Chapitre III

Dynamique du point matériel

III-1. Généralités

La cinématique du point permet de décrire le mouvement d'un point matériel, sans s'intéresser aux causes qui provoquent le mouvement. La dynamique du point permet de relier le mouvement à ses causes. Les causes du mouvement sont modélisées en mécanique par des grandeurs vectorielles appelés forces.

III-2. Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

III-2-1. Système isolé

On dit qu'un système est isolé si celui-ci ne subit aucune force extérieure. En réalité un tel système est très difficile à réaliser. On se contente donc de système pseudo isolé dont toutes les actions extérieures se compensent.

III-2-2. 1ère loi de Newton

Si un objet n'est soumis à aucune force ou si la résultante de toutes les forces est nulle ; il est :

- Soit en mouvement rectiligne uniforme
- Soit au repos s'il était initialement.

III-2-3. Référentiel Galiléen

Un référentiel Galiléen est un référentiel par rapport auquel un point matériel qui n'est soumis à aucune force suit un mouvement rectiligne uniforme (éventuellement de vitesse constante ou nulle).

Il existe une infinité de référentiels Galiléen : ils sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Exemples :

- Référentiel de Copernic (qui est presque fixe) c'est-à-dire $\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{cst}$
- Dans beaucoup de cas on peut considérer les laboratoires terrestres comme de bons repères d'inertie lorsque les phénomènes à étudier ne durent pas trop longtemps.

Caractéristique du référentiel Galiléen

- $\overrightarrow{a_c} = \vec{0}$ pas de rotation du référentiel relatif par rapport au repère fixe.
- $\overrightarrow{a_e} = \vec{0}$ référentiel mobile en translation uniforme par rapport au repère fixe
  $\Rightarrow$ Référentiel mobile Galiléen $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_a}$

III-3. Quantité de mouvement :

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est définit par le vecteur $\vec{p}$ donné par :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Le principe d'inertie peut s'énoncer de la façon suivante :

- Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère Galiléen.
- La quantité de mouvement totale du système se conserve si le principe d'inertie est vérifié.

III-4. Notion de force : 2ème loi de Newton

La force appliquée à une particule est égale à la variation de sa quantité de mouvement :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement :

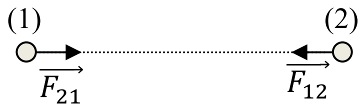
$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$

Si m=cte (v$\ll c$) $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$

III-5. Principe de l'action et de la réaction : 3ème loi de Newton

Soient deux points matériels (1) et (2) interagissant entre eux, l'action exercée par (1) sur (2) $\overrightarrow{F_{12}}$ est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) $\overrightarrow{F_{21}}$, soit $\overrightarrow{F_{12}} = -\overrightarrow{F_{21}}$ et $\|\overrightarrow{F_{12}}\| = \|\overrightarrow{F_{21}}\|$

Ces deux forces sont de même natures



III-5-1. Conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé :

Soient $\vec{p}_1$ la quantité de mouvement d'un corps (1) et $\vec{p}_2$ la quantité de mouvement d'un corps (2).

$$\vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt}$$

Selon le principe de l'action et de la réaction,

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\frac{d\vec{p}_1}{dt} \rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{cste}$$

La quantité de mouvement totale d'un système isolé est un vecteur constant qui se conserve dans le temps.

III-6. Les forces

III-6-1. Forces de gravitation universelle

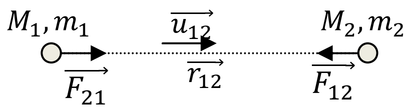
Entre deux points matériel M_1 et M_2 respectivement de masse m_1 et m_2 il existe une interaction appelée interaction gravitationnelle. Si $r_{12} = r_{21}$ est la distance entre les deux points matériels, alors le point matériel M_2 subit de la part du point matériel M_1 une force attractive :

$$\vec{F}_{1\to2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$$

$\vec{u}_{1\to2}$: vecteur unitaire porté par la droite joignant $m_1$etm_2 et dirigé de m_1à m_2.

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

Gest la constante de gravitation ; $G = 6.67\ 10^{-11} Nm^2kg^{-2}$



Un cas particulier très important est l'attraction d'une masse m d'un objet par la terre de masse M

$$\vec{F}_{M\to m} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{1\to2}$$

- Au voisinage de la surface de la Terre $r = R$; où R est le rayon de la Terre donc

$$F_{M\to m} = G\frac{mM}{R^2} = mg.$$

Avec $M = 5.98\ 10^{24} kg$ et $R = 6.37\ 10^6 m$

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9.81\ m/s^2$$

- Si le corps se trouve à une altitude h par rapport à la surface de la Terre :

$$F_{M\to m} = G\frac{mM}{(R+h)^2} = mg$$

D'où $g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$ avec $g_0 = G\frac{M}{R^2}$; champs à la surface de la Terre.

III-6-2. Forces de contact

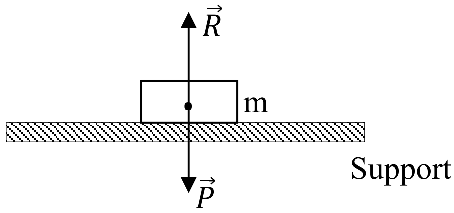
a) Réaction d'un support

Cas d'un objet immobile sur un support horizontal : le support exerce une force sur l'objet, il l'empêche de le traverser. $\vec{R}$ représente la résultante

de toutes les actions exercées sur la surface de contact.

L'objet étant en équilibre :

$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = -\vec{R}$



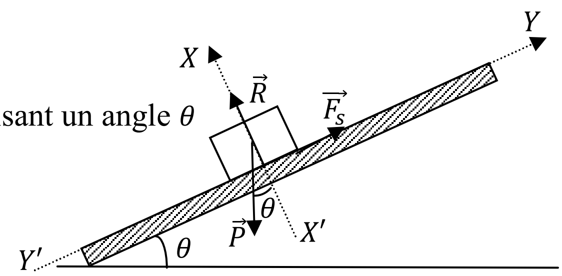
b) Frottement solide

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement.

- ***Frottement statique***

Soit un bloc au repos sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale.

Si le bloc est immobile → $\vec{R} + \vec{P} + \vec{F_s} = \vec{0}$



Par projection sur les deux axes OX et OY on obtient:

$$\begin{cases} R = P\cos\theta & \text{(OX)} \\ F_s = P\sin\theta & \text{(OY)} \end{cases}$$

D'où : $\frac{F_s}{R} = tg\theta$

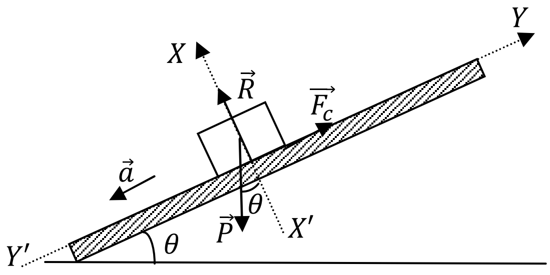
On augmente l'inclinaison jusqu'au moment ou le bloc commence à glisser ($\theta = \theta_{max}$).

$F_s = F_{s\,max} = \mu_s R \Rightarrow \quad tg\theta_{max} = \mu_s$

μ_s appelé coefficient de frottement statique, il dépend de la nature et de l'état des matériaux en contact.

- ***Frottement cinétique (dynamique)***

En faisant croitre θ au-delà de la valeur maximale le bloc se met à glisser avec un mouvement uniformément accéléré :



$\vec{R} + \vec{P} + \vec{F_c} = m\vec{a}$

De la même manière que précédemment, on obtient :

$$\mu_c = \frac{F_c}{R}$$

$\mu_c < \mu_s$ (il est plus facile de maintenir le mouvement d'un objet que de le démarrer).

c) Frottement visqueux

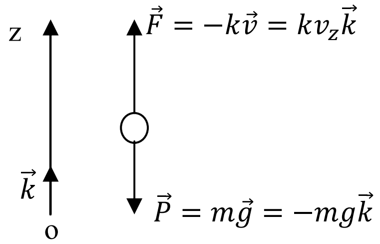
Le frottement visqueux est lié au mouvement de l'objet M dans un milieu fluide. Pour de faible vitesse du point M, $\vec{F} = -k\vec{v}$

$\vec{F}$: force de frottement

$\vec{v}$: vitesse de l'objet

k : constante positive

Exemple : chute d'un parachutiste



le PFD :

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - k\vec{v} = m\vec{a}$

Avec $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_z}{dt}\right)\vec{k}$

$-mg - kv_z = m\frac{dv_z}{dt} \Rightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{k}{m}v_z = -g$ (Équation différentielle du 1er ordre)

d) Forces de tension

On considère un ressort fixé à une de ces extrémités et au bout duquel est accroché le point matériel M. Quand le ressort s'allonge, une force de rappel, proportionnelle à cet allongement et appelée tension, s'exerce sur la masse :

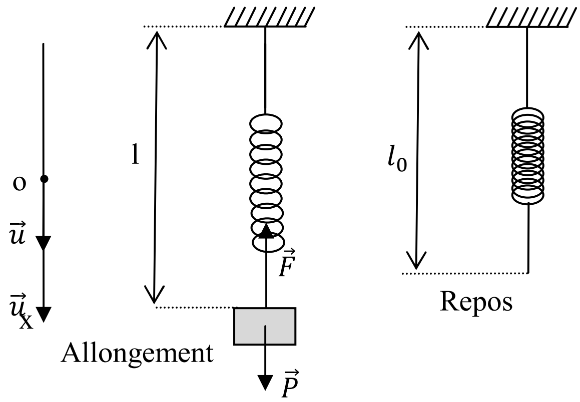
$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}$$
$$\vec{F} = -kx\vec{u}$$

k : constante de raideur du ressort

l : longueur du ressort à l'instant t

l_0 : longueur du ressort à vide

$\vec{u}$: vecteur unitaire

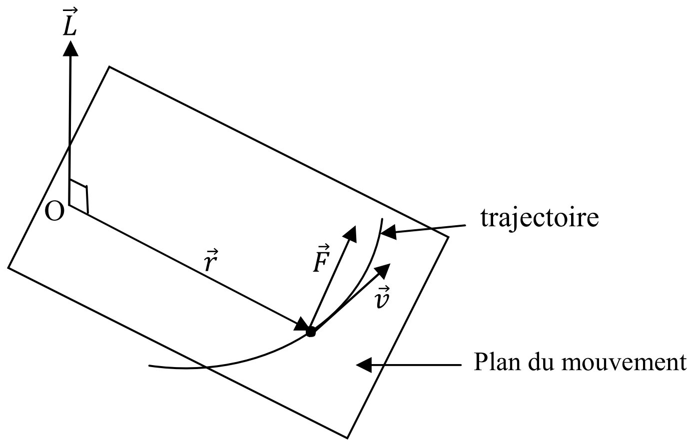


III-7. Moment cinétique d'une particule

Le moment cinétique par rapport au point O d'une particule de masse m se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$, de quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, est défini par le produit vectoriel

$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\, \vec{r} \wedge \vec{v}$

$\vec{L}$ change de grandeur et de direction quand la particule se déplace. Cependant, il garde la même direction quand la particule se déplace dans un plan et que le point O est dans le plan.

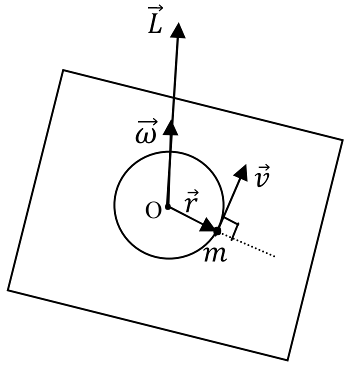


a) Cas d'un mouvement circulaire

Dans le cas d'un mouvement circulaire de centre O :

$v = r\omega \Rightarrow L = mrv = mr^2\omega$

D'où : $\vec{L} = mr^2\vec{\omega}$



b) Cas d'un mouvement curviligne

Si le mouvement est curviligne, on peut décomposer la vitesse suivant ses composantes radiales et transversales :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta}$$

$$\vec{L} = m\vec{r}\wedge(\overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_\theta})$$

D'où :

$\vec{L} = m\vec{r}\wedge\overrightarrow{v_\theta}$ ($\vec{r}\wedge\overrightarrow{v_r} = 0$ car les deux vecteurs sont parallèles)

$\vec{L} = mr\overrightarrow{e_r}\wedge v_\theta\overrightarrow{e_\theta} = mrv_\theta(\overrightarrow{e_r}\wedge\overrightarrow{e_\theta})$ comme $v_\theta = r\,\omega$ alors :

$\vec{L} = mrv_\theta\overrightarrow{e_z} = mrv_\theta\vec{\omega}$ (l'axe de rotation est l'axe OZ)

Dans le cas général $\vec{r}$ n'est pas constant :

$$\vec{L} = \vec{r}\wedge\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \left(yp_z - zp_y\right)\vec{\imath} + \left(zp_x - xp_z\right)\vec{\jmath} + \left(xp_y - yp_x\right)\vec{k}$$

III-7-1. Moment d'une force

Soit un point M soumis à une force $\vec{F}$, on définit le moment de cette force $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ par rapport au point O par :

$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec{F} = \vec{r}\wedge\vec{F}$

III-7-2. Théorème du moment cinétique

$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r}\wedge\vec{p}$$

$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}\wedge\vec{p} + \vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}$

$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{v}\wedge m\vec{v} + \vec{r}\wedge\overrightarrow{\sum F}$ (car $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ et $\sum\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$)

$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r}\wedge\sum\vec{F}$ (car $\vec{v}\wedge m\vec{v} = \vec{0}$)

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{r} \wedge \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{M_O}\,(\vec{F})$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'une particule est égale à la somme des moments de toutes les forces qui lui sont appliquées.

III-7-3. Forces centrales

- Si le moment appliqué à une particule est nul $\Rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{L_O}$ est constant. Le moment cinétique d'une particule est donc constant si le moment de forces est nul.
- La condition $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ est aussi rempli si $\vec{F} = \vec{0}$ c'est-à-dire si la particule est libre.
- La condition $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ est aussi rempli si $\vec{F} \,//\, \vec{r}$ ou si la direction de $\vec{F}$ passe par le point O. une force dont la direction passe toujours par un point fixe est appelée force centrale.

III-8. Pseudo-forces ou forces d'inertie

L'observateur d'un repère accéléré (R') par rapport à (R) mesure pour un mouvement donné une accélération $\overrightarrow{a_r} \neq \overrightarrow{a_a}$ que mesure l'observateur d'inertie (R).

L'observateur dans (R') ne peut pas écrire $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_r}$ par contre dans (R) Galiléen on peut écrire $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_a} \Rightarrow m\overrightarrow{a_r} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} + \overrightarrow{F_e} + \overrightarrow{F_c}$ avec :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a_a}$$

$\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e}$ → force d'inertie d'entrainement

$\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{a_c}$ → force d'inertie complémentaire

Pour exprimer correctement le PFD dans un référentiel non Galiléen il suffit d'ajouter à la somme des forces, des forces naturelles, les termes $(-m\overrightarrow{a_e})$ et $(-m\overrightarrow{a_c})$ qui représentent des forces d'inertie.

- Si (R') est en translation uniforme par rapport à (R) on a $\overrightarrow{a_r}=\overrightarrow{a_a}$. Un observateur en translation uniforme par rapport à (R) n'a pas besoin d'introduire les pseudo-forces pour décrire la relation fondamentale.
- Si (R') est en mouvement de translation par rapport à (R) ; $\overrightarrow{F_c} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e}$
- Si (R') est en mouvement de rotation par rapport à (R) :

$$\overrightarrow{F_e} = -m\overrightarrow{a_e} = -\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{dt}}\wedge\vec{r} - m\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_e}$$

$$\overrightarrow{F_c} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{v_r}$$