1.3.2 Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel

Décomposition par blocs de A :

Dans de nombreux cas pratiques, les matrices des systèmes linéaires à résoudre ont une structure "par blocs", et on se sert de cette structure lors de la résolution par une méthode itérative.

Définition 1.27 *Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Une décomposition par blocs de A est définie par un entier $S \leq N$, des entiers $(n_i)_{i=1,\ldots,S}$ tels que $\sum_{i=1}^{S} n_i = N$, et S^2 matrices $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices rectangulaires à n_i lignes et n_j colonnes, telles que les matrices $A_{i,i}$ soient inversibles pour $i = 1, \ldots, S$ et*

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \ldots & & \ldots & A_{1,S} \\ A_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & A_{S-1,S} \\ A_{S,1} & \ldots & & \ldots & A_{S,S-1} & A_{S,S} \end{bmatrix} \tag{1.3.32}$$

Remarque 1.28

1. *Si $S = N$ et $n_i = 1$ $\forall i \in \{1 \ldots n\}$, chaque bloc est constitué d'un seul coefficient.*
2. *Si A est symétrique définie positive, la condition $A_{i,i}$ inversible dans la définition 1.27 est inutile car $A_{i,i}$ est nécessairement symétrique définie positive donc inversible. Prenons par exemple $i = 1$. Soit $y \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \neq 0$ et $x = (y, 0 \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^N$. Alors $A_{1,1}y \cdot y = Ax \cdot x > 0$ donc $A_{1,1}$ est symétrique définie positive.*
3. *Si A est une matrice triangulaire par blocs, c.à.d. de la forme (1.3.32) avec $A_{i,j} = 0$ si $j > i$, alors*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{S} \det(A_{i,i}).$$

Par contre si A est décomposée en 2×2 blocs carrés (i.e. tels que $n_i = m_j$, $\forall (i,j) \in \{1, 2\}$), on a en général : $\det(A) \neq \det(A_{1,1})\det(A_{2,2}) - \det(A_{1,2})\det(A_{2,1})$.

Méthode de Jacobi

On peut remarquer que le choix le plus simple pour la résolution du système $\tilde{M}x = d$ dans la méthode II (voir les objectifs (1.3.30) de la méthode II) est de prendre pour $\tilde{M}$ une matrice diagonale. La méthode de Jacobi consiste à prendre pour $\tilde{M}$ la matrice diagonale D formée par les blocs diagonaux de A :

$$D = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & A_{S,S} \end{bmatrix}.$$

Dans la matrice ci-dessus, 0 désigne un bloc nul.

On a alors $\tilde{N} = E + F$, où E et F sont constitués des blocs triangulaires inférieurs et supérieurs de la matrice A :

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ -A_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ -A_{S,1} & \dots & & \dots & -A_{S,S-1} & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -A_{1,2} & \dots & & \dots & -A_{1,S} \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -A_{S-1,S} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a bien $A = \tilde{M} - \tilde{N}$ et avec D, E et F définies comme ci-dessus, la méthode de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^N \\ Dx^{(n+1)} = (E + F)x^{(n)} + b. \end{cases} \tag{1.3.33}$$

Lorsqu'on écrit la méthode de Jacobi comme une méthode I, on a $B = D^{-1}(E + F)$; on notera J cette matrice.

En introduisant la décomposition par blocs de x, solution recherchée de (1.1.1), c.à.d. : $x = [x_1, \dots, x_S]^t$, où $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, on peut aussi écrire la méthode de Jacobi sous la forme :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^N \\ A_{i,i}x_i^{(n+1)} = -\displaystyle\sum_{j<i} A_{i,j}x_j^{(n)} - \sum_{j>i} A_{i,j}x_j^{(n)} + b_i \;\; i = 1, \dots, S. \end{cases} \tag{1.3.34}$$

Méthode de Gauss-Seidel

L'idée de la méthode de Gauss-Seidel est d'utiliser le calcul des composantes de l'itéré $(n + 1)$ dès qu'il est effectué. Par exemple, pour calculer la deuxième composante $x_2^{(n+1)}$ du vecteur $x^{(n+1)}$, on pourrait employer la “nouvelle” valeur $x_1^{(n+1)}$ qu'on vient de calculer plutôt que la valeur $x_1^{(n)}$ comme dans (1.3.34) ; de même, dans le calcul de $x_3^{(n+1)}$, on pourrait employer les “nouvelles” valeurs $x_1^{(n+1)}$ et $x_2^{(n+1)}$ plutôt que les valeurs $x_1^{(n)}$ et $x_2^{(n)}$. Cette idée nous suggère de remplacer dans (1.3.34) $x_j^{(n)}$ par $x_j^{(n+1)}$ si $j < i$. On obtient donc l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{(0)} \in \mathbb{R}^N \\ A_{i,i} x_i^{(n+1)} = - \sum_{j<i} A_{i,j} x_j^{(n+1)} - \sum_{i<j} A_{i,j} x_j^{(n)} + b_i, \quad i = 1, \ldots, s. \end{array} \right. \tag{1.3.35}$$

La méthode de Gauss–Seidel est donc la méthode II avec $\tilde{M} = D - E$ et $\tilde{N} = F$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^N \\ (D-E) x^{(n+1)} = F x^{(n)} + b. \end{array} \right. \tag{1.3.36}$$

Lorsqu'on écrit la méthode de Gauss–Seidel comme une méthode I, on a $B = (D-E)^{-1} F$; on notera $\mathcal{L}_1$ cette matrice, dite matrice de Gauss-Seidel.