Université A. MIRA de Béjaia
Département Recherche Opérationnelle

L2 (Licence à programme national.

Série de TD 1 du S2 du module Analyse complexe (2022)

Exercice 1:

Ecrivez les nombres complexes suivants sous la forme algébrique

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} \qquad \text{et} \qquad \frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Solution :

1/ Nous réécrivons la fraction sous cette forme

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7.$$

Ce qui implique que

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = (1+i)^2\left[\frac{(1+i)(1+i)}{2}\right]^7 = 2i\frac{(2i)^7}{2^7} = 2i^8 = 2.$$

Par conséquent,

$$\text{Re}\left(\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\right) = 2 \qquad \text{et} \qquad \text{Img}\left(\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}\right) = 0.$$

2/ Nous avons

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{i(-i+\alpha)}{i(-2\alpha i+\alpha^2-1)}.$$

On obtient donc

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{(\alpha-i)}{(\alpha-i)^2} = \frac{1}{\alpha-i}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{\alpha+i}{\alpha+i(\alpha-i)} = \frac{\alpha}{\alpha^2+1} + i\frac{1}{\alpha^2+1}.$$

Exercice 2:

Montrer que

$$(|z| = 1 \quad \text{et} \quad z \neq 1) \Rightarrow i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}.$$

Solution :

Posant, pour $z \neq 1$,

$$w := i\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Nous allons vérifier que $\overline{w} = w$ et dans ce cas forcément $w \in \mathbb{R}$. On a

$$\overline{w} = -i\left(\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1}\right)$$

En utilisant le fait que $|z| = 1$, on obtient

$$\overline{w} = -i\left(\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right) = i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = w.$$

Donc,

$$\overline{w} = w.$$

Ceci implique que, pour $|z| = 1$ et $z \neq 1$,

$$i\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3:

Monter que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Solution :

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}\right)}.$$

Puisque $\overline{z}z = |z|^2$, alors

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{1}{|z|^2}\overline{(\overline{z})} = \frac{1}{|z|^2}z.$$

Par conséquent,

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}z}z = \frac{1}{\overline{z}}.$$

Exercice 4:

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants

$$\boldsymbol{i}, \qquad \mathbf{5+12}\boldsymbol{i}.$$

Solution :

1/ Soit $z = a + ib$ (dans notre cas, a et b sont supposés être $a = 0$ et $b = 1$). On pose $w = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ qui désigne les racines de z. Nous avons la relation suivante

$$w^2 = z.$$

Ce qui implique que

$$(x + iy)^2 = a + ib.$$

Ceci, nous ramène au système suivant

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 2xy = b. \end{cases}$$

Après calcul, les racines carrées de i sont

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2/ De la même façon, en appliquant le même raisonnement, nous obtenons

$$3 + 2i \qquad \text{et} \qquad -3 - 2i.$$

comme racines carrées de $5 + 12i$.

Exercice 5:

On considère la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z \neq -i, \quad f(z) = \frac{z-2}{z+i}.$$

Déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in \mathbb{R}$ puis déterminer l'ensemble des points tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

Solution :

Nous allons essayer d'écrire f sous sa forme algébrique. Pour cela, on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Ainsi, nous obtenons, pour $z \neq -i$,

$$f(z) = \frac{z-2}{z+i} = \frac{x+iy-2}{x+iy+i} = \frac{x-2+iy}{x+i(y+1)}.$$

En multipliant par le conjugué du dénominateur, on obtient

$$f(z) = \frac{(x-2+iy)(x-i(y+1))}{x^2+(y+1)^2}.$$

Après calcul, nous aurons

$$\mathrm{Re}\,(f(z)) = \frac{x^2-2x+y^2+y}{x^2+(y+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Img}\,(f(z)) = \frac{2y-x+2}{x^2+(y+1)^2}.$$

Dans ce cas, l'ensemble des points vérifiant $f(z) \in \mathbb{R}$ implique forcement

$$2y - x + 2 = 0.$$

Par conséquent, l'ensemble des points est la droite $y = \frac{1}{2}x - 1$ privée du point $(0, -1)$.

L'ensemble des points tel que $f(z) \in i\mathbb{R}$ vérifie

$$x^2 - 2x + y^2 + y = 0.$$

Cette équation doit être réécrite comme suite

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}.$$

Ce qui donne l'équation du cercle privée du point $(0, -1)$ suivante (centre $(1, -0.5)$ et du rayon $\frac{1}{4}$)

$$(x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}.$$

Exercice 6:

Résoudre l'équation

$$z^2 - z + 1 - i = 0.$$

Solution :

Pour résoudre cette équation du second degré, on calcule le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (1 - i) = (1 + 2i)^2.$$

Automatiquement les solutions sont données par la formule

$$z_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A noter qu'ici $\sqrt{\Delta}$ reflète deux valeurs. Nous obtenons donc

$$z_1 = \frac{1 - (1 + 2i)}{2} = -i,$$

et

$$z_2 = \frac{1 + (1 + 2i)}{2} = 1 + i.$$