CORRIGE SERIE N° 01
GENERALITES SUR LES VIBRATIONS

Exercice 01

1- L'amplitude maximale est **5 cm**.

2- La pulsation propre est ω_0 **= 25 rad.s^{-1}**, la fréquence f **= 3.98 Hz** et la période propre T_0 **= 0.25 s.**

3- La phase initiale φ **= π/3 rad.**

4- Le déplacement, la vitesse et l'accélération à t=0 s:

$$x(0) = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5\,m$$

$$\dot{x}(0) = -125\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -108.25\,m/s$$

$$\ddot{x}(0) = -3125\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1562.5\,m/s^2$$

A t=0.5 s,

$$x(0.5) = 5\cos\left(12.5+\frac{\pi}{3}\right) = 1.5\,m$$

$$\dot{x}(0.5) = -125\sin\left(12.5+\frac{\pi}{3}\right) = -119.2\,m/s$$

$$\ddot{x}(0.5) = -3125\cos\left(12.5+\frac{\pi}{3}\right) = -939.7\,m/s^2$$

5- l'expression de la vitesse et de l'accélération dans la représentation complexe :

$$x(t) = 5\cos\left(25t+\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \underline{x}(t) = 5e^{j(25t+\frac{\pi}{3})}$$

Donc,

$$\underline{\dot{x}}(t) = 125je^{j\left(25t+\frac{\pi}{3}\right)} \quad (1)$$

et $\underline{\ddot{x}}(t) = -3125e^{j(25t+\frac{\pi}{3})}$

EXERCICE 02 : SUPERPOSITION DES OSCILLATIONS

$$g_1(t) = \sqrt{2}\cos(3t-\frac{\pi}{4})$$

$$g_2(t) = \sin(3t-\frac{\pi}{4}) = \cos(3t-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}) = \cos(3t-\frac{3\pi}{4})$$

---

[1] L'expression peut être réécrite comme suit : $\dot{x}(t) = 125je^{j\left(25t+\frac{\pi}{3}\right)} = 125\,e^{j\frac{\pi}{2}}\,e^{j\left(25t+\frac{\pi}{3}\right)} = 125\,e^{j\left(25t+\frac{5\pi}{6}\right)}$

1- Méthode trigonométrique

Sachant d'une part que $tg\varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$ (voir le cours), on déduit que

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{2}\sin\frac{-\pi}{4} + \sin\frac{-3\pi}{4}}{\sqrt{2}\cos\frac{-\pi}{4} + \cos\frac{-3\pi}{4}} = \frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \varphi = -80.26° = -1.4\,rad$$

D'autre part, sachant que $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ (voir le cours), on déduit que

$$A^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 2\sqrt{2}\ 1\cos\left(-\frac{\pi}{4} - (-\frac{3\pi}{4})\right) = 3 \implies A = \sqrt{3}$$

Finalement, l'expression de g(t) s'écrit comme suit :

$$g(t) = \sqrt{3}\cos(3t - 80.26)$$

2- Méthode de la représentation complexe :

Passant à la représentation complexe

$g_1(t) = \sqrt{2}\cos(3t - \frac{\pi}{4}) \Longrightarrow \underline{g_1}(t) = \sqrt{2}e^{j(3t-\frac{\pi}{4})}$

$g_2(\mathrm{t}) = \cos(3t - \frac{3\pi}{4}) \Longrightarrow \underline{g_2}(t) = e^{j(3t-\frac{3\pi}{4})}$

En sommant

$$g(t) = \underline{g_1}(t) + \underline{g_2}(\mathrm{t}) = \sqrt{2}e^{j\left(3t-\frac{\pi}{4}\right)} + e^{j\left(3t-\frac{3\pi}{4}\right)} = e^{j3t}\left(\sqrt{2}e^{j-\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{4}}\right)$$

L'amplitude complexe est définie comme suit

$$\underline{A} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + j\,sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + j\,sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

D'où,

$$\underline{A} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - j\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Le module de l'amplitude est donc

$$|\underline{A}| = \sqrt{\underline{A}.\underline{A}^*} = \sqrt{3}$$

Le déphasage est donné par l'expression (voir le cours)

$$tg(\varphi) = Arg(\underline{A}) = \frac{Im(\underline{A})}{Re(\underline{A})}$$

Ce qui donne

$$tg(\varphi) = \frac{-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow \varphi = -80.26° = -1.4\,rad$$

On déduit la même expression de g(t) qu'avec la méthode trigonométrique

$$g(t) = \sqrt{3}\cos(3t - 80.26)$$

Exercice 3

1. Utilisons la représentation complexe suivante:

$$i(t) = I_0\cos\omega t \longrightarrow \underline{i}(t) = I_0 e^{j\omega t},$$
$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t+\phi_1) \longrightarrow \underline{i}_1(t) = I_1 e^{j(\omega t+\phi_1)} = \underline{I}_1 e^{j\omega t},$$
$$i_2(t) = I_2\cos(\omega t+\phi_2) \longrightarrow \underline{i}_2(t) = I_2 e^{j(\omega t+\phi_2)} = \underline{I}_2 e^{j\omega t}.$$

Nous avons: $\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}_C \\ \underline{u} = \underline{u}_L + \underline{u}_R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{u} = \dfrac{1}{\mathrm{C}}\displaystyle\int \underline{i}_1 \mathrm{dt} = \dfrac{1}{j\mathrm{C}\omega}\underline{i}_1 \\ \underline{u} = \mathrm{L}\dfrac{\mathrm{d}\underline{i}_2}{\mathrm{dt}} + \mathrm{R}\underline{i}_2 = (j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R})\,\underline{i}_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \underline{i}_1 = j\mathrm{C}\omega\underline{u} \\ \underline{i}_2 = \dfrac{\underline{u}}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}} \end{cases}$

2. L'impédance complexe du circuit est donc

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}_1+\underline{i}_2} = \frac{\underline{u}}{j\mathrm{C}\omega\underline{u} + \dfrac{\underline{u}}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}}} = \frac{1}{j\mathrm{C}\omega + \dfrac{1}{j\mathrm{L}\omega + \mathrm{R}}} = \frac{\mathrm{R} + j\mathrm{L}\omega}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j\mathrm{RC}\omega}.$$

Son module est $|\underline{Z}| = \dfrac{\sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{L}^2\omega^2}}{\sqrt{(1-\mathrm{LC}\omega^2)^2 + \mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}}$.

• **Deuxième méthode de calcul de l'impédance**: Directement en remarquant les différents branchements:

$$\underline{Z}_C//(\underline{Z}_L + \underline{Z}_R) \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_C\cdot(\underline{Z}_L+\underline{Z}_R)}{\underline{Z}_C+(\underline{Z}_L+\underline{Z}_R)} = \frac{\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}\cdot(j\mathrm{L}\omega+\mathrm{R})}{\frac{1}{j\mathrm{C}\omega}+(j\mathrm{L}\omega+\mathrm{R})} = \frac{\mathrm{R}+j\mathrm{L}\omega}{1-\mathrm{LC}\omega^2+j\mathrm{RC}\omega}.$$

3. Pour que $|\underline{Z}|$ soit indépendant de R il faut que $\frac{\partial|\underline{Z}|}{\partial \mathrm{R}} = 0$

$$\Longrightarrow \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{L}^2\omega^2}\sqrt{(1-\mathrm{LC}\omega^2)^2+\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}} - \frac{\mathrm{RC}^2\omega^2\sqrt{\mathrm{R}^2+\mathrm{L}^2\omega^2}}{\left[(1-\mathrm{LC}\omega^2)^2+\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2\right]^{3/2}} = 0 \Longrightarrow \boxed{\mathrm{LC}\omega^2 = \tfrac{1}{2}.}$$

4. $\underline{Z} = \dfrac{\mathrm{R} + j\mathrm{L}\omega}{1 - \mathrm{LC}\omega^2 + j\mathrm{RC}\omega} = \dfrac{(\mathrm{R} + j\mathrm{L}\omega)\left[1 - \mathrm{LC}\omega^2 - j\mathrm{RC}\omega\right]}{(1-\mathrm{LC}\omega^2)^2 + \mathrm{R}^2\mathrm{C}^2\omega^2}$. Pour que $\underline{Z}$ soit réelle il faut que

$\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0 \Longrightarrow (1-\mathrm{LC}\omega^2)\mathrm{L} - \mathrm{R}^2\mathrm{C} = 0$. Puisque $\omega^2 = \dfrac{1}{2\mathrm{LC}}$, on trouve $\mathrm{R} = \sqrt{\dfrac{\mathrm{L}}{2\mathrm{C}}}$.