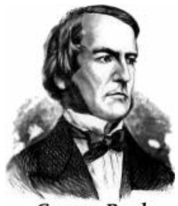
# Chapitre 3 - Algèbre de Boole et Circuits Logiques

# Série TD3 (2021-2022 Semestre 1)



George Boole

**Q1** –Indiquez la nature des éléments cités ci-dessous

| Eléménts | Nature des éléments | | |
|---|---|---|---|
| | Axiome | théorème | Opérateur |
| Idempotence | | ☑ | |
| Commutativité | ☑ | | |
| Associativité | ☑ | | |
| Inhibition | | ☑ | |
| Absorption | | ☑ | |
| DeMorgan | | ☑ | |
| ET logique (.) | | | ☑ |
| OU logique (+) | | | ☑ |
| Négation | | | ☑ |
| Complémentarité | ☑ | | |
| Distributivité | ☑ | | |

**Q2** – Complétez les tableaux ci-dessous :

| Loi "+" | Nom de la propriété |
|---|---|
| **x + x = x** | Idempotence |
| **x + y = y + x** | Commutativité |
| **x+y+z = x+(y+z) = (x + y)+z** | Associativité |
| **x + 0 = x** | Élément neutre |
| **x + (y . z) = (x + y) . (x + z)** | Distributivité |
| $\bar{x} + x = 1$ | Complémentarité |

| Loi "." | Nom de la propriété |
|---|---|
| **x . x = x** | Idempotence |
| **x . y = y . x** | Commutativité |
| **x.y.z = x . (y . z) = (x . y) . z** | Associativité |
| **x . 1 = x** | Élément neutre |
| **x . (y + z) = (x . y) + (x . z)** | Distributivité |
| $\bar{x}.x = 0$ | Complémentarité |

| Propriété | Nom de la propriété |
|---|---|
| $\overline{\sum_{i=0}^{n} x_i} = \prod_{i=0}^{n} \overline{x_i}$ | De Morgan |

**Q3** – Le principe de dualité stipule qu'on peut déduire à partir de toute formule une nouvelle formule en remplaçant les valeurs « 1 » par « 0 » et inversement et la loi « . » par la loi « + » et inversement. Une attention doit être accordée à la priorité des opérateurs « . » et « + » lors du passage d'une formule à sa duale. En effet, l'opérateur « . » est prioritaire par rapport à l'opérateur « + » et pour ne pas faire d'erreurs, il suffit de mettre d'abord les parenthèses.

☑Vrai ☐Faux

**Q4** – Indiquez à quellepropriété correspondent les formules suivantes ?

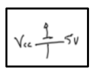
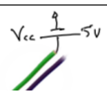
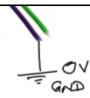
$$\overline{x+y+z} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}\overline{x.z} = \bar{x}+\bar{z}$$

De Morgan

**Q5** – Dans l'algèbre des circuits logiques, les états logiques « 1 » et « 0 » correspondent à :

- ☐ Des niveaux de tension proches de 0V pour le « 0 » logique) et généralement proches de 5v pour le « 1 » logique☑
- ☐ ~~Des niveaux de tension proches de 0V pour le « 0 » logique) et généralement proches de 220v pour le « 1 » logique~~
- ☐ ~~Une fréquence d'une horloge comprise entre 0 et 5~~
- ☐ Deux états magnétiques (binaire du genre zone magnétisée pour le « 1 » logique ou non magnétiséepour le « 0 » logique) dans une banque magnétique☑
- ☐ ~~Toutes les valeurs du courant électrique comprises en 0 et 1 ampère~~
- ☐ Deux états d'une lampe (allumée ou éteinte)☑

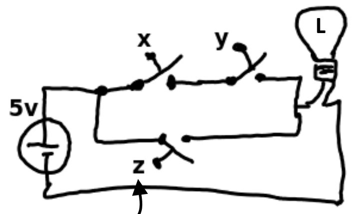
**Q6** – Complétez le tableau ci-dessous :

| Etat électrique | Etat logique | Etat électrique | Etat logique |
|---|---|---|---|
|  | 1 |  | 1 |
|  | 1 |  | 0 |
|  | 0 |  | 1 |
|  | 0 |  | 0 |

**Q7** – En supposant que l'on représente 3 variables booléennes « ***x*** », « ***y*** »et « **z** » par 3 interrupteurs et une fonction « ***L*** » par une lampe, donnez la table de vérité qui définie la fonction « ***L=f(x,y,z)*** » représentée dans la figure ci-dessous etindiquez à quelle situation correspond l'état représenté.

| | x | y | z | L |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 11 |

L'état de circuit représenté correspond à la première situation 0 dans la table vérité




Indiquez à quelle ligne de la table correspondrait la situation où onfermera l'interrupteur « **z** »

Si on ferme l'interrupteur z l'état du circuit va correspondre à la deuxième situation 1 dans la table de vérité

**Q8** – Si vous avez ***5*** variables, combiens de lignes (hors mis la première ligne d'entête) allez-vous avoir dans la table de vérité représentant la fonction
***F = f($x_4$,$x_3$, $x_2$, $x_1$, $x_0$)*** :$2^5$ = 32

**Q9** – Donnez la table de vérité d'une fonction **F** à 3 variable **a**,**b**et **c**sachant que cette fonction est à « 1 » uniquement lorsque la valeur représentée par a, b et c est un nombre premier.

| a | b | c | F(a,b,c) |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Donnez F sous sa forme canonique disjonctive :

F(a,b,c) = $m_2$+$m_3$+$m_5$+$m_7$

= $\bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}c + abc$

**Q10** – Indiquez les lois (axiomes et théorèmes) utilisés dans les démonstrations ci-dessous :

$$
\begin{aligned}
L &= abcd + a\bar{b}cd + ac\bar{d} + \bar{c} + ac\bar{c}d \\
L &= abcd + a\bar{b}cd + ac\bar{d} + \bar{c} + 0 \\
L &= abcd + a\bar{b}cd + ac\bar{d} + \bar{c} \\
L &= ac\ (bd + \bar{b}d + \bar{d}) + \bar{c} \\
L &= ac\ (bd + \bar{d} + \bar{b}) + \bar{c} \\
L &= ac\ (\bar{b} + d + \bar{d}) + \bar{c} \\
L &= ac\ (\bar{b} + 1) + \bar{c} \\
L &= ac + \bar{c} \\
&\boxed{L = \bar{c} + a}
\end{aligned}
$$

| Transformation algébrique | Théorème ou axiome appliqué |
|---|---|
| ❶ | Complémentarité, Absorption |
| ❷ | Élément neutre |
| ❸ | Distributivité |
| ❹ | Inhibition |
| ❺ | Inhibition |
| ❻ | Complémentarité |
| ❼ | Absorption, Élément neutre |
| ❽ | Inhibition |

**Q11** – Indique le nom de l'opérateur issu des formules suivantes :

| Transformation algébrique | Opérateur |
|---|---|
| $xy + \bar{x}.\bar{y} = x \oplus y$ | XOR |
| $\bar{x}y + x.\bar{y} = x\, \overline{\oplus}\, y$ | NXOR |
| $\overline{x.y} = x \uparrow y$ | NAND |
| $\overline{x + y} = x \downarrow y$ | NOR |

**Q12** – Complétez la table de vérité suivante :

| a | b | $x \downarrow y$ | $x \uparrow y$ | $x \oplus y$ | $x\, \overline{\oplus}\, y$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**Q13** – FCD, Simplification et logigramme de la fonction

$f(a, b, c, d) = \sum(0, 1, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15)$

**A -** Donnez la forme canonique disjonctive de la fonction suivante

**B** – Simplifiez par la méthode algébrique la fonction F

**C** – Simplifiez par la Karnaugh la fonction F

**D** – Donnez le logigramme de F (en vous basant sur fa forme simplifiée issue de la méthode Karnaugh)

**A -** Donnez la forme canonique disjonctive de la fonction suivante

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,1,4,5,6,7,10,14,15)$$

$= \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bcd + a\bar{b}c\bar{d} + abc\bar{d} + abcd$

**B** – Simplifiez par la méthode algébrique la fonction F

F(a,b,c,d)=

$= \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bcd + a\bar{b}c\bar{d} + abc\bar{d} + abcd$

$= \bar{a}\bar{b}\bar{c}(\bar{d}+d) + \bar{a}b\bar{c}(\bar{d}+d) + \bar{a}bc(\bar{d}+d) + ac\bar{d}(\bar{b}+b) + abcd$

$= \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}bc + ac\bar{d} + abcd$

$= \bar{a}\bar{c}(\bar{b}+b) + \bar{a}bc + ac(\bar{d}+bd)$

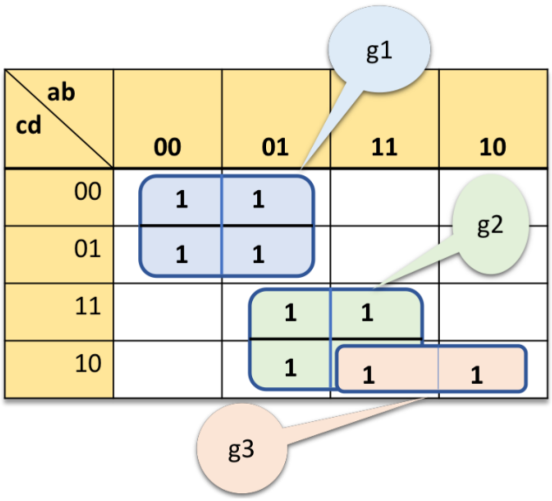
$= \bar{a}\bar{c} + \bar{a}bc + ac(\bar{d}+b)$

$= \bar{a}\bar{c} + \bar{a}bc + ac\bar{d} + abc$

$= \bar{a}\bar{c} + bc(\bar{a}+a) + ac\bar{d}$

$= \bar{a}\bar{c} + bc + ac\bar{d}$

**C** – Simplifiez par la Karnaugh la fonction F

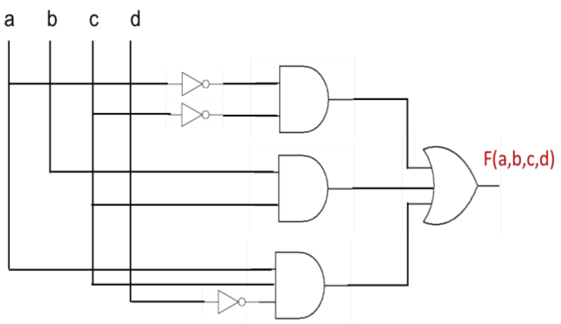



$g1 = \bar{a}\bar{c}$
$g2 = bc$
$g3 = ac\bar{d}$

F(a,b,c,d)= g1 + g2 +g3

$= \bar{a}\bar{c} + bc + ac\bar{d}$

**D** – Donnez le logigramme de F (en vous basant sur la forme simplifiée issue de la méthode Karnaugh)



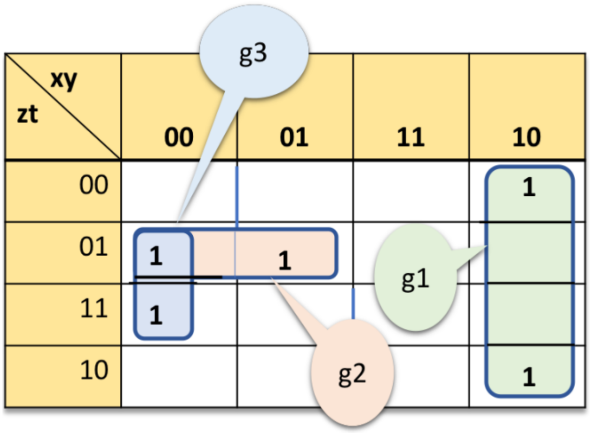

**Q14** –Résolution d'un problème. On souhaite réaliser un circuit logique permettant d'indiquer si un mois comporte moins de 31 jours ou non. Ce circuit doit avoir en entrée le numéro du moi (je rappelle qu'on a 12 mois, le mois de janvier est codé par le numéro 0 et décembre par 11).

A – combien de variables allez-vous utiliser pour coder les mois ? 4 variables

B – donnez la table de vérité de la sortie S (1 si le mois a moins de 31 jours 0 sinon)

| | x | y | z | t | S |
|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Février | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Mars | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Avril | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| Mai | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Juin | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Juillet | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Aout | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Septembre | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Octobre | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Novembre | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Décembre | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

C – Simplifier par la méthode Karnaugh la fonction S




$g1 = x\bar{y}\bar{t}$
$g2 = \bar{x}\bar{z}t$
$g3 = \bar{x}\bar{y}t$

S = g1+ g2 + g3