Posons $X_n = {}^t(u_n, v_n, w_n)$, alors $X_0 = {}^t(1,0,0)$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Le système s'écrit alors $X_{n+1} = AX_n$, d'où, par récurrence, $X_n = A^n X_0$. On est ainsi ramené au calcul de A^n.

4.4. Systèmes différentiels à coefficients constants

On veut résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \quad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{R}$ et $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables. On pose $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$, alors le système s'écrit sous forme matricielle

$$\frac{dX}{dt} = AX.$$

Supposons A diagonalisable. Il existe alors une matrice D diagonale et une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$. Si on pose $X' = P^{-1}X$, le système devient $\dfrac{dX'}{dt} = DX$, système qui s'intégre facilement car D est diagonale.

5. Trigonalisation

Définition 15 – Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{(resp. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \text{)}$$

Remarque - Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure. En effet, soit A une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ représenté par A dans la base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$. f est représenté par une matrice triangulaire inférieure dans la base $(e_n, \ldots, e_1)$.

Théorème 16 – Un endomorphisme est triangularisable dans $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}$.

Démonstration : si l'endomorphisme f est triangularisable, alors il existe une base telle que la matrice de f dans cette base soit triangulaire supérieure. On a alors

$$P_f(\lambda) = Dét \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & & a_{1n} \\ 0 & \ddots & a_{2n} \\ \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$$