Corrigé de l'interrogation d'analyse 1

(1) Étudier la fonction :

$$f(x) = \ln(x^2+1) - \ln x - 1$$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\} =]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1 \quad (-1 \notin D_f)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in]1, +\infty[\longrightarrow$ f est croissante

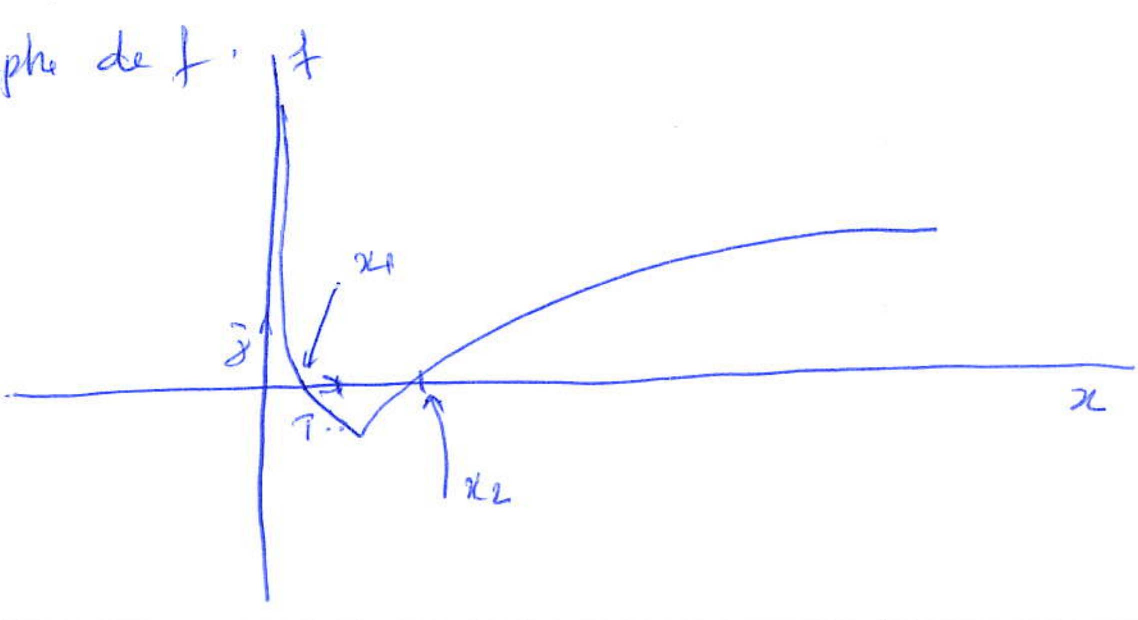
$f'(x) < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \Rightarrow x \in]0, 1[\longrightarrow$ f est décroissante.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) - 1 = +\infty$$

	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = \ln 2 - 1 = -0{,}30$

Le graphe de f :



② L'intersection avec l'axe de x :

$y = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

$\Rightarrow \ln(x^2+1) - \ln x - 1 = 0$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = e$.

$\Rightarrow x^2 - ex + 1 = 0$

$\Delta = e^2 - 4 > 0 \Rightarrow$

$x_1 = \frac{e - \sqrt{e^2-4}}{2}$; $x_2 = \frac{e + \sqrt{e^2-4}}{2}$

③ Montrons que $\ln(x^2+1) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

On pose $g(x) = \ln(x^2+1) - x + \frac{x^2}{2}$.

$\Rightarrow$

$g'(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

le point critique :

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$g''(x) = \frac{x^2+2x}{x^2+2x+1} \geq 0$

Donc $(0, g(0)) = (0,0)$ est un minimum de g.

D'où : $g(x) \geq g(0) \geq 0$

$\Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$

$\Rightarrow \ln(x+1) \geq x - \frac{x^2}{2}$ (C.Q.F.D).

4) Montrer que :

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

On pose $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$.

alors : $f'(x) = e^x - x - 1$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \ln(x+1) \dots (1)$

d'autres part : $\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$$f''(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad \forall x > 0$$

Donc $(0, f(0)) = (0, 0)$ ~~est~~ un minimum de f.

Donc :

$\forall x > 0$: $f(x) > 0 \Rightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} > 0$

$\Rightarrow \quad e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ (C.Q.F.D)