ANALOGIE ENTRE LES SYSTEMES MECANIQUES ET ELECTRIQUES

L'analogie électromécanique nous permet de généraliser les résultats obtenus en mécanique aux oscillations observées en électricité.

Le tableau ci-dessous résume l'analogie entre les systèmes mécaniques (translation et rotation) et les circuits électriques :

Système mécanique				**Circuit électrique**	
Translation		**Rotation**			
Masse	M	Moment d'inertie	I	Inductance	L
Constante de raideur	K	Constante de torsion	C	Capacité	C
Coefficient d'amortissement	α	Frottement	α	Résistance	R
Déplacement	x	Angle	θ	Charge	q
Vitesse	v	Vitesse angulaire	$\dot{\theta}$	Courant	i
Force	F(t)	Moment de force	M(t)	Tension	E(t)
Pulsation propre	$\sqrt{k/m}$	pulsation	$\sqrt{C/I}$	pulsation	$1/\sqrt{LC}$
Energie cinétique	$\frac{1}{2}mv^2$	Energie cinétique	$\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$	Energie magnétique (Bobine)	$\frac{1}{2}Li^2$
Energie potentiel	$\frac{1}{2}kx^2$	Energie potentiel	$\frac{1}{2}C\theta^2$	Energie électrostatique (Condensateur)	$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$
Puissance dissipée par frottement	αv^2	Puissance dissipée par frottement	$\alpha\dot{\theta}^2$	Puissance dissipée par effet Joule	Ri^2

IMPEDANCE :

L'impédance d'un élément électrique, soumis à une tension $E(t) = E_0 \cos \omega t$ et traversé par un courant $i(t) = i_0 \cos \omega t$, est définie par la relation : $\underline{Z_e} = \frac{\underline{E}}{\underline{i}}$

On considère un système mécanique soumis à une force $F(t) = F_0 \cos \omega t$. En régime permanant, le point d'application de cette force se déplace à une vitesse

$v(t) = v_0 cos(\omega t + \varphi)$. On appelle impédance mécanique le rapport des amplitudes complexes de la force et de la vitesse : $\underline{Z} = \underline{F}/\underline{\dot{x}}$

L'impédance mécanique est utilisée lorsqu'il s'agit d'analyser un système mécanique vibrant couplé à un système électrique (haut-parleur, transducteur piézoélectrique, ..).

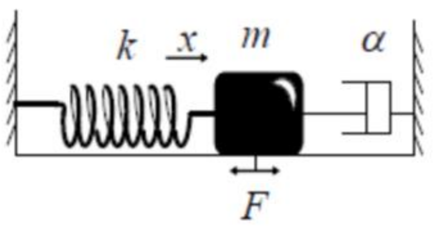
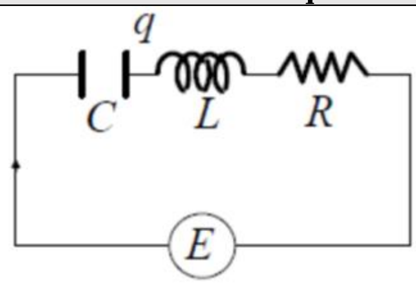
Notons que

$$\underline{v}(t) = \underline{A}e^{j\omega t} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\dot{v}}(t) = j\omega\underline{A}e^{j\omega t} = j\omega\underline{v}(t) \\ \int \underline{v}dt = \frac{1}{j\omega}\underline{v}(t) \end{cases}$$

$$\underline{i}(t) = \underline{i}_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \begin{cases} \int \underline{i}(t)\, dt = \frac{1}{j\omega}\underline{i}(t) \\ \frac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega\underline{i}(t) \end{cases}$$

Eléments	Relation instantanée	Relation complexe	Impédance
Résistance (R)	$U_R = Ri$	$\underline{U_R} = R\,\underline{i}$	$\underline{Z_R} = \frac{\underline{U_R}}{\underline{i}} = R$
Inductance (L)	$U_L = L\frac{di(t)}{dt}$	$\underline{U_L} = jL\omega\,\underline{i}$	$\underline{Z_L} = jL\omega\,\underline{i} = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$
Capacité (C)	$U_C = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$	$\underline{U_C} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$	$\underline{Z_C} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{C\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$
Amortisseur (α)	$F_R = \alpha\dot{x}$	$\underline{F} = \alpha\underline{\dot{x}}$	$\underline{Z_\alpha} = \frac{\underline{F}}{\underline{\dot{x}}} = \alpha$
Masse (M)	$F = m\frac{d\dot{x}(t)}{dt}$	$\underline{F} = jm\omega\underline{\dot{x}}$	$\underline{Z_m} = jm\omega = m\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$
Ressort (k)	$F = kx$	$\underline{F} = k\underline{x}$ $= k\int \dot{x}dt = \frac{k}{j\omega}\underline{\dot{x}}$	$\underline{Z_k} = \frac{k}{j\omega} = -j\frac{k}{\omega}$ $= \frac{k}{\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}}$

EXEMPLES :

Système mécanique	Circuit électrique
	
Oscillation libre non amortie	
$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $\omega_0^2 = {}^{k}/_{m} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{{}^{k}/_{m}}$ $\boldsymbol{x(t) = x_m cos(\omega_0 t + \varphi)}$	$\ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ $\omega_0^2 = {}^{1}/_{LC} \Longrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ $\boldsymbol{q(t) = Q_m cos(\omega_0 t + \varphi)}$
Oscillation libre amortie	
$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ $\frac{dE}{dt} = -\alpha v^2 < 0$	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ $2\lambda = \frac{R}{L}$ $\frac{dE}{dt} = -Ri^2 < 0$

Oscillation Forcée	
Force d’excitation $F(t) = F_0 \cos \Omega t$	Tension d’excitation $E(t) = E_0 \cos \Omega t$
PFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} + \vec{F} = m\vec{a}$	Loi des mails
Projection sur (xx') : $f + T + F = ma$	$U_R + U_L + U_C = E(t)$
$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$	$Ri + L\,\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = E$
Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$	Sachant que $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}, \frac{di}{dt} = \ddot{q}$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{x}}\right) - \frac{\delta L}{\delta t} = -f + F(t)$	
$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t$	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{E_0}{L}\cos \Omega t$
Solution de l’équation :	Solution de l’équation :
$\boldsymbol{x(t) = x_m cos(\Omega t + \varphi)}$	$\boldsymbol{q(t) = q_m cos(\Omega t + \varphi)}$
$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos\left(\Omega t + arctg\,\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)$	$x(t) = \frac{E_0/L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\cos\left(\Omega t + arctg\,\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \lambda^2}\right)$
Pulsation d’excitation :	Pulsation d’excitation :
$\Omega_R = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q}}$	$\Omega_R = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q}}$
Le facteur de qualité $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$	Le facteur de qualité $Q = \frac{L\omega_0}{R}$
Impédance mécanique :	Impédance électrique :
$f + T + F = ma$	
$\Longrightarrow\ -k\underline{x} - \alpha\underline{\dot{x}} + \underline{F} = m\frac{dv}{dt}$	$R\underline{i} + L\,\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{1}{C}\int \underline{i}dt = \underline{E}$
$\underline{F} = \frac{k}{j\omega}\underline{v} + jm\omega\underline{v} + \alpha\underline{v}$	$R\underline{i} + jL\omega\underline{i} + \frac{1}{jC\omega}\underline{i} = \underline{E}$
$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}}{\underline{v}} = \alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}$	$\underline{Z}_e = \frac{\underline{E}}{\underline{i}} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$
$Z = \sqrt{\alpha^2 + \left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2}$	$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$

Dr. Ilhem BEKLI