Chapitre 1

Espaces Vectoriels

I) Espace vectoriel sur un Corps commutatif $\mathbb{K}$.

Soit E un ensemble, muni d'une loi de composition interne $\oplus$, $\oplus : E \times E \longrightarrow E$

$$(x, y) \longmapsto x \oplus y.$$

et d'une loi de composition externe $*$.

$$* : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(\lambda, x) \longmapsto \lambda * x$$

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou (un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) ssi :

$\boxed{1}$ $(E, \oplus)$ est un groupe abélien.

$\boxed{2}$ la loi externe $*$ vérifie les quatre propriétés suivantes : Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$.

$\boxed{2.1}$ $\alpha * (x \oplus y) = \alpha * x \oplus \alpha * y$.

$\boxed{2.2}$ $(\alpha + \beta) * x = \alpha * x \oplus \beta * x$.

$\boxed{2.3}$ $(\alpha \cdot \beta) * x = \alpha * (\beta * x)$.

$\boxed{2.4}$ $1_{\mathbb{K}} * x = x$.

Les éléments de E sont appelés Vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

Par abréviation on écrit $\mathbb{K}$-e.v pour $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemples :

① Tout corps commutatif $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev
- $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev

② soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}}_{n \text{ fois}}$$

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel relativement aux lois :

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$

$$x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda * x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

③ soit X un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev.

on note par

$$\mathcal{F}(X, E) = \{ f : X \longrightarrow E, \ f \text{ application} \}$$

on définit

$$\mathcal{F}(X, E) \times \mathcal{F}(X, E) \longrightarrow \mathcal{F}(X, E)$$
$$(f, g) \longmapsto f + g$$

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in X$.

$$\mathbb{K} \times \mathcal{F}(X, E) \longrightarrow \mathcal{F}(X, E)$$
$$(\lambda, g) \longmapsto \lambda \cdot g$$

$(\lambda g)(x) = \lambda \cdot g(x)$, $\forall x \in X$.

$(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Propriétés : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$ on a

1) $\alpha \cdot 0_E = 0_E$.

2) $\alpha \cdot (x - y) = \alpha x - \alpha y$.

3) $(-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x) = -(\alpha \cdot x)$.

4) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$

5) $(\alpha - \beta) x = \alpha \cdot x - \beta \cdot x$.

Démonstration :

II) Sous espaces Vectoriels

Définition 1 Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E.
On dit que F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si

1) F est stable pour $+$:
$$\forall x,y \in F,\ x+y \in F$$
2) $\forall u \in F, \forall \alpha \in K,$
$$\alpha \cdot u \in F.$$

Remarque : La structure induite sur F par la structure de E est une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition 1 Soient E un $\mathbb{K}$ ev, F une partie de E

$$\boxed{F \text{ sev de } E \iff \begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ 2)\ \forall \alpha,\beta \in K, \forall u,v \in F, \\ \quad \alpha u + \beta v \in F. \end{cases}}$$

$$\boxed{F \text{ sev de } E \iff \begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ 2)\ \forall x,y \in F,\ x+y \in F \\ 3)\ \forall \lambda \in K, \forall x \in E,\ \lambda \cdot x \in F \end{cases}}$$

$$\boxed{F \text{ sev de } E \iff \begin{cases} 1)\ F \neq \emptyset \\ 2)\ \forall \alpha \in K,\ \forall x,y \in E \\ \quad \alpha x + y \in E. \end{cases}}$$

Montrons la 1ère équivalence

$\Rightarrow$) ~~Fsev~~ F sev de E alors $0_E \in F$
donc $F \neq \phi$.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \alpha x + \beta \in F$.

$\Leftarrow$) $F \neq \phi$ et montrons que F est stable pour "+"

. Il suffit de prendre $\alpha = \beta = 1$, on trouve
$\forall x, y \in F, x + y \in F$.

~~statbilité par~~ Montrons la 2ème ?
$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in F, \alpha . x \in F$

Il suffit de prendre dans $(*)$, $\beta = 0_{\mathbb{K}}$.

Remarque : F sev de $E \Longrightarrow 0_E \in F$

Attention la réciproque est Fausse.
appartient
si $0_E \in F$ alors F n'est pas forcement un sev de E.

Exemples : 1) $F = \{0_E\}$ est un sev de E.

2) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$

$F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 2\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

$F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0\}$ est un ~~R~~ s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

On considère $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E.

Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sev de E.

Démonstration :

d'après la proposition 1, on montre :

① $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

~~et~~ F_i sev $\Longrightarrow 0_E \in F_i$ donc $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$

② $\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i$

$\alpha x + \beta y \overset{?}{\in} \bigcap_{i\in I} F_i$

$x, y \in \bigcap_{i\in I} F_i \Longrightarrow x, y \in F_i, \ \forall i \in I.$

$\Longrightarrow \alpha x + \beta y \in F_i \ \ \forall \alpha, \beta \in K$

car F_i sev de E

d'où $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

$\square$

Remarque : La réunion de sous-espace vectoriel n'est pas toujours un sev.

Exemple : $\mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$ev.

$$\left.\begin{array}{l} F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\} \\ G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\} \end{array}\right\} \text{ 2 sev de } \mathbb{R}^2$$

$F \cup G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \text{ ou } y = 0\}$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{array}{l} (0,1) \in F \cup G \\ (0,1) \in F \cup G \end{array}\right\} \Rightarrow (0,1) + (1,0) = (1,1) \notin F \cup G.$$

donc $F \cup G$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^2$.

⊛ Sous espace engendré par une partie d'un ev

Définition : Soient E un $\mathbb{K}$ev, A une partie non vide de E, On appelle sous espace vectoriel engendré par A, le plus petit sev contenant A, On le note $S(A)$ ou $Vect(A)$ ou $\langle A \rangle$

Propriété
$$S(A) = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \text{ sev de } E}} F$$

Démonstration : a) $S(A) \subset \bigcap\limits_{\substack{F \supset A \\ F \text{ sev}}} F$, b) $\bigcap\limits_{\substack{A \subset F \\ F \text{ sev}}} F \subset S(A)$

(car $S(A) \subset F$, $\forall F$ sev, $F \supset A$) $\left(\begin{array}{l} S(A) \supset A \\ S(A) \text{ sev de } E \\ \cancel{S(A)} \end{array}\right.$ $\bigcap F \subset S(A)$

Définition 2 : ① Soit p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p$ de E

On appelle Combinaison linéaire de $x_1, x_2, \dots, x_p$ tout élément de la forme $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$

$$= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$$

Où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires.

② A une partie non vide d'un kev de E.

$\mathcal{C}(A) = \{ x \,/\, x$ s'écrit comme combinaison linéaire d'un ~~élément~~ nombre fini d'éléments de $A \}$

$= \{ x \,/\, \exists x_1, x_2, \dots, x_p \in A \,/\, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ tq $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p \}$

Propriété 2 : Soit A une partie non vide de E (E un kev) $\mathcal{C}(A)$ est un sev de E.

Théorème : Soit A une partie non vide de E (E un kev)

① $S(A) = A \iff A$ est un sev.

② $S(A) = \mathcal{C}(A)$.

Démonstration :

① $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} S(A)=A \\ S(A) \text{ sev de } E \end{array}\right\} \Rightarrow A$ sev de E.

$\Leftarrow$ on a $A \subset S(A)$
$\left.\begin{array}{l} \\ A \text{ sev de } E \Rightarrow S(A) \subset A \end{array}\right\} \Rightarrow S(A)=A$

(2) $S(A) \overset{?}{=} C(A)$

2.1 $S(A) \subset C(A)$?

Il suffit de montrer que $A \subset C(A)$ et $C(A)$ est un sev de E.

$[\forall a \in A,\ a = 1_K \cdot a \in C(A)] \Rightarrow A \subset C(A)$

Propriété 2 : $S(A) \subset C(A)$.

2.2 $C(A) \subset S(A)$

$\forall x \in C(A) \Rightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

$x_i \in A \subset S(A)$
donc $\lambda_i x_i \in S(A)$ d'où $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in S(A)$
car $S(A)$ est un sev de E

Conclusion $C(A) \subset S(A)$ $\square$

II Indépendance linéaire — Bases

Définition Soit E un K e v.

$\boxed{1}$ Une famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de E est dite libre ou bien les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants si toute combinaison linéaire de ces ~~éléments~~ vecteurs nulle entraine les scalaires correspondants sont tous nuls.

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

$\boxed{2}$ La famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est dite liée ou bien les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont linéairement dependants si cette famille n'est pas libre.

$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ non tous nuls /

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$$

$\boxed{3}$ la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E est dite génératrice de E si le sous espace engendré par $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est E tout entier.

$\forall x \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ tq

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

$\boxed{4}$ On appelle base de E, toute famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E, libre et génératrice de E.

Exemple :

* $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-ev.

$\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, on l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^3$

Dans le cas général :

$\{e_1=(1,0,0,\ldots\ldots 0), e_2=(0,1,0 \ldots), e_i=(0\ldots,1,0\ldots)$ $i^{ème}$ composante

$e_n=(0,0,\ldots,0,1)\}$ est ~~la~~ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2) $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-ev.

$\{(1,2,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$

est une base de $\mathbb{R}^3$,

· libre $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,1,0)=(0,0,0) \Rightarrow$

$\alpha=\beta=\gamma=0$

$\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,0)+\gamma(1,1,0)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma=0 \\ 2\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 0\beta=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \gamma=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}$

Lemme La famille $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs x_i peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Démonstration $\Rightarrow)$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ liée $\Rightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) \in K$, non tous nuls tels que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

~~donc~~ $\exists i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tq $\lambda_{i_0} \neq 0_E$

et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$

~~d'où~~ $\cancel{\lambda_{i_0} x_{i_0} =}$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} + \lambda_{i_0} x_{i_0} + \lambda_{i_0+1} x_{i_0+1} + \dots + \lambda_n x_n =$$

$$\lambda_{i_0} x_{i_0} = -\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \dots - \lambda_{i_0-1} x_{i_0-1} - \lambda_{i_0+1} x_{i_0+1} - \lambda_n x_n$$

donc x_{i_0} s'écrit comme combinaison linéaire des autres éléments de $x_1, \dots, x_n$.

$\Leftarrow)$ Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ / ~~x_{i_0}~~

$$x_{i_0} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{i_0-1} x_{i_0-1} + \alpha_{i_0+1} x_{i_0+1} + \dots + \alpha_n x_n.$$

$\Rightarrow) \; -x_{i_0} + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E$

d'où $(x_1, \dots, x_n)$ est liée. $\square$

Théorème : Soit E un K-e-v, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Démonstration : Soit $x \in E$

on a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E alors $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est génératrice de E.

donc $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in K^n /$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Supposons que $\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$,

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

alors $x - x = (\lambda_1 - \alpha_1) x_1 + (\lambda_2 - \alpha_2) x_2 + \cdots + (\lambda_n - \alpha_n) x_n = 0$.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ base de $E \Rightarrow (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre.

donc $\lambda_1 - \alpha_1 = \lambda_2 - \alpha_2 = \cdots = \lambda_n - \alpha_n = 0$.

donc $\alpha_i = \lambda_i \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

$\Leftarrow)$ $\forall x \in E \xRightarrow{hyp} \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n /$

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

$\Longrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est génératrice de E.

Il reste à montrer que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est libre

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0_E = 0_{\mathbb{K}} x_1 + \dots + 0_{\mathbb{K}} x_n$$

$$0_E \in E$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots \alpha_n = 0$$

Conséquence : Soient E un $\mathbb{K}$-ev,

$B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ une base de E donc

$\forall x \in E \Longrightarrow \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n /$

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n .$$

Les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont appelés coordonnées de x ~~relativement~~ suivant la base B.