Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2021-2022
MATHS 1 Novembre 2021

Corrigé de la série de T.D. N 1 : Logique et raisonnement mathématiques

Exercice n° 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donnons leurs négations

(a) Comme la proposition $(\sqrt{16} = -4)$ est fausse, donc la proposition

$$[((-4)^2 = 16) \wedge (\sqrt{16} = -4)]$$

est aussi fausse.

La négation :

$$\overline{[(-4)^2 = 16] \wedge (\sqrt{16} = -4)]} \iff [(-4)^2 \neq 16] \vee (\sqrt{16} \neq -4)].$$

(b) Comme la proposition $(\sqrt{16} = 4)$ est vraie, donc la proposition

$$[(|-4| = -4) \vee (\sqrt{16} = 4)]$$

est aussi vraie.

La négation :

$$\overline{[(|-4| = -4) \vee (\sqrt{16} = 4)]} \iff [|-4| \neq -4] \wedge (\sqrt{16} \neq 4)].$$

(c) La proposition $[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x^3 = -1]$ est vraie car il existe $x = -1 \in \mathbb{R}$ tel que $(-1)^3 = -1$.

La négation :

$$\overline{[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad x^3 = -1]} \iff [\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad x^3 \neq -1].$$

(d) ***La négation :***

$$\overline{[\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) = 0]} \iff [\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) \neq 0].$$

Pour $x = 0$ par exemple, on a

$$(x-1)(x+3) = (0-1)(0+3) = -3 \neq 0,$$

Donc la proposition $[\exists\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) \neq 0]$ est vraie. Par suite

$$[\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad (x-1)(x+1) = 0]$$

est une proposition fausse.

(e) La proposition $[\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0]$ est vraie. En effet, Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $x = -y + 1 \in \mathbb{R}$. Donc

$$x + y = -y + 1 + y = 1 \geq 0.$$

La négation de (e) :

$$\overline{[\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0]} \iff [\exists y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0].$$

(f) La proposition $[\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0]$ est fausse. Il suffit de montrer que sa négation est vraie :

$$\overline{[\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0]} \iff [\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y \leq 0].$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $y = -x - 1 \in \mathbb{R}$. Donc $x + y = x - x - 1 = -1 \leq 0$. Par suite, la négation de (f) est vraie. Autrement dit, (f) est fausse.

Exercice n° 2. Soient P et Q deux propositions.

1. En utilisant la table de vérité, montrons que :

   (a)
$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}).$$

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

   On remarque de cette table de vérité que les propositions $(P \Longrightarrow Q)$ et $(\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P})$ ont la même valeur de vérité (elles sont vraies en même temps et elles sont fausses en même temps), donc elles sont équivalentes.

   (b)
$$(\overline{P \Rightarrow Q}) \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q}).$$

P	Q	$\overline{Q}$	$P \Longrightarrow Q$	$\overline{P \Longrightarrow Q}$	$P \wedge \overline{Q}$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

   On remarque de cette table de vérité que les propositions $(\overline{P \Longrightarrow Q})$ et $(P \wedge \overline{Q})$ ont la même valeur de vérité (elles sont vraies en même temps et elles sont fausses en même temps), donc elles sont équivalentes.

2. Soit la proposition
$$R : \text{"}\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}\text{"}.$$

   (a) La négation de la proposition R est
$$\overline{R} : \text{"}\exists x \in \mathbb{R},\ [(x^2 \in \mathbb{Q}) \wedge (x \notin \mathbb{Q})]\text{"}.$$

   (b) Montrons que la proposition R est fausse. Pour $x = \sqrt{2}$, on a
$$[x \notin \mathbb{Q} \ \text{ et } \ (x^2 = 2) \in \mathbb{Q}].$$

   Donc $\overline{R}$ est vraie. Par suite, R est fausse.

Exercice n° 3.

1. Soient $a, b \geq 0$. En utilisant le raisonnement direct, montrons que
$$\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \Longrightarrow a = b.$$

   On suppose que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et on montre que $a = b$. On a
$$\begin{aligned}
\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \quad &\Longrightarrow \quad a(1+a) = b(1+b) \\
&\Longrightarrow \quad a + a^2 = b + b^2 \\
&\Longrightarrow \quad a^2 - b^2 + a - b = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (a-b)(a+b) + (a-b) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (a-b)(a+b+1) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (a-b=0) \vee (a+b+1=0) \\
&\Longrightarrow \quad a - b = 0 \text{ (car } a+b+1 \neq 0 \text{ du fait que } a, b \geq 0\text{)} \\
&\Longrightarrow \quad a = b.
\end{aligned}$$

2. Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$. Montrons par contraposition que

$$[(x \neq 1) \wedge (y \neq 1)] \Longrightarrow x + y \neq xy + 1.$$

Il s'agit de montrer que

$$x + y = xy + 1 \Longrightarrow [(x = 1) \vee (y = 1)].$$

On a

$$\begin{array}{rcl} x + y = xy + 1 & \Longrightarrow & x + y - xy - 1 = 0 \\ & \Longrightarrow & x(1-y) - (1-y) = 0 \\ & \Longrightarrow & (x-1)(1-y) = 0 \\ & \Longrightarrow & (x - 1 = 0) \vee (y - 1 = 0) \\ & \Longrightarrow & (x = 1) \vee (y = 1). \end{array}$$

3. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrons par l'absurde que

$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

On suppose que

$$(x \neq y) \wedge (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$$

On a

$$\begin{array}{rcl} (x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) & \Longrightarrow & xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \\ & \Longrightarrow & -2x + 2y = 0 \\ & \Longrightarrow & 2(y - x) = 0 \\ & \Longrightarrow & y - x = 0 \\ & \Longrightarrow & y = x \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \neq y). \end{array}$$

Par suite, on a pour $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \neq y) \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1).$$

4. Montrons par l'absurde que la proposition

$$\mathcal{P}: \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$$

est vraie. On suppose que

$$\exists x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} & \Longrightarrow & 1 + x^2 = 1 + \frac{x^4}{4} + x^2 \\ & \Longrightarrow & \frac{x^4}{4} = 0 \\ & \Longrightarrow & x = 0 \text{ (ce qui est une contradiction, car } x \in \mathbb{R}^*). \end{array}$$

Donc $\bar{\mathcal{P}}$ est fausse. Par suite, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \sqrt{1+x^2} \neq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Exercice n° 4. 1. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{P(n)}.$$

Pour $n=1$, on a
$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1 \text{ et } \frac{1\left(1+1\right)\left(2\times 1+1\right)}{6} = 1.$$
Donc
$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = \frac{1\left(1+1\right)\left(2\times 1+1\right)}{6}.$$
Autrement dit, $P\left(1\right)$ est vraie.
Soit $n \geq 1$. On suppose que $P\left(n\right)$ est vraie, c'est à dire
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
et on montre que $P\left(n+1\right)$ est vraie, c'est à dire
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$
On a
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P\left(n\right)$ est vraie.

2. Démontrons, en raisonnant par récurrence, que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 3 \text{ divise } \left(4^n - 1\right).$$
Il s'agit de montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z} : 4^n - 1 = 3k}_{P(n)}.$$
Pour $n=0$, on a
$$4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3 \times 0,$$
Donc
$$\exists k = 0 \in \mathbb{Z} : 4^0 - 1 = 3k.$$
Autrement dit, $P(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P\left(n\right)$ est vraie, c'est à dire
$$\exists k \in \mathbb{Z} : 4^n - 1 = 3k$$

et on montre que $P\left(n+1\right)$ est vraie, c'est à dire

$$\exists k' \in \mathbb{Z} : 4^{n+1} - 1 = 3k'.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} 4^{n+1} - 1 & = & 4^{n+1} - 4 + 3 \\ & = & 4.4^{n} - 4 + 3 \\ & = & 4(4^{n} - 1) + 3 \\ & = & (4 \times 3k) + 3 \\ & = & 3k' \text{ avec } k' = (4k+1) \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ 3$ divise $4^{n} - 1$.