Corrigé de l'examen

Exercice 01 (04 pts) :

On a : $x(t) = 6e^{-0.3t}\cos(2\pi t + \varphi)$

1. Détermination de la valeur de la pulsation propre :

$$\lambda = 0.3\ s^{-1}, \omega_a = 2\pi\ rad/s \qquad \text{(1pt)}$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \omega_a^2 + \lambda^2 = 39.38 \Rightarrow \omega_0 = 6.27\ rad/s \qquad \text{(1pt)}$$

2. La valeur de l'amplitude après 6 oscillations :

$$\delta = ln\frac{A\,e^{-\lambda t}}{A\,e^{-\lambda(t+T_a)}} = ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_a)}\right) = \frac{1}{n}ln\left(\frac{x(t_0)}{x(t_0+nT_a)}\right) = \lambda T_a \qquad \text{(0.5 pt)}$$

$$x(t_0) = 6, \quad T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = 1\ s \qquad \text{(0.5pt)}$$

$$\frac{1}{6}ln\left(\frac{6}{x(t_0+nT_a)}\right) = 0.3 \Rightarrow x(t_0 + 6T_a) = \frac{6}{e^{1.8}} \qquad \text{(1pt)}$$

Exercice 02 (10 pts) :

1. Energie cinétique du système : (1pt)

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{mR^2}{4}\right)\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2$$

Energie potentiel : $U = \frac{1}{2}k\left(\frac{R}{2}\theta\right)^2 + mg\frac{R}{2}(1 - cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta^2$ (1pt)

Fonction de Dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\left(R\dot{\theta}\right)^2$ (0.5pt)

2. le lagrangien du système $L = T - U = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{4}\right)R^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta^2$ (0.5pt)

3. Equation de mouvement sous la forme: $\ddot{\theta} + 2\lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \mathcal{M} = \mathrm{F.d}$

$$\left(\frac{M}{2} + \frac{m}{4}\right)R^2\ddot{\theta} + \alpha R^2\dot{\theta} + \left(\frac{kR^2}{4} + mg\frac{R}{2}\right)\theta = F.\frac{R}{2} \qquad \text{(1pt)}$$

$$\Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\alpha}{M+\frac{m}{2}}\dot{\theta} + \frac{mg+\frac{R\,k}{2}}{R\left(M+\frac{m}{2}\right)}\theta = \frac{F_0\ cos\Omega t}{R\left(M+\frac{m}{2}\right)} \qquad \text{(1pt)}$$

$$ou \quad \ddot{\theta} + \frac{4\alpha}{m + 2M}\dot{\theta} + \frac{k\,R + 2mg}{R(m + 2M)}\theta = \frac{2}{R(m + 2M)}F_0\ cos\Omega t$$

Avec $a = R\left(M + \frac{m}{2}\right) \Longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{R(m+2M)}$

4. la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{mg+\frac{R\,k}{2}}{R\left(M+\frac{m}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{k\,R+2mg}{R(m+2M)}}$ (0.5pt)

Le coefficient d'amortissement $\lambda = \frac{\alpha}{M+\frac{m}{2}}$ (0.5pt)

5. La solution générale de l'équation du mouvement est donnée par $\theta(t) = \theta_T(t) + \theta_P(t)$.

* $\theta_T(t)$ représente la solution transitoire (Homogène) de l'équation $\ddot{\theta} + 2\lambda\,\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ (0.5pt)

* Le mouvement est oscillatoire (régime pseudo-périodique) si : $\lambda < \omega_0 \Longrightarrow \frac{\alpha}{M+\frac{m}{2}} < \sqrt{\frac{k\,R+2mg}{R(m+2M)}}$ (1pt)

$$\alpha < \sqrt{\left(\frac{K}{2}+\frac{mg}{R}\right)\left(M+\frac{m}{2}\right)}$$

6. la solution permanente est de la forme : $\theta = A\cos(\Omega\, t+\varphi)$

Utilisant la représentation complexe pour trouver A et φ : (0.5pt)

$\frac{F_0}{a}\ cos\Omega t \longrightarrow \frac{F_0}{a}\ e^{j\Omega t}$, $\theta = A\cos(\Omega\, t+\varphi) \longrightarrow\ \underline{\theta} = \underline{A}\ e^{j\Omega t}$, $\dot{\theta} = j\Omega \underline{A}\ e^{j\Omega t}$, $\ddot{\theta} = -\Omega^2 \underline{A}\ e^{j\Omega t}$

On obtient l'amplitude $A = \frac{F_0/a}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$ (1pt) et la phase $tg\ \varphi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$ (1pt)

Questions de cours (6pts):

1. La nature du mouvement d'un système amorti donné à 1DDL est déterminée par la comparaison entre la pulsation propre et le coefficient d'amortissement (soit selon le signe du discriminant de l'équation caractéristique du m[vt], soit selon le facteur de qualité). (0.5pt)

On distingue 3 régimes :

- mouvement apériodique: $\grave{\Delta} > 0$, $\lambda > \omega_0\ \ ou\ \ Q < 0.5$

$$q(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\lambda^2+\omega_0^2}t} + A_2 e^{\sqrt{\lambda^2+\omega_0^2}t}\right) \qquad (0.5pt)$$

- mouvement critique: $\grave{\Delta} = 0$, $\lambda = \omega_0\ \ ou\ \ Q = 0.5$

$$q(t) = e^{-\lambda t}(A_1 + A_2\, t) \qquad (0.5pt)$$

- mouvement pseudo-périodique: $\grave{\Delta} < 0$, $\lambda < \ \omega_0\ o\, u\ \ Q > 0.5$

$$q(t) = A\ e^{-\lambda t}\ cos(\omega_a t + \varphi) \qquad (0.5pt)$$

2. L'impédance mécanique est le rapport des amplitudes complexes de la force et de la vitesse :

$\underline{Z} = \underline{F}/\underline{\dot{x}}$ (0.5pt)

3. Le pulsation de résonance correspond à la réponse maximale en amplitude de l'oscillation forcée (0.5pt). La pulsation d'excitation est la pulsation de la force extérieure imposée sur l'oscillateur (0.5pt). La pulsation de coupure correspond à l'amplitude $A_{max}/\sqrt{2}$ (0.5pts).

4. L'existence d'amortissement conduit irrémédiablement à l'extinction du mouvement oscillatoire par dissipation d'énergie. Il est nécessaire de faire un apport d'énergie externe sous la forme d'une force excitatrice. (0.5pt)

5. La réponse de l'oscillateur est toujours en retard de phase par rapport à l'excitation. (0.5pt)

6. Type de couplage : couplage inertiel. (0.5pt)

2 DDl (θ_1, θ_2) (0.5pt)