

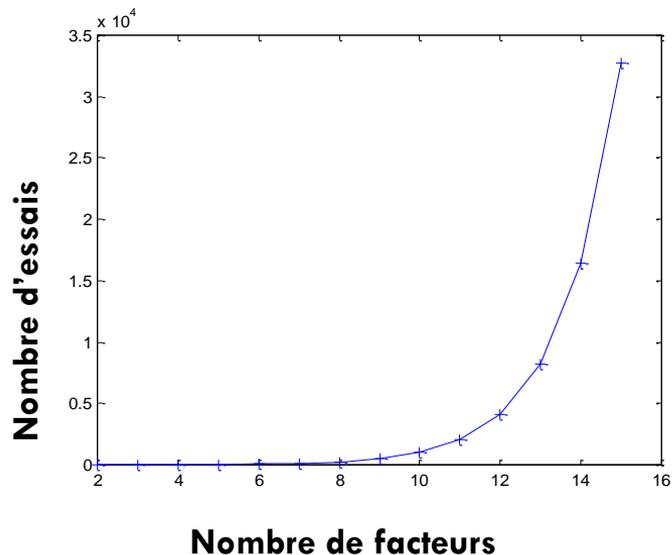
Les plans Factoriels Fractionnaires

2^{k-p}

1. Introduction

Dans un plan factoriel complet, le nombre d'essais augmente en exponentiel avec le nbre de facteurs

- 4 facteurs : $2^4=16$ essais,
- 5 facteurs : $2^5=32$ essais,
- 7 facteurs : $2^7=128$ essais,
- 8 facteurs : $2^8=256$ essais.



La solution est d'utiliser : Les plans fractionnaires

1. Introduction

Les plans fractionnaires sont des plans optimaux orthogonaux qui ne tiennent compte que **des effets les plus intéressants**.

Les plans fractionnaires consiste à utiliser les matrices des plans complets: $2^{k-1}, 2^{k-2}, \dots, 2^{k-p}$

Réduction du nombre d'essais

Exple : $2^{6-2} = 2^4 = 16$ essais (PFF) au lieu de 64 essais (PFC)

Ces 16 essais sont-ils suffisants?

2. Théorie des alias:

soit le modèle postulé suivant:

$$\begin{aligned}y = & a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \\ & + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4 + a_{34}x_3x_4 \\ & + a_{123}x_1x_2x_3 + a_{124}x_1x_2x_4 + a_{134}x_1x_3x_4 + a_{234}x_2x_3x_4 \\ & + a_{1234}x_1x_2x_3x_4\end{aligned}$$

Plan complet 2^4 :

Nbre de coefficients inconnus: 16

Nbre d'équations utiles: 16

Plan fractionnaire:

Nbre de coefficients: 16

Nbre d'équations utiles: 8

Matrice: 8 lignes et 16 colonnes

 faire 16 expériences pour n'estimer que 8 paramètres?

Solution:

- On s'arrange à regrouper les colonnes deux à deux (niveau identique).
- Les inconnues sont ainsi regroupées deux par deux.

Principe de construction des plans fractionnaires 2^{k-p} :

1. Choix d'un plan de base.
2. Construction de la matrice du modèle saturé avec ce plan de base.
3. Choix des confusions: affectations des effets principaux.
4. Détermination des confusions.

2.1 Calcul de Box

- Notation de Box(selon présentation Yates):

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} -1 \\ +1 \\ -1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ +1 \\ +1 \end{bmatrix} \quad -\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Calcul de Box:

. Commutativité:

$$A.B=B.A$$

. Associativité:

$$A(BC)=(AB)C$$

. Associativité:

$$A.A=I \quad B.B=I$$

$$A.I=A \quad B.I=B$$

$$A.(-I)=-A \quad B.(-I)=-B$$

$$I.I=I$$

2.2 hypothèses

- 1 – Les interactions d'ordre trois et toutes celles d'ordre plus élevé peuvent être négligées.**
- 2 – Tous les coefficients aliasés dans un contraste faible (négligeable) sont eux-mêmes faibles (négligeables).**
- 3 – Si deux contrastes sont forts, on se méfiera de leur interaction qui peut être forte.**
- 4 – Si deux contrastes sont faibles, on suppose que leur interaction l'est aussi.**
- 5 – Un facteur principal faible et un facteur principal fort engendrent, le plus souvent mais pas toujours, une interaction faible.**

2.3 Construction de plans fractionnaires:

Construction d'un plan 2^{3-1} :

1. Choix du plan de base $2^2=4$ essais.
2. Construction de la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base.
3. Le facteur **C** est confondu avec l'interaction **AB**.
4. Détermination des confusions résultantes: **C=AB**.

I	A	B	AB
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

Confusion d'effets (alias) et générateurs d'alias:

- . $C = AB$ (C confondu avec AB)
- . $CC=ABC \longrightarrow I = ABC$ (générateur d'alias)
- . $I.A = ABC.A \longrightarrow A=BC$
- . $I.B = ABC.B \longrightarrow B=AC$

I	A	B	AB
ABC	BC	AC	C
1	1	1	1
1	1	-1	-1
1	-1	1	-1
1	-1	-1	1

Construction d'un plan 2^{4-1} :

1. Choix du plan de base $2^3=8$ essais.
2. Construction de la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base.
3. L'interaction **ABC** négligeable et confondue avec le facteur D.
4. Détermination des confusions résultantes: **D=ABC**.

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC D
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Confusion d'effets (alias) et générateurs d'alias:

. $D = ABC$ (générateur d'alias)

. $DD = ABCD \rightarrow I = ABCD$

. $I.A = ABCD.A \rightarrow A = BCD$

. $I.B = ABCD.B \rightarrow B = ACD$

. $I.C = ABCD.C \rightarrow C = ABD$

. $I.D = ABCD.D \rightarrow D = ABC$

. $I.AB = ABCD.AB \rightarrow AB = CD$

. $I.AC = ABCD.AC \rightarrow AC = BD$

. $I.BC = ABCD.BC \rightarrow BC = AD$

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABCD	BCD	ACD	ABD	CD	BD	AD	D
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	1

Construction d'un plan 2^{5-2} :

1. Choix du plan de base $2^3=8$ essais.
2. Construction de la matrice des effets du modèle saturé avec ce plan de base.
3. Affectation des effets principaux: $D=AB$ et $E=AC$.
4. Détermination des confusions résultantes.

I	A	B	C	D AB	E AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	1

$D = AB$ (générateur d'alias) $DD=ABD$ **$I=ABD$**

$A=BD$ **$AB= D$**
 $B=AD$ $BC=ACD$
 $C=ABCD$ $AC=BCD$ $ABC=CD$

$E=AC$ **$EE=I=ACE$**
 $B=ABCE$
 $C=AE$ $AB=BCE$

$E=BCD$ **$EE=I=BCDE$**

$I=ABD=ACE$ $I.I=ABD ACE=BCDE$ **$I=BCDE$**

Confusion d'effets (alias) et générateurs d'aliases:

I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
ABD	BD	ABCD	ABD	D	BCD	ACD	CD
ACE	CE	ABCE	AE	BCE	E	ABE	BE
BCDE	ABCDE	CDE	BDE	ACDE	ABDE	DE	ADE

Remarque:

on estime un ensemble, mais impossible d'estimer à l'intérieur.

Confusion d'effets: estimation d'un ensemble d'effets ou d'interaction.

Ensemble bleu: estimable mais impossible de savoir ce qui est dû à A ou BD ou CE ou ABCDE

La qualité des plans d'expériences:

- Résolution = longueur du plus petit générateur d'alias

Exemple: plan 2^{4-1} : I= ABCD résolution IV;

plan 2^{5-2} : I= ABD=BCE=BCDE résolution III;

- Résolution III: effets principaux confondus avec interactions d'ordre 2 ou plus.
- Résolution IV: effets principaux confondus avec interactions d'ordre 3 ou plus.
- Résolution V: effets principaux confondus avec interactions d'ordre 4 ou plus et interactions d'ordre 2 confondues avec interactions d'ordre 3 ou plus. .

La qualité des plans d'expériences:

Le nombre de facteurs et le nombre d'essais:

s	3	3	5	6	7	8	9
Nbre d'essais 2^s	8	16	32	64	128	256	512
Nb fact en résolution3 : 2^{s-1}	7	15	31	63	127	255	511
Nb fact en résolution4 : 2^{s-1}	4	8	16	32	64	128	256
Nb fact en résolution 5 : 2^{s-1}	3	5	6	8	11	17	≥ 23

3. Analyse des résultats

Règles:

on considère négligeables:

- 1. tous les termes lorsque l'ensemble est négligeable.
- 2. les interactions d'ordre supérieur à 3.
- 3. les interactions entre 2 effets négligeables.
- 4. les interactions comprenant un effet négligeable.
- 5. toutes les interactions.

Contraintes de + en + fortes



4. Étude d'exemple de plan 2^{5-2}

Préparation d'un gâteau

Facteur	Niveau (-1)	Niveau (+1)
Température (1) C	160	220
Durée (2) min	35	40
Farine (3) g	150	200
Sucre (4) g	100	150
Œufs (5) unité	2	4

Réponse: hauteur du gâteau en mm.

Aliases: $D=ABC$ et le facteur $E=AC$.

I ABCD=ACE	A	B	C	D=ABC	E=AC	hauteur
+	-	-	-	+	+	56
+	+	-	-	-	-	8
+	-	+	-	-	+	54
+	+	+	-	+	-	10
+	-	-	+	+	-	28
+	+	-	+	-	+	24
+	-	+	+	-	-	26
+	+	+	+	+	+	34

Générateurs d'Aliases: **D=ABC** et **E=AC.**
DD=ABCD=I et **EE=ACE=I**

Générateurs d'aliases indépendants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D=ABC} \quad \text{et} \quad \mathbf{E=AC} \\ \mathbf{DD=ABCD=I} \quad \text{et} \quad \mathbf{EE=ACE=I} \end{array} \right.$$

Générateurs d'aliases dépendants:

$$\mathbf{ABCD.ACE=I.I=I}$$

$$BC=ACD$$

$$ABC=CD$$

$$\mathbf{EE=I=ACE}$$

$$\mathbf{EE=I=BCDE}$$

$$I.I=ABD \quad ACE=BCDE \quad \mathbf{I=BCDE}$$

$$C=ABCD \quad AC=BCD$$

$$E=AC$$

$$B=ABCE$$

$$C=AE \quad AB=BCE$$

$$E=BCD$$

$$I=ABD=ACE$$

$$B=AD$$

$$BC=ACD$$

$$AC=BCD$$

$$ABC=CD$$

$$\mathbf{EE=I=ACE}$$

$$AB=BCE$$

$$\mathbf{EE=I=BCDE}$$

$$I.I=ABD \quad ACE=BCDE \quad \mathbf{I=BCDE}$$

$$C=ABCD$$

$$E=AC$$

$$B=ABCE$$

$$C=AE$$

$$E=BCD$$

$$I=ABD=ACE$$

I	A	B	C	D	E
ABCD	BCD	ACD	ABD	ABC	BD
ACE	CE	ABCE	AE	ACDE	AC
BDE	ABDE	DE	BCDE	BE	BD
2,25	3,15	0,35	0,52	2,25	2,25

Analyse des résultats:

- Valeurs < 1 ne sont pas significatifs
- Ensembles 3, 4, 7 et 8 sont négligeables.

Règle 1: tous les termes des ensembles 3, 4, 7 et 8 sont négligeables.

Règle 2: les interactions d'ordre 3 et plus sont négligeables: BCD, ACD, ADE, ...

Règle 3: interactions entre 2 effets négligeables (aucune).

B et C négligeables : BC négligeables .

Règle 4: interactions comprenant un effet négligeable: BD, CE, AB, AC.

Règle 5: toutes les interactions sont négligeables (inutile).

De la résolution 3 a la résolution 4:

- Ajout d'un plan complémentaire au plan de résolution 3.
- **Exple:** plan 2^{5-2}
- Plan initial: $D=AB$ et $E=AC$ $I=ABD=ACE=BCDE$
- A est un facteur important et B A est un facteur important:

Alors que j'ai considéré AB négligeable.

Est-il vraiment négligeable?

Plan complémentaire:

$$-D = (-A)(-B) \quad \text{donc} \quad D = -AB$$

$$-E = (-A)(-C) \quad \text{donc} \quad E = -AC$$

{ plus petit générateur d'alias
résolution IV

Plan complet: $D=ABS$ et $E=ACS$ $I=ABDS=ACES=BCDE$

S	A	B	C	D=ABC	E=AC	hauteur
+	-	-	-	+	+	Plan initial
+	+	-	-	-	-	
+	-	+	-	-	+	
+	+	+	-	+	-	
+	-	-	+	+	-	
+	+	-	+	-	+	
+	-	+	+	-	-	
+	+	+	+	+	+	
-						Plan complémentaire
-						
-						
-						
-						
-						
-						
-						

Multiplier par (-1)

FIN!