Corrigé de l'exercice1 . On a les matrices A et B telles que :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} \text{ telle que pour tout } i = \overline{1,3}\ et\ j = \overline{1,3},\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ j - i, si\ i > j \\ i + j, si\ i < j \end{cases} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 27 & -33 & 54 \end{pmatrix}$$

1. La dimension de la matrice.

Rappelons que la dimension d'une matrice est le nombre de lignes et de colonnes qu'elle a.

Pour la matrice A : On a par définition :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$, ainsi A est de dimension $(3,3)$.

Pour la matrice B :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 27 & -33 & 54 \end{pmatrix}$$, donc B est de dimension $(2,3)$.

2. Les éléments de la matrice A et B.

Rappelons qu'un élément d'une matrice est déterminé par la ligne et la colonne qu'il occupe, ainsi un élément de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est noté a_{ij}.

Les éléments a_{ij} de la matrice A :

Pour déterminer les éléments a_{ij}, il faut expliquer ce que disent les équations qui les définissent. On a :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & si\ i = j \\ j - i, si\ i > j \\ i + j, si\ i < j \end{cases}$$

Ainsi un élément a_{ij} prend la valeur 1, c.-à-d. $a_{ij} = 1$, si le numéro de sa ligne est égal au numéro de sa colonne, c.-à-d. $i = j$. Donc, on a : ■ $a_{11} = 1$ ■ $a_{22} = 1$ ■ $a_{33} = 1$.

De même, un élément a_{ij} prend la valeur $j - i$ (numéro de sa colonne moins numéro de sa ligne) c.-à-d. $a_{ij} = j - i$, si le numéro de sa ligne est supérieur au numéro de sa colonne, c.-à-d. $i > j$.

Donc, on a :■ $a_{21} = 1 - 2 = -1$ ■ $a_{31} = 1 - 3 = -2$ ■ $a_{32} = 2 - 3 = -1$.

Aussi, un élément a_{ij} prend la valeur $i + j$ (numéro de sa ligne plus numéro de sa colonne) c.-à-d. $a_{ij} = i + j$, si le numéro de sa ligne est inférieur au numéro de sa colonne, c.-à-d. $i < j$.

Donc, on a :■ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ ■ $a_{13} = 1 + 3 = 4$ ■ $a_{23} = 2 + 3 = 5$.

Finalement, on a : $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Les éléments b_{ij} de la matrice B :

On a $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 27 & -33 & 54 \end{pmatrix}$. Ainsi : ■ $b_{12} = -3$ ■ $b_{21} = 27$ ■ $b_{23} = 54$.

3. La transposée.

Rappelons que la transposée d'une matrice quelconque A, notée A^t, est une matrice obtenue en transformant les lignes (colonnes) de A en les mettant comme des colonnes (lignes) dans A^t.

Ainsi, on a ■ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et sa dimension est $(3,3)$.

■ $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 27 & -33 & 54 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ -3 & -33 \\ 5 & 54 \end{pmatrix}$, et sa dimension est $(3,2)$.

Corrigé de l'exercice2. I- On a les matrices suivantes :

$$■ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} ■ B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix} ■ C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le calcul

■ $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+0 \\ \frac{4}{3}+\frac{2}{5} & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{26}{15} & -4 \end{pmatrix}$ ■ $A^t + B^t = (A+B)^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{26}{15} \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

■ $B + A = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{26}{15} & -4 \end{pmatrix}$ ■ $3A - 5B = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 20 \end{pmatrix}$.

■ $A + C$ n'est pas définie car A et C ne sont pas de même dimension.

■ $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -8 \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Où L_1, L_2 désignent respectivement la 1ere et la 2eme ligne de A et C_1, C_2 désignent respectivement la 1ere et la 2eme colonne de B. Ainsi :

$$\begin{cases} c_{11} = L_1 \times C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = (1)(-1) + (2)\left(\frac{2}{5}\right) = -1 + \frac{4}{5} = -\frac{1}{5} \quad c_{12} = L_1 \times C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = (1)(0) + (2)(-4) = 0 - 8 = -8 \\ c_{21} = L_2 \times C_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3}\right)(-1) + (0)\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{4}{3} + 0 = -\frac{4}{3} \quad c_{22} = L_2 \times C_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3}\right)(0) + (0)(-4) = 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

■ $B^tA^t = (AB)^t = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{4}{3} \\ -8 & 0 \end{pmatrix}$ ■ $(2A)\left(\frac{-3}{2}B\right) = \left((2)\left(\frac{-3}{2}\right)\right)(AB) = -3\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -8 \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 24 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

■ $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2}{5} & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -\frac{74}{15} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Corrigé De La Série de TD
Calculs Matriciels

Où cette fois-ci L_1, L_2 désignent respectivement la 1ere et la 2eme ligne de B et C_1, C_2désignent respectivement la 1ere et la 2eme colonne de A.

■CB ce produit n'est pas définie car le nombre de colonne dans C(3 colonnes) n'est pas égal au nombre de lignes dans B (2 lignes).

■$C^2 = CC$ Ce produit n'est pas défini. L'opération puissance par un entier n sur les matrices n'est définie que pour les matrices carrées.

■CC^t on a la matrice C est de dimension (2,3) et sa transposée C^t est de dimension (3,2). Ainsi on peut le remarquer que ce produit est bien défini et la matrice qui va résulter de ce produit est une matrice de dimension (2,2). Ainsi, on a :

■$CC^t = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Où L_1, L_2 désignent respectivement la 1ere et la 2eme ligne de C et C_1, C_2désignent respectivement la 1ere et la 2eme colonne de C^t.

II- Calcul de l'expression suivante:

$A^3 - A^2 + A - I_3$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Par définition, on a $A^3 = A^2A$ et $A^2 = AA$. Donc,

■$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Où L_1, L_2, L_3 désignent respectivement la 1ere, la 2eme et la 3eme ligne de la première matrice de ce produit et C_1, C_2, C_3 désignent respectivement la 1ere, la 2eme et la 3eme colonne de la second matrice de ce produit.

Par la suite,

■$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Où L_1, L_2, L_3 désignent respectivement la 1ere, la 2eme et la 3eme ligne de A^2 et C_1, C_2, C_3 désignent respectivement la 1ere, la 2eme et la 3eme colonne de A.

Ainsi, on a :

■$A^3 - A^2 + A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En d'autre terme, $A^3 - A^2 + A - I_3 = 0$, où 0 designe la matrice nulle d'ordre 3.

Corrigé de l'exercice3. Calcul des déterminants par une ligne ou une colonne :

■ $\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = (-4)(-3) - (3)(-3) = 12 + 9 = 21.$

I- La Méthode des cofacteurs :

Pour les autres déterminants, on applique la méthode des cofacteurs qui consiste en deux étapes : a- choisir une ligne ou une colonne, b- appliquer la formule des cofacteurs correspondant à la ligne ou colonne choisie.

Si une matrice contient des zéros il faut choisir une ligne ou colonne contenant le maximum de zéros pour avoir moins de calcul à faire.

■ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ On calcule ce déterminant en effectuant l'expansion en cofacteurs selon la troisième ligne. Ainsi on a la formule suivante :

■ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3)A_{31} + (0)A_{32} + (1)A_{33} = (3)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 3[(1)(4) - (0)(3)] + [(-1)(3) - (1)(1)] = (3)(4) + (-4) = 12 - 4 = 8.$

■ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ On calcule ce déterminant en effectuant l'expansion en cofacteurs selon la quatrième colonne. Ainsi on a la formule suivante :

■ $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1)A_{14} + (0)A_{24} + (0)A_{34} + (0)A_{44} = -A_{14}$

$= -(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ (On développe selon la 2eme ligne)

$= (0)A_{21} + (0)A_{22} + (1)A_{23} = A_{23}$

$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -[(2)(1) - (1)(1)] = -(2-1) = -1.$

II- La méthode de Sarrus :

■ $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right|$

$= (-1)(3)(1) + (1)(4)(3) + (0)(1)(0) - (3)(3)(0) - (0)(4)(-1) - (1)(1)(1)$

$= -3 + 12 + 0 - 0 - 0 - 1 = 8.$

■ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}$

$$= (0)(2)(2) + (1)(0)(1) + (1)(1)(0) - (1)(2)(1) - (0)(0)(0) - (1)(1)(2)$$

$$= 0 + 0 + 0 - 2 - 0 - 2 = -4.$$

Corrigé de l'exercice4. I-a. Calcul de la matrice inverse :

■ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ On suit les étapes suivantes :

Le déterminant : $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Donc A est inversible.

Les cofacteurs : $\begin{cases} A_{11} = 1 & A_{12} = -3 \\ A_{21} = 1 & A_{22} = \ \ 2 \end{cases}$

La comatrice : $comA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow (comA)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

L'inverse : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comA)^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix}$

■ $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ On suit les étapes suivantes :

Le déterminant : $\det B = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Donc B est n'est pas inversible.

■ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On suit les étapes suivantes :

Le déterminant : $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Donc C est inversible.

Les cofacteurs : $\begin{cases} A_{11} = 1 & A_{12} = 0 & A_{13} = -4 \\ A_{21} = 0 & A_{22} = 1 & A_{23} = \ \ 0 \\ A_{31} = 0 & A_{32} = 0 & A_{33} = \ \ 1 \end{cases}$

La comatrice : $com\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (com\ C)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'inverse : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(comC)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b- Si AB est inversible : la matrice AB ne peut être inversible car son déterminant :

$$\det AB = \det A \det B = (5)(0) = 0$$

II- Le Calcul : On a $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En d'autre terme, $AB = I_2$. Cette derniere egalite nous permet de conclure que A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$.

III- La déduction que A est inversible : On a d'après ce qui précède :

$$A^3 - A^2 + A - I_3 = 0$$

où 0 est la matrice nulle, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'idée est de transformer l'expression $A^3 - A^2 + A - I_3 = 0$ et de la mettre sous la forme $AB = I$ ou $BA = I$. En faisant ainsi, on montre que A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$. On a

$$A^3 - A^2 + A - I_3 = 0 \Longrightarrow A^3 - A^2 + A = I_3 \Longrightarrow A(A^2 - A + I_3) = I_3$$

Et cette dernière Egalite signifie que A inversible est son inverse $A^{-1} = A^2 - A + I_3$. Donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice5. La forme échelonnée.

Pour échelonner une matrice, il faut savoir deux choses : c'est quoi une matrice échelonnée et quelles sont les opérations à suivre (algorithme) afin d'échelonner une matrice.

La matrice A.

$$\blacksquare A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{6}L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} = A_e$$

La matrice B.

$$\blacksquare B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = B_e$$

Remarque.

a_{ij} désigne le pivot de la i^{eme} ligne.

L_i désigne la ligne pivot de a_{ij} .