Université A/Mira de Bejaia
Département de Recherche opérationnelle
L2 MA

Bejaia 2020/2021

Examen D'Analyse 3

Exercice 1. (5pts)
Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n>0} \frac{n^2+1}{2n^2+n}, \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n}, \quad \sum_{n>1} \frac{1}{n^{\frac{5}{3}} \ln(n)}.$$

Exercice 2. (07.5pts)
Montrer que les séries numériques suivantes sont convergentes puis calculer leur somme.

$$1) \sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{(\frac{7}{2})^n}, \quad 2) \sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 3. (07.5pts)
On pose pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$,

$$f_n(x) = nx^n \ln x \text{ et } f_n(0) = 0.$$

1. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera.
2. On note $g = f - f_n$. Étudier les varatiations de la fonction g.
3. En déduire que la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in [0,1[$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{\frac{-1}{n}} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, montrer que la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

$* * \bigstar * *$ **Bon Courage Bon Courage** $* * \bigstar * *$