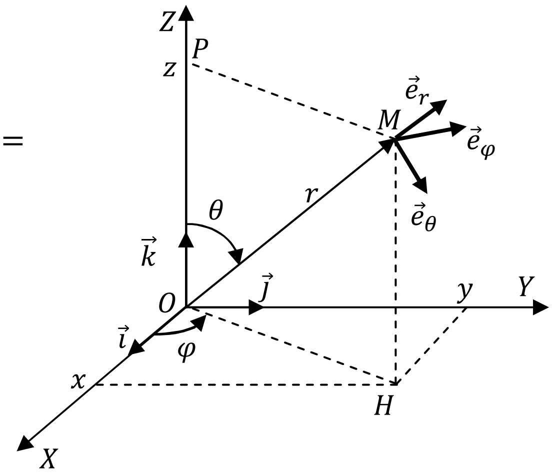
Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\theta = \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

II-2-4. Coordonnées sphériques



Le point M est repéré par :

- r : la distance de l'origine O au point M ($r = \|\overrightarrow{OM}\|$).

- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OZ}, \overrightarrow{OM}})$;

- $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OH}})$;

$0 \leq r < +\infty$; $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi < 2\pi$

(r, θ, φ) sont appelées coordonnées sphériques.

$r =$ rayon, $\theta =$ latitude, $\varphi =$ longitude

Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$, le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit : $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = OH\, cos\varphi = r\, sin\theta\, cos\varphi \\ y = OH\, sin\varphi = r\, sin\theta\, sin\varphi \\ z = r\, cos\theta \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ tg\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$$