Exo 1 La nature des séries numériques suivantes :

* $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{2n^2+n}$

on a $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{2n^2(1+\frac{1}{2n^2})} = \frac{1}{2} \neq$

$\Rightarrow$ La condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{2n^2+1}$ est divergente. 1,5

** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+\sqrt{n})^n}$, $U_n = \frac{1}{(n+\sqrt{n})^n}$

1ère méthode : L'application de critère de Cauchy donne :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(n+\sqrt{n})^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0 < 1$$

donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+\sqrt{n})^n}$ converge en vertu du critère de Cauchy. 2

2ème méthode: En utilisant le critère de comparaison

on a: pour tout $n \geq 1$.

$$\frac{1}{(1+\sqrt{n})^{n}} \leq \frac{1}{(1+1)^{n}} = \frac{1}{2^{n}}$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n}}$ étant convergente (géométrique de raison $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$), on conclut via le critère de comparaison que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+\sqrt{n})^{n}}$ est convergente.

*** $\sum_{n>1} \frac{1}{n^{5/3}(\ln n)}$ est une série de Bertrand, elle converge d'après le critère de convergence d'une série de Bertrand

$\alpha = 5/3 > 1$. 1,5

Exo 2

1) Montrons que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{(\frac{7}{2})^n}$ est convergente.

$\sum_{n\geq 0} \frac{e^n}{(\frac{7}{2})^n} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2e}{7}\right)^n$ est une série géométrique

de raison $\left|\frac{2}{7}e\right| < 1$, donc elle est convergente. 1,5

La suite des sommes partielles:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2e}{7}\right)^k = 1\left(\frac{1-\left(\frac{2e}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}e}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2e}{7}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{7}e} = \frac{1}{1-\frac{2}{7}e}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\frac{2}{7}e}$$

$$\boxed{S = \frac{7}{7-2e}}$$

2

2) Montrons que $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ est convergente

$U_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln((n-1)(n+$

$-2\ln n = (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(n) -$

$U_n = (\ln(n+1) - \ln n) - (\ln n - \ln(n-1))$

$U_n = V_{n+1} - V_{n}$ ...

$U_n = V_{n+1} - V_n$ avec $V_n = \ln n - \ln(n-1)$

$\sum_{n\geq 2} u_n$ est une série télescopique et donc converge si et ssi (V_n) converge.

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \ln n - \ln(n-1) = \lim_{n\to+\infty} \ln \frac{n}{n-1}$$

$$= \ln 1 = 0$$

donc (V_n) converge $\Rightarrow \sum_{n\geq 2} u_n$ converge. 2

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(V_{n+1} - V_n\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(V_{n+1} - V_2\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n} - $$

$$= -\ln 2$$

$$\boxed{\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2}$$ 2

Exo 3 $n \geq 1$, $x \in]0, 1]$.

$f_n(x) = n x^n \ln x$

$f_n(0) = 0$.

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers f.

Si $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et $x = 1$, $f_n(x) = 0$

$(f_n(x))$ est la suite constante égale à 0. 0,5

Si $x \in]0, 1[$.

$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} n x^n \ln x = 0$ (car $x^n \to$

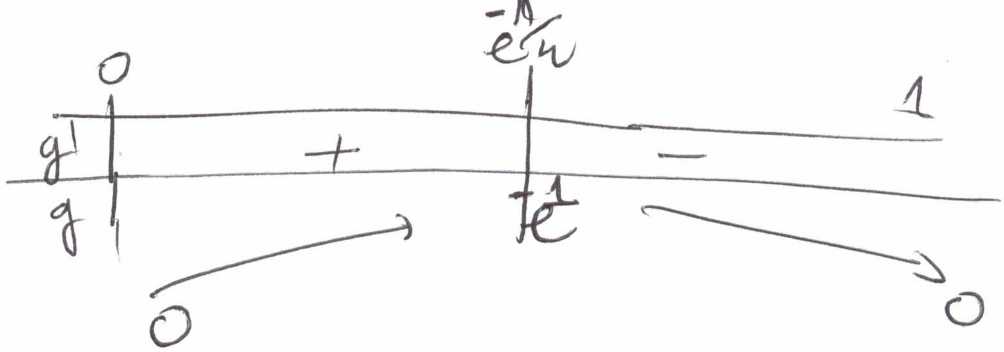
Alors (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle $f \equiv 0$. 1

2) $g = f - f_n = 0 - n x^n \ln x$

$g(x) = -n x^n \ln x$, $x \in]0, 1]$.

$g'(x) = -n x^{n-1}(n \ln x + 1)$.

$g'(x) = 0 \Rightarrow x = e^{-1/n}$ 0,5



La fonction g est croissante sur $]0, e^{-1/n}[$ et décroissante sur $]e^{-1/n}, 1[$. 2

3) La convergence uniforme de (f_n).

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} |g(e^{-1/n})| = e^{-1} \neq 0$$ 1,5

Donc la convergence de (f_n) vers $f \equiv 0$ n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$. 0,5

4) Soit $a \in [0,1[$. La suite $\left(e^{-1/n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $e^{-1/n} \geq a$, $\forall n \geq n_0$.

Ainsi, $\forall n \geq n_0$, la fonction g est croissante sur $[0, a]$, donc $\forall x \in [0,a]$ et $n \geq n_0$, on a

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |g(a)| = n a^n |\ln a|$$

Comme $n a^n |\ln a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ Car $a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Alors la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$. 1,5