Université A/ MIRA de Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie 1ère année

Année universitaire 2021-2022
MATHS 1 Janvier 2022

Corrigé de la série de T.D. N 2 : Ensembles, relations et applications

Exercice n° 1. Dans chacun des cas ci-dessous, déterminons les sous-ensembles

$$A \cap B,\ A \cup B,\ A - B,\ B - A,\ C_E^A,\ C_E^B,\ A\Delta B.$$

1. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ A = \{1, 2, 3\},\ B = \{1, 5\}.$

$$A \cap B = \{1\},\ A \cup B = \{1, 2, 3, 5\},\ A - B = \{2, 3\},\ B - A = \{5\}.$$

$$C_E^A = \{4, 5\},\ C_E^B = \{2, 3, 4\},\ A\Delta B = \{2, 3, 5\}.$$

2. $E = \mathbb{R},\ A = [2, 4],\ B =]3, 5].$

$$A \cap B =]3, 4],\ A \cup B = [2, 5],\ A - B = [2, 3],\ B - A =]4, 5].$$

$$C_E^A =]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[,\ C_E^B =]-\infty, 3]\cup]5, +\infty[,\ A\Delta B = [2, 3]\cup]4, 5].$$

Exercice n° 2. Soient E un ensemble et $A,\ B$ et C trois parties de E.

1. Montrons que
   a) $C_E^{(A\cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$. On a

$$\begin{array}{rcl} C_E^{(A\cap B)} & = & \{x : (x \in E) \text{ et } [x \notin (A \cap B)]\} \\ & = & \{x : (x \in E) \text{ et } [(x \notin A) \text{ ou } (x \notin B)]\} \\ & = & \{x : [(x \in E) \text{ et } (x \notin A)] \text{ ou } [(x \in E) \text{ et } (x \notin B)]\} \\ & = & \left\{x : [x \in C_E^A] \text{ ou } [x \in C_E^B]\right\} \\ & = & C_E^A \cup C_E^B. \end{array}$$

   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. On a

$$\begin{array}{rcl} A \cup (B \cap C) & = & \{x : (x \in A) \text{ ou } [x \in (B \cap C)]\} \\ & = & \{x : (x \in A) \text{ ou } [(x \in B) \text{ et } (x \in C)]\} \\ & = & \{x : [(x \in A) \text{ ou } (x \in B)] \text{ et } [(x \in A) \text{ ou } (x \in C)]\} \\ & = & \{x : [x \in (A \cup B)] \text{ et } [x \in (A \cup C)]\} \\ & = & (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{array}$$

2. Simplifions $(\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \overline{A}})$, où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans E. On a

$$\begin{array}{rcl} (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C \cup \overline{A}}) & = & (\overline{A \cup B}) \cap (\overline{C} \cap A) \\ & = & (\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{C} \cap A) \\ & = & (\overline{A} \cap A) \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ & = & \emptyset \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) \\ & = & \emptyset. \end{array}$$

Exercice n° 3. 1. Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ comme suit :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k.$$

(a) Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

i. Réflexivité de $\mathcal{R}$: Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a

$$x - x = 0 = 3 \times 0.$$

Par conséquent

$$\exists\, k = 0 \in \mathbb{Z} : x - x = 3k.$$

D'où $x\mathcal{R}x$ et donc $\mathcal{R}$ est réflexive.

ii. Symétrie de $\mathcal{R}$: Soient $x, y \in \mathbb{Z} : x\mathcal{R}y$. On a

$$\begin{array}{rcl} x\mathcal{R}y & \Rightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k \\ & \Rightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z} : y - x = -3k \\ & \Rightarrow & \exists\, k \in \mathbb{Z} : y - x = 3(-k) \\ & \Rightarrow & \exists\, k' = (-k) \in \mathbb{Z} : y - x = 3k' \\ & \Rightarrow & y\mathcal{R}x. \end{array}$$

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

iii. Transitivité de $\mathcal{R}$: Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Montrons que $x\mathcal{R}z$.

$$x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - y = 3k........(1) \\ et \\ \exists\, k' \in \mathbb{Z} : y - z = 3k'........(2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} (1) \text{ et } (2) & \Rightarrow & \exists\, k, k' \in \mathbb{Z} : x - z = 3(k + k') \\ & \Rightarrow & \exists\, k'' = (k + k') \in \mathbb{Z} : x - z = 3k'' \\ & \Rightarrow & x\mathcal{R}z. \end{array}$$

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, de i), ii) et iii), $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{rcl} \overline{a} & = & \{x \in \mathbb{Z} /\ x\mathcal{R}a\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z} /\ \exists\, k \in \mathbb{Z} : x - a = 3k\} \\ & = & \{x \in \mathbb{Z} /\ \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = 3k + a\} \\ & = & \{3k + a /\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{array}$$

(c) L'ensemble quotient :

$a = 0$, $\overline{0} = \{3k/k \in \mathbb{Z}\} = \{.... -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

$a = 1$, $\overline{1} = \{3k + 1/k \in \mathbb{Z}\} = \{.... -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

$a = 2$, $\overline{2} = \{3k + 2/k \in \mathbb{Z}\} = \{.... -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

$a = 3$, $\overline{3} = \{3k + 3/k \in \mathbb{Z}\} = \{3\,(k + 1)\,/k \in \mathbb{Z}\} = \{3k'/k' \in \mathbb{Z}\} = \overline{0}$.

$a = -1$, $\overline{-1} = \{3k - 1/k \in \mathbb{Z}\} = \{3\,(k - 1) + 2/k \in \mathbb{Z}\} = \{3k' + 2/k' \in \mathbb{Z}\} = \overline{2}$.

$a = -2$, $\overline{-2} = \overline{1}$.

D'où $\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\right\}$.

(d) On a $2022 = 3(674)$, donc $2022 \in \overline{0}$.

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation binaire $\mathcal{S}$ par :

$$\forall\, (a, b)\,, (c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad (a, b)\,\mathcal{S}\,(c, d) \Longleftrightarrow a \leq c \text{ et } b \leq d.$$

(a) Montrons que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre

i. Réflexivité de $\mathcal{S}$: Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a $a\leq a$ et $b\leq b$,

donc $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\quad (a,b)\mathcal{S}(a,b)$, d'où la réflexivité de $\mathcal{S}$.

ii. Antisymétrie de $\mathcal{S}$: Soient $(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\mathcal{S}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{S}(a,b)$, on a

$$\begin{array}{rcl}(a,b)\mathcal{S}(c,d) \text{ et } (c,d)\mathcal{S}(a,b) & \Rightarrow & [a\leq c \text{ et } b\leq d] \text{ et } [c\leq a \text{ et } d\leq b]\\ & \Rightarrow & [a\leq c \text{ et } c\leq a] \text{ et } [b\leq d \text{ et } d\leq b]\\ & \Rightarrow & a=c \text{ et } b=d\\ & \Rightarrow & (a,b)=(c,d).\end{array}$$

D'où l'antisymétrie de $\mathcal{S}$.

iii. Transitivité de $\mathcal{S}$: Soient $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$ tels que $(a,b)\mathcal{S}(c,d)$ et $(c,d)\mathcal{S}(e,f)$, on a

$$(a,b)\mathcal{S}(c,d)\ et\ (c,d)\mathcal{S}(e,f)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a\leq c \text{ et } b\leq d........(1)\\ et\\ c\leq e \text{ et } d\leq f........(2)\end{array}\right.$$

De (1) et (2), on obtient

$$a\leq e \text{ et } b\leq f,$$

c'est à dire que $(a,b)\mathcal{S}(e,f)$.

D'où la transitivité de $\mathcal{S}$.

De i), ii) et iii), on a $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.

(b) L'ordre $\mathcal{S}$ n'est pas total (il est partiel) : En effet, les deux couples $(1,10)$ et $(2,9)$ ne sont pas comparables. On a

$$10\nleq 9\Longrightarrow(1,10)\ \not{\mathcal{S}}(2,9)$$

et

$$2\nleq 1\Longrightarrow(2,9)\ \not{\mathcal{S}}(1,10).$$

Exercice n° 4.

Considérons l'application f définie par :

$$\begin{array}{rccl}f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ & x & \longmapsto & f(x)=x^2+3x-4.\end{array}$$

1. Calculons $f(\{-4,1\})$, $f([-4,1])$ et $f^{-1}(\{-7\})$.

$$\begin{array}{rcl}f(\{-4,1\}) & = & \{f(x)/\ x\in\{-4,1\}\}\\ & = & \{f(-4),\ f(1)\}\\ & = & \{0\}\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}f([-4,1]) & = & \{f(x)/\ x\in[-4,1]\}\\ & = & \left\{f(x)/\ x\in[-4,\frac{-3}{2}]\cup]\frac{-3}{2},1]\right\}\\ & = & \left\{f(x)/\ x\in[-4,\frac{-3}{2}]\right\}\cup\left\{f(x)/\ x\in]\frac{-3}{2},1]\right\}\\ & = & [f(\frac{-3}{2}),f(-4)]\cup[f(\frac{-3}{2}),f(1)]\\ & = & [\frac{-25}{4},0]\cup]\frac{-25}{4},0]\\ & = & [\frac{-25}{4},0].\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcl}
f^{-1}(\{-7\}) & = & \{x \in \mathbb{R}/\ f(x) \in \{-7\}\} \\
 & = & \{x \in \mathbb{R}/\ f(x) = -7\} \\
 & = & \{x \in \mathbb{R}/\ x^2 + 3x - 4 = -7\} \\
 & = & \{x \in \mathbb{R}/\ x^2 + 3x + 3 = 0\} \\
 & = & \emptyset.
\end{array}
$$

2. Étudions l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
   (a) Injectivité de f : D'après la question précédente, on a $f(-4) = 0 = f(1)$ mais $-4 \neq 1$. Donc f n'est pas injective.
   (b) Surjectivité de f : f n'est pas surjective car $y = -7$ (par exemple) n'a pas d'antécédent (d'après la question précédente).
   (c) Bijectivité de f : f n'est pas bijective car elle n'est pas injective (ou bien car elle n'est pas surjective).
3. Donnons l'intervalle J tel que $f :] - \infty, \frac{-3}{2}] \longrightarrow J$ soit bijective et déterminons, dans ce cas, l'application réciproque f^{-1}.
   Il est facile de vérifier que $f :] - \infty, \frac{-3}{2}] \longrightarrow [\frac{-25}{4}, +\infty[$ est une bijection et que

$$
\begin{array}{rlcl}
f^{-1}: & [\frac{-25}{4}, +\infty[& \longrightarrow &] - \infty, \frac{-3}{2}] \\
 & y & \longmapsto & f^{-1}(y) = \frac{-3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{25 - 4y}.
\end{array}
$$