IV Espaces Vectoriels de dimension finie

Définition on dit qu'un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.

Existence d'une base en dimension finie

Théorème: soit E un K e v non nul de dimension finie G une partie génératrice finie de E et L une partie libre contenue dans G. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$L \subset \mathcal{B} \subset G$$

Démonstration:

soit $L = \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \subset G$

L une famille libre.

soit $\mathcal{B}$ l'une des parties de G qui contient L, qui est libre et qui contient le plus grand nombre d'éléments.

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_p\}$$

on montre que $\mathcal{B}$ est une base de E.

* $\mathcal{B}$ est libre, par construction.

* $\mathcal{B}$ génératrice.

$\forall x \in E$, la famille $\mathcal{B} \cup \{x\} = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_p, x\}$ est liée

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_{r+p}$ non tous nuls

$\alpha x + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_{r+p} v_p = 0$ avec $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow x = -\alpha^{-1} \left[\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v_1 + \dots \right]$

$\Rightarrow x$ est une Combinaison linéaire des elts de E.

$\Rightarrow x$ est combinaison linéaire d'éléments de B.

d'où B est génératrice de E.

<u>Conclusion</u> B libre et génératrice donc c'est une base de E.

Proposition : Soit E un Kev de dimension finie, $G = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E. et $L = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille libre alors $p \leq n$

<u>Démonstration</u> :

$G = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ génératrice de E.

alors $v_1 \in E$, s'écrit comme combinaison linéaire de $u_1, u_2, \dots, u_n$.

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{1,i} u_i \text{ avec } \alpha_{1,i} \text{ non tous nuls}$$

~~soit~~ ~~suppo~~ car $V_1 \neq 0_E$.

$\Rightarrow \exists i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tq $\alpha_{1,i_0} \neq 0$

On peut supposer que $i_0 = 1$, donc $\alpha_{1,1} \neq 0$

$$V_1 = \alpha_{11} u_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1,i} u_i$$

$$\alpha_{11} u_1 = v_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1,i} u_i$$

$$u_1 = \alpha_{11}^{-1} \left[v_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_{1,i} u_i \right]$$

d'où u_1 s'écrit comme combinaison linéaire de $v_1, u_2, u_3, \dots, u_n$

Soit $G_1 = (v_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice de E

alors $V_2 = \alpha V_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_{2,i} u_i$ avec $\alpha_{2,i}$ non tous nuls

Sinon $V_2 = \alpha V_1$ Or v_1, v_2 L.I.

on peut supposer que $\alpha_{2,2} \neq 0$ Alors

u_2 est une combinaison linéaire de $(V_1, V_2, u_3, u_4, \dots, u_n)$

$G_2 = (V_1, V_2, u_3, u_4, \dots, u_n)$ est une famille génératrice de E. On répète le même raisonnement jusqu'à avoir

$G_r = (V_1, V_2, \dots, V_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$ génératrice de F avec $r \leq \inf(p, n)$

Corollaire 1

Tout espace vectoriel E de dimension finie, non réduit à $\{0\}$, admet une base finie.

en effet, par définition, E admet une partie génératrice finie $G=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et il existe $x_i \in G$ non nul puisque $E \neq \{0\}$. Il suffit de poser $L=\{x_i\}$ et on applique le Théorème précédent. □

Corollaire 2 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un Kev de dimension finie et soit

Pour toute partie libre $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ de E, il existe des vecteurs $y_1, y_2, \dots, y_q$ de E tels que $(x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q)$ soit une base de E.

Démonstration

Posons $L=\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ et soit G une famille génératrice finie de E. Alors $L \cup G$ est une famille génératrice finie de E. et on a

$$L \subset L \cup G$$

d'après le théorème précédent, il existe une base B telle que $L \subset B \subset L \cup G$ on peut mettre B sous la forme $B = L \cup H$ où H est une partie finie de G. □

Théorème : Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

Démonstration : On sait que tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base

Soient $B=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $B'=(e_1, e_2, \dots, e_m)$ deux bases de E

Comme $e_1, e_2, \dots, e_m$ sont des combinaisons linéaires de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

<u>Si</u> $m > n$ alors d'après la proposition $(*)$, $(e_1, e_2, \dots, e_m)$ serait liée ce qui absurde car c'est une base alors $m \leq n$.

On montrera de même $n \leq m$

d'où $n = m$.

$\square$

<u>Définition</u> : Soit E un K ev de dimension finie, On appelle dimension de E, on note $\dim_K E$ ou $\dim(E)$, le nombre d'éléments d'une base quelconque de E.

On pose par définition que $\dim(\{0\}) = 0$.

<u>Remarque</u> : la dimension d'un espace vectoriel dépend du corps de base. Ainsi

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, mais $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$

<u>Théorème</u> : Soit E un K ev de dimension finie, $\dim_K E = n$. et soit B une partie de E.
les condition suivants sont équivalentes.

a) B est une base de E.

b) B est une partie génératrice libre de E et $\operatorname{card}(B) = n$. (nombre d'elements de B est n)

c) B est une partie génératrice de E et $\operatorname{card} B = n$.

démonstration)

a) ⇒ b) évident

b) ⇒ c) si B n'était pas génératrice on peut la compléter pour obtenir une base de E (théorème de la base incomplète) et cette base aurait au moins $(n+1)$ elts, ce qui est absurde. Car toutes les bases ont le même nombre d'éléments.

c) ⇒ a) si B n'était pas libre, on pourrait en extraire une base de E possédant au moins $(n-1)$ éléments, ce qui contredit la définition de la dimension.

Proposition : Soient E un K ev de dimension finie $E \neq \{0_E\}$

E_1, E_2 deux sev de E

1) $E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \dim E_1 \leq \dim E_2$

2) $\left.\begin{array}{l} E_1 \subset E_2 \\ \dim E_1 = \dim E_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow E_1 = E_2$.

Démonstration :

1°) Soient B_1 une base de E_1, B_2 une base de E_2

$\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ base de } E_1 \\ E_1 \subset E_2 \end{array}\right\} \Rightarrow B_1$ famille libre de E_2

$\left.\begin{array}{l} B_1 \text{ famille libre de } E_2 \\ B_2 \text{ base de } E_2 \\ \quad (\text{génératrice}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Card } B_1 \leq \text{card } B_2$

$\Longrightarrow \dim E_1 \leq \dim E_2$

2) Soit B_1 une base de $E_1 \Rightarrow B_1$ une famille libre de E_1.

Puisque $E_1 \subset E_2$ alors B_1 famille libre de E_2

d'autre part $\dim E_1 = \dim E_2 \Rightarrow \text{Card } B_1 = \text{Card } B_2$,

d'après la <u>proposition</u> (partie libre à n elt = <u>Base</u>)

B_1 est une base de E_2

Alors $E_2 \subset E_1$ car $\forall u \in E_2$, u = combinaison <u>linéaire</u> des elts de B_1 d'où $u \in E_1$

V) Somme de sev et somme directe - Rang d'un système de vecteur.

Définition Soient E_1 et E_2 deux sev d'un Kev E.
On definit la somme de E_1 et E_2, notée E_1+E_2 par :

$$E_1+E_2 = \{u \in E \ / \ \exists u_1 \in E_1, \ \exists u_2 \in E_2 \ / \ u = u_1 + u_2\}$$

Propriétés :

1) $E_1 + E_2$ est sev de E contenant $E_1 \cup E_2$.
2) $E_1 + E_2 = \langle E_1 \cup E_2 \rangle$

Définition (Somme directe de 2 sev)
On dit que la somme E_1+E_2, de deux sev d'un même Kev. E est directe ~~et est notée~~ si $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$
la somme directe est notée : $E_1 \oplus E_2$.

Définition 2. Soit E un Kev, E_1, E_2 2 sev de E.

On dit que E_1 et E_2 sont supplementaires si
$E = E_1 \oplus E_2$

i.e $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0_E\}$.

Proposition : Tout sev d'un Kev de dimension finie admet un supplémentaire

Démonstration :

soit E_1 un sev d'un Kev E.
$\dim E_1 = p \Rightarrow \exists \ B = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ base de E_1
On complète B de façon à obtenir une base de E (dimension finie) .

$B_E = \{u_1, u_2, \dots, u_p, v_1, \dots, v_r\}$

$$r + p = \dim E$$

Supplémentaire de $E_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_r \rangle$

Proposition : Soient E_1 et E_2 deux sev d'un kev E.

1) $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$.

2) $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

Démonstration :

Soient E_1 et E_2 deux sev d'un kev E.

$\dim E_1 = p \Rightarrow \exists B_{E_1} = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ base de E_1

$\dim E_2 = q \Rightarrow \exists B_{E_2} = \{v_1 \dots v_q\}$ " de E_2

on montre que $B = B_{E_1} \cup B_{E_2}$ est une base de $E_1 \oplus E_2$

- B génératrice

$u \in E_1 \oplus E_2 \Rightarrow \exists w_1 \in E_1, \exists w_2 \in E_2 \,/\, u = w_1 + w_2$.

- B libre $\quad u =$

$$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots \lambda_p u_p}_{0_E} + \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_q v_q}_{0_E} = 0_E$$

2) $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

Soient $p = \dim E_1$

$q = \dim E_2$

$E_1 \cap E_2$ est sev de $E_1 + E_2$, $r = \dim E_1 \cap E_2$

9) $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$

Soient $p = \dim E_1$ et $q = \dim E_2$

$E_1 \cap E_2$ est un sev de E_1 soit $r = \dim(E_1 \cap E_2)$

$\exists G$ sev de E_1 / $E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus G$.

$$\dim G = p - r$$

$\exists H$ sev de E_2 / $E_2 = (E_1 \cap E_2) \oplus H$

$$\dim H = q - r$$

Soit $B_{E_1 \cap E_2} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ une base de $E_1 \cap E_2$

$B_G = \{v_1, v_2, \dots, v_{p-r}\}$ base de G

$B_H = \{w_1, w_2, \dots, w_{q-r}\}$ base de H

On montre que $B = B_{E_1 \cap E_2} \cup B_G \cup B_H$

$= \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_{p-r}, w_1, \dots, w_{q-r}\}$

est une base de $E_1 + E_2$

$\dim(E_1+E_2) = \operatorname{card} B = r + (p-r) + (q-r)$

$$\dim(E_1+E_2) = p + q - r$$

1°) Génératrice.

$\forall x \in E_1 + E_2, \Rightarrow \exists x_1 \in E_1 / \exists x_2 \in E_2 /$

$$x = x_1 + x_2$$

Suite de la demonstration

Supposons que P strictement $> n$ alors pour $r = n$.

$G_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ sera génératrice de E

Comme $L = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_p)$

Alors $v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots, v_p$ serait ~~toutes~~ combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ce qui est absurde car L est libre.

donc $P \leq n$.

$\square$

Théorème : E un K ev de dimension finie n

alors

1°) Toute partie libre L de E possède au plus n éléments. Si ce nombre d'éléments est égal à n, L est une base de E.

2°) Toute famille génératrice G possède au ~~plus~~ moins n éléments si ce nombre d'elts est égal à n, G est une base de E

Démonstration a) d'après le théorème ; Il existe une base B de E telle que $L \subset B$. Comme B possède n elts L possède au plus n éléments, si L possède n elt alors $L = B$ et L une base de E.

a) De même, il ~~ne~~ existe une base B de E tq $B \subset G$, comme B possède n ~~elts~~, G possède au moins n éléments.